Matematika, 2002, Jilid 18, bil. 2, hlm. 151–155

Ruang Semi-normal

Abu Osman bin Md Tap
Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains Dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE

Norazman bin Arbin
Fakulti Sains Dan Teknologi
Universiti Pendidikan Sultan Idris
35900 Tanjong Malim, Perak DR

Abstrak Konsep terbuka telah diperlemahkan kepada konsep semi-terbuka oleh Levine. Maheswari & Prasad telah mengkaji ruang s-sekata. Dengan memperlihatkan keselarian idea, Abu Osman & Norazman telah mengkaji ruang s-normal. Di samping itu, Dorsett telah mengkaji ruang semi-sekata. Kajian ini memperkenalkan konsep ruang semi-normal dan mengkaji sifat-sifatnya. Sifat kesetaraan bagi semi-normal diberikan. Sifat warisan hanya berlaku untuk subruang terbuka yang juga semi-tertutup. Akhirnya, pengaruh fungsi terhadap ruang semi-normal turut dikaji.

Katakunci Semi-terbuka, semi-tertutup, s-normal, semi-normal, semi-selanjar.

Abstract *Levine weakened the concept of open to semi-open. Maheswari & Prasad studied s-regular space. By the ideas of parallelism, Abu Osman & Norazman studied s-normal space. Dorsett studied the semi-regular space. In this paper, we look at the concept of semi-normal space and its properties. The equivalent property of semi-normal is given. The hereditary property holds only for open subspace which is also semi-closed. Finally the effect of function on the semi-normal space is studied.*

Keywords *Semi-open, semi-closed, s-normal, semi-normal, semi-continuous.*

1 Pendahuluan

Levine [4] telah mentakrifkan konsep *semi-terbuka* dan *semi-tertutup* berdasarkan pengoperasi tutupan dan pedalaman terhadap ruang topologi. Dalam hal ini setiap set terbuka merupakan set semi-terbuka dan setiap set tertutup pula merupakan set semi-tertutup. Ramai pengkaji telah mengubah suai beberapa konsep untuk ruang topologi dengan menggantikan set terbuka (tertutup) dengan set semi-terbuka (semi-tertutup). Sebagai contohnya, Maheswari & Prasad [5] telah mengkaji *ruang s-sekata* dan Dorsett [2] telah mengkaji *ruang semi-sekata.*

Melalui pengembangan dan keselarian idea, Abu Osman & Norazman [1] telah mengkaji *ruang s-normal* dengan mengubah suai syarat kewujudan set terbuka kepada set semi-terbuka. Sebagai lanjutannya, dalam kajian ini, kami perkenalkan pula konsep *semi-normal* dengan menggantikan syarat set tertutup dengan set semi-tertutup pula.

2 Beberapa Konsep Dasar

Dalam kajian ini selanjutnya, misalkan (X, τ) ruang topologi (ringkasnya ditulis X sahaja). Perhatikan bahawa setiap unsur τ adalah *set terbuka.* Suatu set itu adalah *tertutup* jika pelengkapnya terbuka. Perhatikan jika $A \subset X$, maka *tutupan* bagi set A adalah set tertutup terkecil yang mengandungi A. Sementara *pedalaman* bagi set A adalah set terbuka terbesar yang terkandung di dalam A. *Tutupan* bagi A disimbolkan dengan $\mathrm{tp}(A)$ sementara pedalaman bagi A disimbolkan dengan $\mathrm{pd}(A)$.

Subset $A \subset X$ dikatakan *semi-terbuka* jika wujud suatu set terbuka $U \subset X$ sehingga berlaku $U \subset A \subset \mathrm{tp}(U)$. Sementara itu subset $A \subset X$ dikatakan *semi-tertutup* jika wujud suatu set tertutup $V \subset X$ sehingga berlaku $\mathrm{pd}(V) \subset A \subset V$. Perhatikan bahawa jika A set semi-terbuka, maka pelengkapnya, $(X - A)$ merupakan set semi-terbuka. Kelas bagi semua set semi-terbuka bagi X disimbolkan dengan $\mathrm{SB}(X)$, manakala bagi set semi-tertutup pula dengan $\mathrm{ST}(X)$. Set *semi-tutupan* bagi A merupakan set semi-tertutup terkecil yang mengandungi A, disimbolkan dengan $\mathrm{stp}(A)$. Begitu pula set *semi-pedalaman* bagi A merupakan set semi-terbuka terbesar yang terkandung di dalam A, disimbolkan dengan $\mathrm{spd}(A)$.

