Matematika, 2002, Jilid 18, bil. 2, hlm. 129–136

Penganggaran Parameter bagi Model BL$(p, 0, 1, 1)$ dengan Pendekatan Bayesian

Ibrahim Mohamed
Institut Sains Matematik,
Universiti Malaya, 50603 Kuala Lumpur
q1brahim@umcsd.um.edu.my

Azami Zaharim
Fakulti Sains Kuantitatif dan Teknologi Maklumat,
Universiti Teknologi MARA,
4000 Shah Alam
azami@tmsk.itm.edu.my

Mohd Sahar Yahya
Pusat Asasi Sains Universiti Malaya
50603 Kuala Lumpur
q1sahar@umcsd.um.edu.my

Abstrak Model bilinear merupakan salah satu model tak linear bagi data siri masa dan diwakili oleh BL(p, q, r, s). ARMA merupakan kes khas apabila r dan s mengambil nilai sifar. Model ini dipercayai sesuai digunakan ke atas data hidrologi dan meteorologi. Beberapa kaedah telah disarankan untuk menganggar kesemua parameter bagi model ini. Di dalam kertas kerja ini, kaedah bayesian digunakan untuk membuat penganggaran parameter. Walau bagaimanapun, ia memerlukan maklumat berkenaan dengan reja terdahulu. Oleh itu, kaedah kuasa dua ralat terkecil tak linear digunakan. Set data sunspot digunakan sebagai ilustrasi.

Katakunci Bilinear, Bayesian, siri masa tak linear, Taburan prior tak tentu Jeffrey

Abstract *Bilinear model is one of the nonlinear models for time series data, which is denoted by BL(p, q, r, s). The ARMA model is a special case of Bilinear model when the value r and s are zero. This model is believed to suit best for hydrology and meteorology data. A few estimation methods have been suggested to estimate the parameters. In this paper, the bayesian approach is used. But the residual must be known first. For that the Least Square methods is chosen. The sunspot data is used as an illustration.*

Keywords *Bilinear, Bayesian, nonlinear time series, Jeffreys' prior distribution*

1 Pengenalan

Kebanyakan penyelidikan pemodelan data siri masa menggunakan model-model linear seperti model autoregresi (AR), model purata bergerak (MA) ataupun gabungan kedua-duanya. Model-model tersebut sesuai digunakan jika data yang diperolehi mempunyai ciri-ciri data linear. Tetapi wujud data siri masa tak linear seperti data sunspot (Box dan Jenkin [1]), data lynx (Campbell [4]) dan kebanyakan data hidrologi. Justeru itu, kita memerlukan model siri masa tak linear.

Beberapa model tak linear telah tersedia ada termasuk model autoregresi eksponen, model threshold dan model bilinear. Di dalam kertas kerja ini, kita hanya akan mempertimbangkan model bilinear kerana ia dipercayai sesuai untuk data hidrologi. Beberapa kaedah telah dicadangkan untuk mendapatkan parameter bagi model bilinear yang diwakili oleh BL(p, q, r, s). Priestly [14] menggunakan kaedah kebolehjadian maksimum melalui proses Newton-Raphson bagi mendapatkan anggaran parameter. Kim *et al* [10] membandingkan hasil anggaran melalui kaedah momen dan kuasa dua ralat terkecil di mana artikel ini juga membincangkan statistik inferen bagi kedua-dua kaedah tersebut melalui proses bootstrap. Gabr [6] pula mencadangkan kaedah rekursif dan kemudiannya pada [7] menggunakan prosedur Monte-Carlo bagi mendapatkan anggaran parameter yang diberikan oleh kaedah ralat kuasa dua terkecil.

Kaedah penganggaran menggunakan Bayesian bermula dengan aplikasi ke atas model linear. Broemelling [3] memberikan kupasan yang lengkap. Ia kemudiannya digunakan ke atas model tak linear, sebagai contoh Harrison and Steven [9], Winkler [18] dan Muller *et al* [13]. Bagi model bilinear, Monahan [12] mencadangkan satu prosedur komputer yang sangat intensif bagi menggunakan pendekatan Bayesian sepenuhnya. Chen [5] pula mencadangkan penggunaan Prior Tak Tentu apabila kita hampir tiada maklumat penting tentang data yang diselidiki.

Dalam kertas ini, kita akan menggabungkan kaedah yang dicadangkan oleh Priestly [14] dan Chen [5] bagi menganggarkan parameter BL$(p, 0, 1, 1)$. Data sunspot akan digunakan sebagai ilustrasi.

