Matematika, 2001, Jilid 17, bil. 1, hlm. 45–50

Ruang S-Normal

Abu Osman bin Md Tap
Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains Dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE

Norazman bin Arbin
Fakulti Sains Dan Teknologi
Universiti Pendidikan Sultan Idris
35900 Tanjong Malim, Perak DR

Abstrak Levine telah memperkenalkan set semi-terbuka sebagai bentuk lemah bagi set terbuka dan Maheswari & Prasad telah mengkaji ruang s-sekata. Kajian ini akan memperlihatkan keselarian idea dengan memperkenalkan konsep ruang s-normal dan mengkaji sifat-sifatnya. Bentuk kesetaraan bagi s-normal ditunjukkan. Sifat warisan hanya berlaku untuk subruang tertutup yang juga semi-terbuka.

Katakunci semi-terbuka, s-normal, normal, semi-selanjar, selanjar.

Abstract *Levine introduced the concept of semi-open set as the weak form of open set and Maheswari & Prasad studied the s-regular space. This paper will demonstrate the parallelism of ideas by introducing the concept of s-normal space and study its properties. The equivalent form of s-normal is shown. The hereditary property holds for the closed subspace which is also semi-open.*

Keywords *semi-open, s-normal, normal, semi-continuous, continuous.*

1 Pengenalan

Salah satu tujahan dalam pendidikan ialah kreativiti di dalam penjanaan dan pengembangan idea. Tajuk Aksiom Pemisahan di dalam Topologi merupakan salah satu contoh yang boleh digunakan untuk merealisasikan hasrat ini kerana berbagai ruang boleh dibina melalui pengubahsuaian persyaratan di dalam takrifnya sehingga menghasilkan suatu hieraki rantaian ruang pemisahan. Sebagai contohnya di dalam ruang sekata, setiap set tertutup dan titik di luar set tersebut dapat dipisahkan dengan dua set terbuka yang tak bercantum.

Oleh kerana di dalam Ruang-T_1 set titik tunggalan merupakan set tertutup, maka titik di luar set tertutup di dalam takrif ruang sekata itu akan diubah menjadi set tertutup pula. Oleh yang demikian, di dalam ruang normal, dua set tertutup yang tak bercantum dapat dipisahkan oleh dua set terbuka yang tak bercantum.

Berdasarkan pengoperasi tutupan dan pedalaman, Levine [1] telah mentakrifkan konsep semi-terbuka dan semi-tertutup. Diperhatikan bahawa setiap set terbuka merupakan set semi-terbuka, sementara setiap set tertutup selalu merupakan set semi-tertutup. Dengan konsep yang sedemikian, kita akan mendapati bahawa ruang sekata akan dapat diubah suai kepada pelbagai bentuk ruang yang berbeza. Maheshwari & Prasad [2] telah memperkenalkan ruang s-sekata dengan syarat setiap set tertutup dan titik di luar set tersebut dapat dipisahkan dengan dua set semi-terbuka yang tak bercantum.

Dengan pemikiran yang selari dengan perkembangan ruang sekata di atas, maka adalah menjadi hasrat kami untuk mengkaji perkembangan yang mungkin berlaku pada ruang normal dengan mengubah suai persyaratan yang berpadanan.

2 Beberapa Konsep Dasar

Dalam kajian ini selanjutnya, misalkan (X, τ) ruang topologi (ringkasnya ditulis X sahaja). Perhatikan bahawa setiap unsur τ adalah *set* terbuka. Suatu set itu adalah *tertutup* jika pelengkapnya terbuka. Perhatikan, jika $A \subset X$, maka *tutupan* bagi set A adalah set tertutup terkecil yang mengandungi A. Sementara *pedalaman* bagi set A adalah set terbuka terbesar yang terkandung di dalam A. *Tutupan bagi A* disimbolkan dengan $tp(A)$ sementara *pedalaman* bagi A pula disimbolkan dengan $pd(A)$.

Subset $A \subset X$ dikatakan *semi-terbuka* jika wujud suatu set terbuka $U \subset X$ sehingga berlaku $U \subset A \subset tp(U)$. Sementara itu subset $A \subset X$ dikatakan *semi-tertutup* jika wujud suatu set tertutup $V \subset X$ sehingga berlaku $pd(V) \subset A \subset V$ .Perhatikan bahawa, jika A adalah set semi-terbuka di dalam X, maka pelengkapnya, (X-A) adalah set semi-tertutup. Kelas bagi semua set semi-terbuka bagi X disimbolkan dengan SB(X), manakala bagi set semi-tertutup pula adalah ST(X). Berdasarkan Levine [1], setiap set terbuka itu merupakan set semi-terbuka dan setiap set tertutup itu merupakan set semi-tertutup.