Sekarang misalkan $(X, \tau), (Y, \sigma)$ dua ruang topologi dan $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$. Levine [4] juga telah mentakrifkan *fungsi semi-selanjar* sebagai suatu fungsi yang praimej bagi setiap set terbuka di dalam Y adalah semi-terbuka di dalam X. Perhatikan bahawa setiap fungsi selanjar senantiasa merupakan fungsi semi-selanjar. Selanjutnya, suatu fungsi itu dinamakan *fungsi semi-terbuka* jika untuk setiap subset terbuka di dalam X mengimplikasikan imejnya semi-terbuka di dalam Y. Begitu pula *fungsi semi-tertutup* diperoleh dengan menggantikan set terbuka dan set semi-terbuka pada takrif fungsi semi-terbuka dengan set tertutup dan set semi-tertutup, iaitu untuk setiap A set tertutup di dalam X, maka imejnya, $f(A)$, merupakan set semi-tertutup di dalam Y. Lihat umpamanya Noiri [6].

3 Semi-normal

Dalam Abu Osman & Norazman [1], kami telah melakukan penyesuaian terhadap takrif ruang normal dengan menggantikan syarat set terbuka dengan set semi-terbuka lalu menghasilkan ruang s-normal. Kini kami akan melakukan sedikit penyesuaian terhadap ruang s-normal pula dengan memperlemahkan syarat set tertutup kepada set semi-tertutup bagi mentakrifkan satu lagi jenis ruang topologi.

Takrif 1. Ruang topologi (X, τ) dinamakan *semi-normal* jikka untuk setiap F_1 dan F_2 subset semi-tertutup yang tidak bercantum di dalam X, wujud U dan V set semi-terbuka yang tak bercantum di dalam X sehingga $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$.

Langsung daripada takrif semi-normal, s-normal dan sifat bahawa set tertutup selalu merupakan set semi-tertutup, maka didapati hubungan berikut:

Teorem 1. *Setiap ruang semi-normal adalah ruang s-normal.*

Sekarang kami berikan pencirian semi-normal dengan pernyataan yang setara dengan sifat semi-normal.

Teorem 2. *Dalam ruang X, pernyataan berikut adalah setara :*

1. *X adalah ruang semi-normal.*
2. *Untuk setiap A subset semi-tertutup di dalam X, dan untuk setiap U subset terbuka di dalam X, yang mana $A \subset X$, wujud suatu $V \in SB(X)$ sehingga $A \subset V \subset stp(V) \subset U$.*
3. *Untuk setiap A, B subset semi-tertutup tak bercamtum di dalam X, wujud suatu $M \in ST(X)$ sehingga $B \subset M (M \neq B)$ dan $A \cap M \neq \emptyset$.*

Bukti. $(1 \Rightarrow 2)$. Misalkan X semi-normal. Misalkan $A \subset X$ subset semi-tertutup, $U \subset X$ subset semi-terbuka yang mengandungi A. Oleh itu, $X - U$ adalah subset semi-tertutup dan $A \cap (X - U) = \emptyset$. Oleh sebab X semi-normal, wujud $G_1, G_2 \in \mathrm{SB}(X)$ sehingga $A \subset G_1, X - U \subset G_2$ dan $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Oleh itu diperoleh $G_1 \subset X - G_2 \subset U$. Perhatikan yang,

$$A \subset G_1 \subset \mathrm{stp}\,(G_1) \subset \mathrm{stp}\,(X - G_2) = X - G_2 \subset U.$$

Ambil $V = G_1$. Maka diperoleh $A \subset V \subset \mathrm{stp}\,(V) \subset U$ sehingga (2) berlaku.