2 Metodologi

Model bilinear, diwakili oleh BL(p, q, r, s), diberikan seperti di bawah :

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e_{t-j} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \beta_{kl} y_{t-k} e_{t-l} + e_t \tag{1}$$

di mana $e_t \sim N(0, \tau^{-1})$ sementara ϕ_i, θ_j dan β_{kl} adalah pekali bagi model dan mengambil sebarang nilai nyata. Anggap bahawa $y_1, y_2, \cdots, y_n$ adalah cerapan yang diketahui dan $e_{p_1} = e_{p_1-1} = e_{p_1-2} = \cdots = e_{p_1+1-q_1} = 0$ di mana $p_1 = \text{mak}(p, r)$ dan $q_1 = \text{mak}(q, s)$. Biarkan $\Theta = \{\phi_i, \theta_j, \beta_{kl}\} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ di mana $n = p + q + rs$. Merujuk kepada (1), dua komponen utama model adalah sama seperti model linear ARMA, komponen model ketiga adalah komponen tak linear. Justeru itu, kita dapati ARMA adalah kes khas kepada model bilinear.

Pendekatan Bayesian digunakan untuk menganggar parameter model ini. Oleh itu, kita perlu menentukan taburan prior, $\pi(\theta, \tau)$, dan fungsi kebolehjadian, $L(\phi, \theta, \beta, \tau \backslash\ s_n)$, untuk dipadankan di dalam teorem Bayes seperti berikut :

$$\pi\left(\phi, \theta, \beta, \tau | S_n\right) \propto L\left(\phi, \theta, \beta, \tau \backslash \ s_n\right) \times \pi(\theta, \tau) \tag{2}$$

bagi menghasilkan taburan posterior,$\pi\left(\phi, \theta, \beta, \tau | S_n\right)$.

Telah dianggapkan di atas bahawa $e_t \sim N\left(0, \tau^{-1}\right)$, maka Fungsi kebolehjadian bagi $\phi, \theta, \beta, \tau$ diberi s_n boleh diperolehi dengan mudah seperti berikut :

$$L\left(\phi, \theta, \beta, \tau \backslash \ s_n\right) \propto \tau^{\frac{n-p_1}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} \sum_{p_1+1}^{n} e_t^2\right\} \tag{3}$$

di mana e_t diperoleh dari (1). Bagi taburan prior pula, kita menganggap bahawa maklumat yang diketahui mengenai data yang ingin dianalisa adalah sedikit. Justeru itu, taburan prior yang digunakan ialah taburan Prior Tak Tentu Jeffrey yang diberikan seperti di bawah :

$$\pi\left(\theta, \tau\right) \propto \frac{1}{\tau}, \qquad \theta \in R^P, \tau > 0 \tag{4}$$

Kesan daripada penggunaan (4) di dalam teorem Bayes ialah taburan posterior yang dihasilkan melalui Teorem Bayes akan lebih dipengaruhi oleh fungsi kebolehjadian.

Boleh ditunjukkan bahawa jika persamaan (3) dan (4) digunakan di dalam Teorem Bayes (2), maka taburan posterior bagi kes ini ialah taburan Normal-Gamma, rujuk Broemeling [3]. Oleh itu, taburan sut bagi Θ adalah taburan multivariat t dengan darjah kebebasan $n-p_1$. Oleh itu, mean vektor dan matriks kejituan mudah diperolehi. Begitu juga, dengan melakukan kamiran ke atas fungsi taburan posterior terhadap Θ, boleh ditunjukkan bahawa taburan sut bagi τ ialah taburan Gamma, rujuk Bernardo *et al* [2000]. Proses ini boleh dirumuskan di dalam Rajah 1.

Bagi membuat telahan masa hadapan, boleh ditunjukkan bahawa taburan hampiran telahan bayesian bagi Y_{n+1} dengan menggunakan taburan prior Jeffreys ialah univariat t dengan darjah kebebasan $n-p_1-p-q-rs$. Oleh itu, nilai min dan varians bagi taburan ini digunakan bagi membuat telahan-satu-langkah-kehadapan dan seterusnya mencari selang keyakinan.