Set *semi-tutupan* bagi A merupakan set semi-tertutup terkecil yang mengandungi A, disimbolkan sebagai stp(A). Begitu pula set *semi-pedalaman* bagi A merupakan set semi-terbuka terbesar yang terkandung di dalam A, disimbolkan sebagai spd(A).

Fungsi memainkan peranan yang berpengaruh di dalam kajian ini. Misalkan (X, τ) dan (Y, σ) adalah dua ruang topologi. Maka fungsi $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ dikatakan *selanjar pada* $a \in X$ jikka $f(a) \in G \in \sigma$ mengimplikasikan wujud suatu $A \in \tau$ sehingga $a \in A$ dan $f(A) \subset G$. Fungsi f dikatakan *selanjar* jika f selanjar pada setiap $a \in X$. Perhatikan bahawa bentuk setara bagi f selanjar adalah praimej bagi setiap set terbuka (tertutup) di dalam Y adalah terbuka (tertutup) di dalam X.

Fungsi f dinamakan *fungsi terbuka* jika imej bagi set terbuka di dalam X adalah terbuka di dalam Y. Begitu pula, suatu fungsi itu dinamakan *fungsi tertutup* jika imej bagi set tertutup di dalam X adalah tertutup di dalam Y. Levine [1] telah mentakrifkan fungsi *semi-selanjar* sebagai suatu fungsi yang praimej bagi setiap subset terbuka di dalam Y adalah semi-terbuka di dalam X. Perhatikan bahawa setiap fungsi selanjar selalu merupakan fungsi semi-selanjar.

Suatu fungsi itu dinamakan *fungsi semi-terbuka* jika untuk setiap subset terbuka di dalam X mengimplikasikan imejnya juga semi-terbuka di dalam Y. Perhatikan bahawa setiap fungsi terbuka selalu merupakan fungsi semi-terbuka. Begitu pula kita akan memperoleh *fungsi semi-tertutup* dengan menggantikan set terbuka dan set semi-terbuka pada takrif fungsi semi-terbuka dengan set tertutup dan set semi-tertutup, iaitu untuk setiap A subset tertutup di dalam X, maka imejnya, f(A), adalah semi-tertutup di dalam Y. Lihat umpamanya Reilly & Vamanamurthy [4], Noiri [3].

3 S-Normal

Dalam bahagian ini, kami akan kembangkan penyesuaian idea yang selari dengan pembinaan konsep s-sekata dari konsep sekata kepada konsep s-normal dari konsep normal. Merujuk kepada takrif ruang normal, kami akan melakukan sedikit penyesuaian dengan mengekalkan syarat subset tertutup, tetapi akan menggantikan syarat kewujudan subset terbuka dengan subset semi-terbuka.

Takrif 3.1: Ruang topologi (X, τ) dinamakan *ruang s-normal* jika untuk setiap F_1 dan F_2 subset tertutup yang tak bercantum di dalam X, wujud G_1 dan G_2 semi-terbuka di dalam X sehingga $F_1 \subset G_1$ dan $F_2 \subset G_2$

Langsung daripada takrif normal , s-normal dan sifat bahawa set tertutup selalu merupakan set semi-tertutup, maka didapati hieraki kedudukan berikut.

Teorem 3.2: *Setiap ruang normal merupakan s-normal.*

Sekarang akan diberikan pencirian bagi s-normal dengan memberikan pernyataan yang setara dengan sifat s-normal.

Teorem 3.3: *Dalam ruang X, pernyataan berikut adalah setara :*

1. *X adalah ruang s-normal.*
2. *Untuk setiap A subset tertutup di dalam X, dan untuk setiap U subset terbuka di dalam X dengan $A \subset U$, wujud suatu $V \in SB(X)$ sehingga $A \subset V \subset$ stp(V)$\subset U$.*
3. *Untuk setiap A,B subset tertutup yang tak bercantum di dalam X, wujud suatu $K \in ST(X)$ sehingga $B \subset K (K \neq B)$ dan $A \cap K = \phi$*

Bukti: $(1 \Rightarrow 2)$. Misalkan X ruang s-normal. Misalkan A subset tertutup di dalam X dan U subset terbuka di dalam X dengan $A \subset U$. Oleh itu X-U adalah subset tertutup dan $A \cap (X - U) = \phi$. Oleh kerana X s-normal, wujud G_1,$G_2 \in SB(X)$ sehingga $A \subset G_1$, $(X - U) \subset G_2$ dan $G_1 \cap G_2 = \phi$. Oleh itu akan diperolehi $G_1 \subset X - G_2 \subset U$. Perhatikan bahawa $A \subset G_1 \subset stp(G_1) \subset stp(X - G_2) = X - G_2 \subset U$. Ambil $V = G_1$. Maka diperolehi $A \subset V \subset stp(V) \subset U$ sehingga (2) berlaku.