$(2 \Rightarrow 3)$. Misalkan (2) berlaku dan misalkan A, B dan *dua* subset semi-tertutup tak bercantum di dalam X. Perhatikan, $A \subset (X - B)$ dan $(X - B)$ semi-terbuka. Berdasarkan (2), wujud $V \in \mathrm{SB}(X)$ sehingga $A \subset V \subset \mathrm{stp}(V) \subset (X - B)$. Perhatikan bahawa, $B \subset X - \mathrm{stp}(V) \subset X - V$ dengan $X - V \in \mathrm{ST}(X)$ dan $X - V \neq B$. Misalkan $M = (X - V)$. Oleh itu $B \subset M$ dan $M \in \mathrm{ST}(X)$. Oleh sebab $A \subset V$, maka $A \cap M = A \cap (X - V) = \emptyset$. Dengan itu wujud $M \in \mathrm{ST}(X)$ sehingga $B \subset M (M \neq B)$ dan $M \cap A = \emptyset$. Oleh itu (3) berlaku.

$(3 \Rightarrow 1)$. Misalkan (3) berlaku dan misalkan F_1 dan F_2 dua subset semi-tertutup yang tak bercantum di dalam X. Berdasarkan (3), wujud $M \in \mathrm{ST}(X)$ sehingga $F_2 \subset M (M \neq F_2)$ dan $F_1 \cap M = \emptyset$. Perhatikan bahawa $(X - M) \in \mathrm{SB}(X)$. Ambil $G_1 = X - M$ sehingga $G_1 \in \mathrm{SB}(X)$ dan $F_1 \subset G_1$. Perhatikan bahawa $\mathrm{spd}(M) \in \mathrm{SB}(X)$. Ambil $G_2 = \mathrm{spd}(M)$ sehingga $G_2 \in \mathrm{SB}(X)$, $F_2 \subset \mathrm{spd}(M) = G_2$ dan $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Oleh itu (1) berlaku.

Selanjutnya kami akan membincangkan pula ruang semi-normal ini daripada segi sifat warisannya. Sama seperti di dalam ruang normal dan ruang s-normal, didapati sifat warisan juga turut tidak selalu berlaku di dalam ruang semi-normal. Namun demikian jika diberikan syarat tambahan kepada subruang di dalam ruang semi-normal, kita boleh memperoleh hasil yang dikehendaki. Berikut kami berikan dahulu sifat yang akan diperlukan bagi membuktikan sifat tersebut.

Teorem 3. (Khan et al. [3]). *Jika V subset terbuka dan Q subset semi-terbuka, maka $V \cap Q$ adalah semi-terbuka.*

Teorem 4. (Khan et al. [3]). *Misalkan A dan B dua subset di dalam X sehingga $A \subset B$ dan $B \in ST(X)$. Jika $A \in ST(B)$, maka $A \in ST(X)$.*

Teorem 5. *Setiap subruang terbuka yang juga semi-tertutup bagi ruang semi-normal adalah juga semi-normal.*

Bukti. Misalkan X ruang semi-normal dan M subruang terbuka yang juga semi-tertutup di dalam X. Misalkan A dan B adalah subset semi-tertutup tak bercantum di dalam M. Berdasarkan Teorem 4, A dan B adalah subset semi-tertutup di dalam X. Oleh sebab X ruang semi-normal, wujud $G_1, G_2 \in \mathrm{SB}(X)$ yang tak bercantum sehingga $A \subset G_1, B \subset G_2$. Berdasarkan Teorem 3, maka $H_1 = G_1 \cap M$ dan $H_2 = G_2 \cap M$ merupakan subset semi-terbuka di dalam M dan $A \subset H_1, B \subset H_2$ dan $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Oleh itu M semi-normal.