Merujuk semula kepada model bilinear (1), dua maklumat diperlukan sebelum model bilinear boleh diperolehi iaitu set data $y_1, y_2, \cdots, y_n$ dan nilai reja $e_{p_1+1}, e_{p_1+2}, \cdots, e_n$. Untuk memperolehi nilai reja tersebut, kita akan menggunakan kaedah kuasa dua ralat terkecil tak linear dengan objektif untuk meminimumkan persamaan

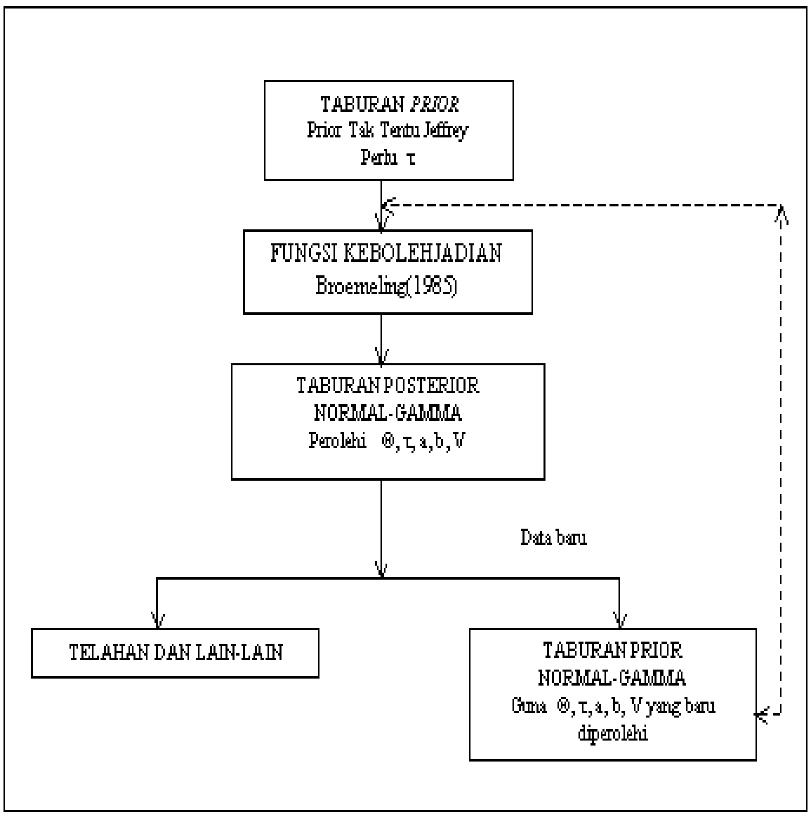
$$Q(\Theta) = \sum e_t^2 \tag{5}$$

di mana e_t diperolehi dari (1). Proses ini dilakukan melalui persamaan lelaran Newton-Raphson berikut :

$$\Theta^{(i+1)} = \Theta^{(i)} - H^{-1}\left(\Theta^{(i)}\right) G\left(\Theta^{(i)}\right) \tag{6}$$

di mana $\Theta^{(i)}$ adalah vektor bagi anggaran parameter pada lelaran ke-i, G adalah vektor gradient dan H adalah matriks Hessian yang diberikan oleh

$$G\left(\Theta\right) = \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta_1}, \cdots, \frac{\partial Q}{\partial \theta_n}\right] \tag{7}$$



Rajah 1: Carta aliran asas bagi prosedur Bayesian

$$H(\Theta) = \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \tag{8}$$

Justeru itu, pembezaan sehingga peringkat kedua perlu dilakukan. Keputusan boleh diperolehi dengan menganggap syarat awal berikut adalah benar:

$$e_t = \frac{\partial e_t}{\partial \theta_i} = \frac{\partial^2 e_t}{\partial \theta_i^2} \qquad \text{bagi } t = 1, 2, \ldots, \gamma \qquad \text{dan } i = 1, \ldots, n$$

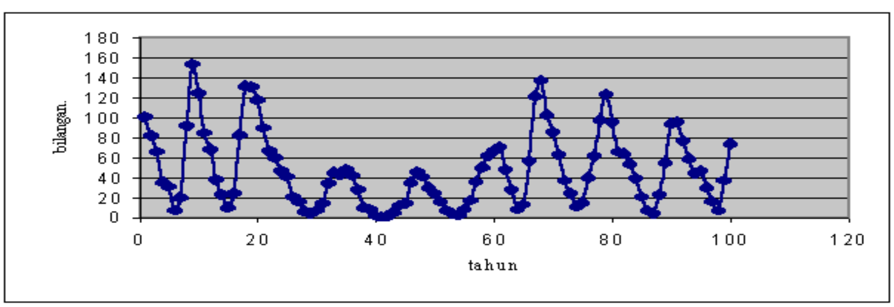
di mana $\gamma = \text{mak}(p, q, r, s)$.