$(2 \Rightarrow 3)$. Misalkan (2) berlaku dan misalkan A,B dua subset tertutup tak bercantum di dalam X. Perhatikan bahawa $A \subset (X - B)$ dan (X-B) terbuka. Berdasarkan (2), wujud $V \in SB(X)$

sehingga $A \subset V \subset stp(V) \subset (X - B)$. Perhatikan bahawa $B \subset X$-$stp(V) \subset X - V$ dengan $X - V \in ST(X)$ dan $X - V \neq B$. Misalkan $K = (X - V)$. Maka $K \in ST(X)$ dan $B \subset K$. Oleh kerana $A \subset V$, maka $A \cap K = A \cap (X - V) = \phi$. Oleh itu wujud $K \in ST(X)$ sehingga $B \subset K(K \neq B)$ dan $K \cap A = \phi$. Dengan itu (3) berlaku.

$(3 \Rightarrow 1)$. Misalkan (3) berlaku dan misalkan F_1 dan F_2 dua subset tertutup yang tak bercantum di dalam X. Berdasarkan (3),wujud $K \in ST(X)$ sehingga $F_2 \subset (K \neq F_2)$ dan $F_1 \cap K = \phi$. Perhatikan bahawa $(X - K) \in SB(X)$. Ambil $G_1 = X - K$ sehingga $G_1 \in SB(X)$ dan $F_1 \subset G_1$. Perhatikan bahawa spd(K)$\in SB(X)$. Ambil $G_2 = spd(K)$ sehingga $G_2 \in SB(X), F_2 \subset spd(K) = G_2$ dan $G_1 \cap G_2 = \phi$. Oleh itu, (1) berlaku. □

Seperti yang diketahui, sifat warisan bagi ruang normal tidak selalu berlaku lagi. Hal yang sama juga berlaku pada ruang s-normal. Namun demikian, jika diberikan syarat tambahan kepada subruang di dalam ruang s-normal, kami boleh memperoleh hasil yang dikehendaki.

Teorem 3.4: *Setiap subruang tertutup yang juga semi-terbuka bagi ruang s-normal adalah juga s-normal.*

Bukti: Misalkan X adalah ruang s-normal, B subruang tertutup yang juga semi-terbuka di dalam X. Misalkan A_1 dan A_2 adalah subset tertutup di dalam B. Perhatikan ia juga tertutup di dalam X. Oleh kerana X s-normal, wujud $U, V \in SB(X)$ sehingga $A_1 \subset U, A_2 \subset V$ dan $U \cap V = \phi$. Misalkan $U_1 = (U \cap B)$ dan $U_2 = (V \cap B)$. Maka jelas bahawa $A_1 \subset U_1$ dan $A_2 \subset U_2$ dengan U_1 dan U_2 adalah set semi-terbuka yang tak bercantum di dalam B. Maka B ruang s-normal. □

Oleh sebab fungsi memainkan peranan yang penting di dalam topologi, maka untuk kajian selanjutnya, kami akan membincangkan mengenai pengaruh fungsi terhadap ruang s-normal sebagaimana Noiri [3] dan Levine [1] lakukan terhadap set semi-terbuka.

Teorem 3.5: [3]Jika $f : X \to Y$ fungsi semi-selanjar terbuka, maka $f^{-1}(B) \in SB(X)$ untuk setiap $B \in SB(Y)$.

Berdasarkan sifat fungsi semi-selanjar terbuka seperti di dalam Teorem 3.5, akan ditunjukkan sifat berikut.

Teorem 3.6: *Jika Y adalah ruang s-normal, X ruang topologi dan $f : X \to Y$ fungsi semi-selanjar terbuka ke seluruh, maka X adalah ruang s-normal*

Bukti: Misalkan F_1,F_2 subset tertutup tak bercantum di dalam X. Oleh itu $(X - F_1)$ dan $(X - F_2)$ terbuka di dalam X. Oleh sebab f terbuka, diperoleh $f(X - F_1)$ dan $f(X - F_2)$ terbuka di dalam Y. Perhatikan yang f ke seluruh sehingga $f(X - F_1) = f(X) - f(F_1) = Y - f(F_1)$ dan $f(X - F_2) = f(X) - f(F_2) = Y - f(F_2)$. Dengan itu $f(F_1)$ dan $f(F_2)$ tertutup di dalam Y dan $f(F_1) \cap f(F_2) = f(F_1 \cap F_2) = \phi$. Oleh sebab Y s-normal, wujud $G_1, G_2 \in SB(Y)$ sehingga $f(F_1) \subset G_1, f(F_2) \subset G_2$ dan $G_1 \cap G_2 = \phi$.Perhatikan yang f semi selanjar terbuka dan dengan Teorem 3.5., maka $f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \in SB(X)$ sehingga