Setelah mengkaji mengenai subruang bagi ruang semi-normal, kini kami akan fokuskan perbincangan yang seterusnya untuk melihat sejauh manakah pengaruh fungsi terhadap ruang semi-normal ini. Sebelum itu kami berikan dahulu teorem dari Noiri [6] dan Levine [4] yang akan digunakan seterusnya.

Teorem 6. (Noiri [6]). *Jika fungsi $f : X \to Y$ semi-selanjar terbuka, maka $f^{-1}(A)$ semi-terbuka di dalam X untuk setiap A semi-terbuka di dalam Y dan $f^{-1}(B)$ semi-tertutup di dalam X untuk setiap B semi-tertutup di dalam Y.*

Teorem 7. (Levine [4]). *Misalkan $f : X \to Y$ fungsi selanjar dan pedalaman. Jika $A \in SB(X)$, maka $f(A) \in SB(Y)$.*

Teorem 8. *Misalkan Y ruang topologi, $f : X \to Y$ fungsi semi-selanjar terbuka serta selanjar dan pedalaman. Jika X adalah ruang semi normal, maka Y adalah ruang semi-normal.*

Bukti. Misalkan A, B adalah subset semi-tertutup tak bercantum di dalam Y. Oleh kerana f semi-selanjar terbuka, berdasarkan Teorem 6, $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathrm{ST}(X)$ dengan $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$. Oleh sebab X ruang semi-normal, wujud $U, V \in \mathrm{SB}(X)$ sehingga $f^{-1}(A) \subset U, f^{-1}(B) \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$. Oleh sebab f selanjar dan pedalaman, berdasarkan Teorem 7, $f(U), f(V) \in \mathrm{SB}(Y)$ sehingga $A \subset f(U), B \subset f(V)$ dan $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = \emptyset$. Maka Y adalah ruang semi-normal.

Perhatikan bahawa, jika X ruang semi-normal digantikan dengan Y sebagai ruang semi-normalnya dan dengan memperlemahkan syarat pada Teorem 8., kami akan mendapat teorem seperti yang berikut.

Teorem 9. *Misalkan X adalah ruang topologi, $f : X \to Y$ fungsi semi-tertutup dan semi-selanjar terbuka. Jika Y adalah ruang semi-normal, maka X adalah ruang s-normal.*

Bukti. Misalkan A, B adalah subset tertutup tak bercantum di dalam X. Berdasarkan takrif semi-tertutup, $f(A), f(B) \in \mathrm{ST}(Y)$ dengan $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = \emptyset$. Oleh sebab Y ruang semi-normal, wujud $U, V \in \mathrm{SB}(Y)$ sehingga $f(A) \subset U, f(B) \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$. Oleh kerana f semi-selanjar terbuka, berdasarkan Teorem 6, $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathrm{SB}(X)$ sehingga $A \subset f^{-1}(U), B \subset f^{-1}(V)$ dan $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. Maka X adalah ruang s-normal.

4 Penutup

Dalam kajian ini, kami telah memperlihatkan bagaimana pengubah suaian syarat set tertutup kepada set semi-tertutup dapat menghasilkan keputusan yang selari. Dalam kesempatan lain, boleh pula difikirkan pelbagai pengubahan suaian syarat kepada bentuk lain seperti pra-tertutup, semi-pra-tertutup atau pun kuasi-tertutup.

Rujukan

[1] Abu Osman bin Md Tap & Norazman bin Arbin, *Ruang S-Normal,* Diserah pada Jurnal Matematika UTM(2001)

[2] C. Dorsett, *Semi-regular spaces,* Soochow J. Math. 8(1982), 45-53.

[3] M. Khan, T. Noiri & B. Ahmad, *On s*-regular and extremally disconnected spaces,* Bull. Malaysian Math. Soc. 20(2)(1997), 39-46.

[4] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces,* Amer. Math. Monthly 70(1)(1963), 36-41.

[5] S.N. Maheshwari & R. Prasad, *On s-regular spaces,* Glasnik Mathematic 10(30)(1975), 347-350.

[6] T. Noiri, *A generalization of closed mappings,* Atti. Accad. Naz. Lincei Rend Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 54(8)(1973), 412-415.