Walau bagaimanapun, bagi menggunakan kaedah Newton-Raphson di atas, kita perlu menentukan nilai awalan proses lelaran ini. Untuk itu, bagi BL$(p, 0, 1, 1)$, kita akan terlebih dahulu memadankan model AR(p) ke atas data $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dan seterusnya menggunakan pekali AR yang diperolehi sebagai nilai awalan bagi $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ di dalam model bilinear dan membiarkan nilai awalan bagi β_{11} sebagai sifar.

Secara amnya, terdapat tiga langkah yang diambil di dalam prosedur Bayesian yang dicadangkan. Pertama, kita menggunakan model AR(p) untuk mendapatkan nilai awalan bagi kaedah Newton-Raphson. Kedua, kita gunakan anggaran parameter daripada kaedah kuasa dua ralat terkecil tak linear untuk mendapatkan anggaran reja $e_{p_1+1}, e_{p_1+2}, \ldots, e_n$. Ketiga, barulah prosedur bayesian yang dicadangkan di dalam Rajah 1 digunakan untuk mendapatkan anggaran parameter model bilinear menggunakan pendekatan bayesian. Seterusnya, pelbagai proses lain boleh diambil termasuk membuat telahan masa depan.

3 Ilustrasi

Sebagai ilustrasi, set data sunspot yang bersaiz 100 akan digunakan. Data ini boleh diperolehi di dalam Box and Jenkin [1]. Beberapa artikel seperti Granger dan Andersen [8] dan Subba Rao [17] telah menunjukkan bahawa model bilinear adalah lebih sesuai berbanding dengan model linear lain seperti model AR. Data ini dipaparkan di dalam Rajah 2.



Rajah 2: Plot bagi data sunspot

Jadual 1: Hasil output bagi BL(1,0,1,1)

	Operasi Newton-raphson				Prosedur Bayesian		Telahan y_{n+1}	Nilai sebenar y_{n+1}	sisihan piawai telahan	AIC
	Nilai permulaan		Nilai akhir		Nilai akhir					
Model	ϕ_1	β_{11}	β_{11}	ϕ_1	β_{11}	ϕ_1				
spot49	0.902	0	0.834	0.011	0.811	0.001	25.74	24	22.71	380.74
spot60	0.914	0	0.856	0.011	0.840	0.001	60.69	71	21.21	458.36
spot74	0.909	0	0.877	0.010	0.833	0.001	9.37	15	22.25	578.71
spot90	0.925	0	0.903	0.010	0.875	0.001	87.93	96	22.91	709.24

Jadual 2: Hasil output bagi BL(2,0,1,1)

Model	Operasi Newton-raphson						Prosedur Bayesian			$\hat{y}_{n+1}$	y_{n+1}	sisihan piawai telahan	AIC
	Nilai awal			Nilai akhir			Nilai akhir						
	ϕ_1	ϕ_2	β_{11}	ϕ_1	ϕ_2	β_{11}	ϕ_1	ϕ_2	β_{11}				
spot49	1.445	−0.566	0	1.193	−0.311	0.010	1.768	−0.697	−0.002	21.69	24	18.21	379.59
spot60	1.468	−0.581	0	1.243	−0.345	0.010	1.800	−0.715	−0.002	64.20	71	16.56	459.57
spot74	1.478	−0.598	0	1.331	−0.437	0.008	2.040	−0.816	−0.003	2.075	15	16.06	585.35
spot90	1.514	−0.623	0	1.323	−0.424	0.009	2.026	−0.817	−0.003	107.97	96	16.71	717.97

Jadual 1 dan Jadual 2 memberikan keputusan bagi BL(1,0,1,1) dan BL(2,0,1,1) masing-masing berdasarkan prosedur yang dicadangkan di dalam kertas kerja ini. 'Spot49' di dalam lajur pertama bermaksud hanya 49 cerapan pertama di dalam set data sunspot dianalisis dan seterusnya.