$F_1 \subset f^{-1}(G_1)$, $F_2 \subset f^{-1}(G_2)$ dan $f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = f^{-1}(G_1 \cap G_2) = \phi$. Maka X ruang s-normal. $\square$

Oleh sebab setiap ruang normal merupakan ruang s-normal, maka diperoleh korolari berikut dengan natijah kepada Teorem 3.6.

Natijah 3.7: *Jika Y adalah ruang normal, X ruang topologi dan $f : X \to Y$ fungsi semi-selanjar terbuka ke seluruh, maka X adalah ruang s-normal.*

Levine [1] telah melihat sifat imej set semi-terbuka di bawah fungsi selanjar dan pedalaman.

Teorem 3.8: [1] Misalkan $f : X \to Y$ fungsi selanjar dan pedalaman. Jika $A \in SB(X)$, maka $f(A) \in SB(Y)$.

Teorem 3.6. telah membincangkan Y sebagai ruang s-normal. Sekarang kami akan membincangkan bagaimana jika X pula dijadikan ruang s-normal dan f fungsi selanjar dan pedalaman seperti dalam Teorem 3.8.

Teorem 3.9: *Jika X adalah ruang s-normal, Y ruang topologi dan $f : X \to Y$ fungsi selanjar dan pedalaman, maka Y adalah ruang s-normal.*

Bukti: Misalkan A,B subset tertutup tak bercantum di dalam Y. Perhatikan yang f selanjar mengimplikasikan $f^{-1}(A)$ dan $f^{-1}(B)$ tertutup tak bercantum di dalam X. Oleh sebab X s-normal, maka wujud $U, V \in SB(X)$ sehingga $f^{-1}(A) \subset U$, $f^{-1}(B) \subset V$ dan $U \cap V = \phi$. Perhatikan yang f selanjar dan pedalaman. Oleh itu dengan Teorem 3.8., $f(U), f(V) \in SB(Y)$ sehingga $A \subset f(U)$,$B \subset f(V)$ dan $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = \phi$. Maka Y ruang s-normal. $\square$

Dengan alasan yang serupa seperti Natijah 3.7, diperoleh sifat berikut sebagai natijah kepada Teorem 3.9.

Natijah 3.10: *Jika X adalah ruang normal, Y ruang topologi dan $f : X \to Y$ fungsi selanjar dan pedalaman, maka Y adalah ruang s-normal.*

Sekarang perhatikan jika kami menguatkan X ruang s-normal itu kepada ruang normal dan melemahkan syarat pedalaman bagi fungsi di dalam Teorem 3.9 kepada semi-terbuka, maka akan diperoleh teorem seperti yang berikut.

Teorem 3.11: *Jika X adalah ruang normal, Y ruang topologi dan $f : X \to Y$ fungsi selanjar dan semi-terbuka, maka Y adalah ruang s-normal.*

Bukti: Misalkan A,B subset tertutup tak bercantum di dalam Y. Perhatikan yang f selanjar mengimplikasikan $f^{-1}(A)$ dan $f^{-1}(B)$ tertutup tak bercantum di dalam X. Oleh sebab X adalah ruang normal, maka wujud U, V subset terbuka di dalam X sehingga $f^{-1}(A) \subset U$, $f^{-1}(B) \subset V$ dan $U \cap V = \phi$. Dengan takrif semi-terbuka, maka $f(U), f(V) \in SB(Y)$ sehingga $A \subset f(U)$, $B \subset f(V)$ dan $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = \phi$. Oleh itu Y adalah ruang s-normal. $\square$

Rujukan

[**1**] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces,* Amer. Math. Monthly **70**(1): 36-41, 1963.

[**2**] S. N. Maheshwari & R. Prasad, *On s-regular spaces,* Glas Mat Ser **10**(30): 347-350, 1975.

[**3**] T. Noiri, *A generalization of closed mappings,* Atti. Accad. Naz. Lincei Rend Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **54**(8): 412-415, 1973.

[**4**] I.L. Reilly & M.K. Vamanamurthy, *On α-continuity in topological spaces,* Acta. Math Hung **45**(1-2): 27-32, 1985.