

**Perbandingan Min Piawai dan Min Tercantas
dalam Carta CUSUM**
*(The Comparison between the Trimmed Mean CUSUM Chart
and the Standard Mean CUSUM Chart)*

¹Habshah Midi, ¹Azmi Jaafar & ²Lim Hock Ann

¹Jabatan Matematik, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia

²Kolej Teknologi IKRAM, Kuala Lumpur, Malaysia

Abstrak Kertas ini berkenaan dengan penilaian prestasi carta kawalan hasil tambah longgokan (CUSUM) teguh yang dinamakan Carta CUSUM Min Tercantas. Carta CUSUM biasa adalah berasaskan min sampel manakala carta CUSUM teguh berasaskan min tercantas. Beberapa siri simulasi telah dijalankan untuk membandingkan prestasi min tercantas dan min piawai dengan memeriksa nilai purata panjang larian (ARL) dan nisbah antara ARL dengan min dianjak dan ARL dengan min tidak dianjak. Keputusan menunjukkan di bawah proses normal, min tercantas adalah lebih baik bagi sampel bersaiz 5 dan CUSUM min piawai adalah sama baik dengan CUSUM min tercantas apabila saiz sampel bertambah. Walau bagaimana pun, min tercantas adalah lebih baik bagi proses yang amat pencong iaitu sampel disimulasi daripada taburan T Student dan Khi Kuasadua dengan 4, 6 dan 8 darjah kebebasan (dianjak dan diskalakan bagi menghasilkan min dan varians yang sama, iaitu $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$), prestasi min tercantas adalah lebih baik daripada min piawai.

Katakunci CUSUM teguh, min terpiawai, purata panjang larian, titik terpencil.

Abstract This paper is concerned with the assessment of the performance of a robust Cumulative Sum (CUSUM) chart, which is called the Trimmed CUSUM Chart. A standard CUSUM chart is based on standard mean whilst the robust CUSUM chart is based on the trimmed mean. A series of simulations have been carried out to compare the performance of trimmed mean and standard mean CUSUM procedures by looking at the values of the average run length (ARL) and the ratio between the ARL with a mean shift and ARL without. The results show that for normal process and a sample size of 5, the standard mean CUSUM performs better than the trimmed mean CUSUM, but their performances are equally well as sample size is increased. However, for data with one outlier and highly skewed process, which is sample are simulated from a Student T and Chi Square distributions with 4, 6 and 7 degree of freedom (suitably shifted and scaled to produce common mean and variance, i.e. $\mu = 0$ and $\sigma^2 = 1$), the trimmed mean seems to perform better than the standard mean CUSUM.

Keywords Robust CUSUM, trimmed mean, average run length, outlier.

1 Pengenalan

Carta Hasil tambah Longgokan atau lebih dikenali sebagai Carta CUSUM telah diperkenalkan pertama kali oleh Page [2] dan telah digunakan secara meluas dalam industri bagi mengawal kualiti barangan yang dikeluarkan. Ianya direkabentuk untuk mengesan anjakan kecil proses min daripada nilai min nominal. Perbincangan tentang carta CUSUM boleh didapati daripada Montgomery [7], Hawkins [3] dan Hawkins dan Olwell [4]. Katakan m sampel diambil daripada suatu proses, setiap satu bersaiz n dan ciri kualiti proses yang menarik perhatian pengeluar ditanda dengan

$$X_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Katakan $\bar{x}_j$ ialah purata proses bagi sampel ke i dan $\sigma_{\bar{x}}$ jika nilainya tidak diketahui dianggarkan dengan $\frac{S}{\sqrt{n}}$ dan jika μ_0 ialah min sasaran bagi proses, maka CUSUM C_i diberi oleh:

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{j=1}^i \frac{(\bar{x}_j - \mu_0)}{\sigma_{\bar{x}}} = \left(\frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\bar{x}_j - \mu_0)}{\sigma_{\bar{x}}} \\ &= \left(\frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \right) + C_{i-1} \end{aligned} \quad (1)$$

Bagi mengesan dengan cepat anjakan min, statistik CUSUM atas dan bawah digunakan, ditandakan dengan C_i^+ (atas) dan C_i^- (bawah)

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max \{0, C_i - k + C_{i-1}\} \\ C_i^- &= \max \{0, -k - C_i + C_{i-1}\} \end{aligned}$$

dengan nilai awal $C_0^+ = C_0^- = 0$ dan k adalah nilai rujukan iaitu

$$k = \frac{\delta\sigma}{2\sqrt{n}}$$

dan δ magnitud anjakan yang ingin dikesan.