Merujuk kepada Jadual 1, nilai di dalam lajur ke dua adalah nilai awal yang diperolehi daripada langkah pertama, iaitu, menggunakan model AR(1) ke atas data set asal sementara nilai permulaan bagi β_{11} pula dibiarkan sifar. Lajur keempat dan kelima adalah nilai akhir parameter yang diperolehi daripada operasi Newton-Raphson dan seterusnya digunakan untuk mencari anggaran bagi e_t. Lajur keenam dan ketujuh merupakan anggaran parameter apabila prosedur Bayesian digunakan sementara lajur kelapan memberikan telahan cerapan berikutnya dan boleh dibandingkan dengan nilai cerapan sebenar di lajur kesembilan. Lajur kesepuluh pula adalah nilai sisihan piawai bagi telahan dan lajur kesebelas adalah nilai Kriteria Maklumat Akaike (AIC) digunakan untuk menentukan model yang lebih baik. Begitu juga dengan maklumat bagi Jadual 2 kecuali bilangan ϕ_i yang bertambah. Daripada kedua-dua jadual di atas, kita dapati nilai telahan-satu-langkah-kehadapan memberikan nilai yang hampir dengan nilai sebenar. Tambahan pula, kesemuanya terletak di dalam selang keyakinan 99% masing-masing. Kesan yang sama juga boleh dilihat jika BL(3,0,1,1) digunakan ke atas kesemua data set di atas. Jika dilihat kepada nilai-nilai AIC, kita dapati sekurang-kurangnya salah satu model boleh dipilih sebagai model yang baik bagi setiap set data sunpot.

4 Rumusan

Prosedur yang dicadangkan didapati bersesuaian bagi model BL($p, 0, 1, 1$). Nilai telahan yang diberikan juga baik. Kajian seterusnya akan menumpukan sama ada prosedur ini bersesuaian bagi model BL($p, 0, r, s$). Pengubahsuaian prosedur dipercayai perlu dilakukan bagi menentukan nilai awal bagi operasi Newton-Raphson. Sebagai contoh, pertimbangkan BL(2,0,2,2). Bagi kes ini, kita sudah mempunyai empat pekali bagi komponen bilinear, iaitu, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}$ dan β_{22}, yang mengambil nilai sifar sebagai nilai awal. Perubahan yang bersesuaian diperlukan supaya telahan yang baik diperolehi.

Penghargaan

Projek ini adalah dibiayai di bawah projek IRPA-2000. Penulis pertama adalah pelajar ijazah lanjutan kepada penulis kedua dan ketiga.

Rujukan

[1] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Rev. Ed., Holden-day, San Francisco, CA, 1976.

[2] J. M. Bernardo, A. F. M. Smith, *Bayesian Theory*, Wiley, 2000.

[3] L. D. Broemeling, *Bayesian Analysis of Linear Models*. Marcel Dekker Inc., 1985.

[4] M. J. Campbell band A. M. Walker, *A survey of statistical work on the Mackenzie River series of annual Canadian lynx trappings for years 1821-1934, and a new analysis*, J. R. Statist. Soc. A, 140(1977), 411-431

[5] C. W. S. Chen, *Bayesian Inferences and Forecasting in Bilinear Time Series Models*, Commun. Statist. Theory Meth., 21(6)(1992), 1725-1743.

[6] M. M. Gabr, *Recursive Estimation of Bilinear Time Series Models*, Commun. Statist.-Theory Meth., 21(8)(1992), 2261-2277.

[7] M. M. Gabr, *Robust Estimation of Bilinear Time Series Models*, Commun. Statist.-Theory Meth., 27(1)(1998), 41-53.

[8] C.W.J. Granger and A.P. Andersen, *Introduction to bilinear time series models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1978.

[9] P. J. Harrison and C.F. Stegens, *Bayesian Forecasting (with discussion)*, J. R. statist. Soc. B, 38(1976), 205-47.

[10] W. K. Kim, L. Billard and I. V. Basawa, *Estimation for the First-order Diagonal Bilinear Time Series Model*, J. Time Series Analysis, 11(3)(1988), 215-229.

[11] R. R. Mohler, *Bilinear Control Process*, Academic Press, 1973.

[12] J. F. Monahan, *Fully Bayesian Analysis of ARMA Time Series Models*, Econometrics 21(1983), 307-331.

[13] P. Muller, M. West and S. MacEachern, *Bayesian Models For Non-linear Autoregressions*, J. Time Series Analysis, 18(6)(1996), 593-613.

[14] M. B. Priestly, *Non-linear models in time series analysis*, The Satistician, 27(1978), 159-176.

[15] B. G. Quinn, *Stationarity and invertibility of simple bilinear models*, Stochastic Processes and their Applications 12(1982), 225-230.

[16] J. D. Salas et al, *Applied Modelling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, 1980.

[17] T. Subba Rao, *On the Theory of Bilinear Time Series Models*, J. R. Statist. Soc. B, 43(2)(1981), 244-255.

[18] R. L. Winkler, *Prior Information, Predictive Distribution, and Bayesian Model-Building*, In Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics edited by *Arnold Zellner*, North-Holland Publishing Company, 1980.