Sekiranya wujud titik terpencil dalam sub kumpulan atau sampel, ia sepatutnya tidak menunjukkan tanda amaran bahawa anjakan min proses telah berlaku kerana titik terpencil tidak secara langsung mewakili sampel anjakan min. Carta CUSUM dalam (1) berasaskan kepada min sampel $\bar{x}$ dan sisihan piawai sampel s , sangat sensitif kepada kewujudan titik terpencil.

Sebagai alternatif, carta CUSUM teguh yang berasaskan min tercantas diperkenalkan dan dibincangkan didalam kertas ini. Kita mengharapkan prestasi CUSUM teguh menjadi lebih baik daripada CUSUM yang berasaskan min piawai kerana min tercantas adalah tidak sensitif kepada titik terpencil dan dapat mengurangkan kesannya keatas carta CUSUM.

Susunan kertas ini adalah seperti berikut. Bahagian 2 mempamerkan carta CUSUM teguh min tercantas. Kajian simulasi bagi membandingkan prestasi carta kawalan min biasa dan carta kawalan teguh dibincangkan pada bahagian 3. Bahagian 4 membincangkan ringkasan keputusan kajian ini.

2 Carta Kawalan Teguh Berasaskan Min Tercantas

Min tercantas adalah satu alternatif bagi pengiraan min biasa $\bar{x}$ (Langenberg dan Iglewicz [5]). Carta CUSUM teguh dibincangkan oleh James dan Ronald [6] dan Roche [8]. Roche menggantikan $\bar{x}$ dan $\sigma_{\bar{x}}$ dalam (1) dengan 25% min tercantas dan menganggarkan $\sigma_{\bar{x}}$ menggunakan

$$\hat{\sigma}_{T25} = \sqrt{\frac{SSW}{(g(g-1))}}$$

dengan SSW adalah hasil tambah kuasadua sekitar min bagi data yang ditilik semula (*revised*) dengan 25% cerapan terendah digantikan dengan nilai terkecil berikutnya dan 25% cerapan tertinggi digantikan dengan nilai tertinggi berikutnya. Manakala g mewakili bilangan data yang tidak diubah. Sebagai contoh, jika $n = 5$, maka satu versi 25% min tercantas mempunyai $g = 3$ dan

$$SSW = 2(X_{(2)} - \bar{x}_w)^2 + (X_{(3)} - \bar{x}_w)^2 + 2(X_{(4)} - \bar{x}_w)^2$$

dengan $\bar{x}_w = (2X_{(2)} + X_{(3)} + 2X_{(4)})/5$ dan $\hat{\sigma}_{T25} = \sqrt{\frac{SSW}{6}}$.

3 Kajian Simulasi

Untuk menilai prestasi CUSUM biasa dan CUSUM teguh, beberapa simulasi telah dijalankan dengan dua proses iaitu proses normal dan proses pencung. Bagi proses normal, lima cerapan telah dijanakan daripada taburan normal dengan min sifar dan varians 1, $N(0, 1)$. Proses pencung dijanakan dari taburan T, taburan Khi Kuasadua dan data dengan satu titik terpencil. Satu titik terpencil ini dijanakan daripada taburan normal dengan min sifar dan varians 25. Pada setiap langkah, satu cerapan “baik” dibuang dan digantikan dengan titik terpencil tersebut. Proses pencung, dengan min dan varians yang sama seperti proses normal (min sifar dan varians 1), dijana dengan taburan T berdarjah kebebasan 4, 6 dan 8 dan juga dijanakan dengan taburan Khi Kuasadua berdarjah kebebasan 4, 6 dan 8 (dianjak dan diskalakan bagi menghasilkan min dan varians yang sama). Bagi setiap kajian simulasi, min piawai dan 25% min tercantas bagi sampel 5, 7 dan 9 disiasat. Prestasi kedua-dua tatacara CUSUM ini dinilai dengan mengira nilai purata panjang larian, ARL (Montgomery [7] dan Roche [8] dan nisbah antara ARL dengan anjakan min dan ARL tanpa anjakan bagi anjakan min bersamaan 0, 0.5, dan 1. Nilai ARL yang diperoleh berdasarkan 10,000 larian simulasi. Purata panjang larian ditakrifkan sebagai bilangan sampel yang diperiksa sebelum ia memberi isyarat diluar kawalan. Nilai ARL ini sepatutnya tinggi jika proses min berada atau hampir kepada nilai nominal dan rendah sebaliknya. Keputusan kajian dipamerkan dalam Jadual 1, 2, 3 dan 4. Nilai dalam kurungan menunjukkan nisbah antara ARL dengan anjakan min dan ARL tanpa anjakan.

Bagi proses normal, saiz sampel $n = 5$, didapati bahawa prestasi CUSUM biasa adalah lebih baik sedikit daripada CUSUM teguh. CUSUM teguh memberikan amaran salah yang lebih daripada CUSUM biasa (ARL teguh = 55.6 lawan ARL biasa = 58.5) dan bertindakbalas kurang cepat terhadap perubahan dalam min proses. Ini dapat dilihat pada nisbah ARL CUSUM biasa apabila anjakan min adalah 1, nilai nisbah ARL tanpa anjakan adalah 24.7 kali ganda jika dibandingkan dengan kewujudan anjakan. Nisbah ARL CUSUM teguh

kurang baik iaitu pada tahap 22.0. Namun, apabila saiz sampel meningkat, iaitu $n = 7$ dan $n = 9$, prestasi bagi kedua-dua CUSUM adalah lebih kurang sama baiknya.

Dari keputusan dalam Jadual 2, menunjukkan bahawa kesemua nilai ARL dan nisbah ARL bagi CUSUM teguh lebih besar daripada nilai CUSUM biasa. Ini menunjukkan bahawa prestasi CUSUM teguh adalah lebih baik berbanding CUSUM biasa dengan kehadiran titik terpencil dalam data.

Daripada Jadual 3, kesemua ARL dan nisbah ARL bagi CUSUM teguh lebih besar daripada CUSUM biasa. Satu sifat menarik yang dapat diperhatikan ialah dengan meningkatkan darjah kebebasan bagi setiap sampel dari 4 ke 8, menurunkan nilai ARL bagi CUSUM teguh tanpa anjakan. Ini disebabkan varians bagi Taburan T menurun apabila darjah kebebasan meningkat.

Keputusan yang sama seperti taburan pencung yang lain dapat dilihat dalam Jadual 4. Prestasi CUSUM Teguh lebih baik daripada CUSUM biasa. Ini dibuktikan daripada hasil kajian ini dengan nilai ARL dan nisbah ARL CUSUM teguh sentiasa lebih besar daripada nisbah ARL CUSUM biasa bagi semua keadaan.

4 Kesimpulan

CUSUM biasa sangat sensitif kepada kewujudan titik terpencil dan juga bagi taburan pencung seperti taburan T dan Taburan Khi Kuasadua. Bagi data yang “baik” dan saiz sampel $n = 5$, prestasi CUSUM biasa adalah lebih baik sedikit daripada CUSUM teguh. Tetapi, apabila saiz meningkat prestasi kedua-dua CUSUM adalah lebih kurang sama. Namun kajian menunjukkan bahawa purata panjang larian (ARL) dan nisbah ARL bagi CUSUM teguh iaitu CUSUM yang berasaskan min tercantas sentiasa lebih besar daripada CUSUM biasa apabila terdapat titik terpencil dan taburan adalah pencung. Secara keseluruhannya dapatlah disimpulkan bahawa CUSUM teguh adalah lebih baik dari CUSUM biasa untuk keadaan titik terpencil dan taburan yang bukan normal.

Rujukan

- [1] A.J. Duncan, *Quality Control and Industry Statistics*, Richard Darwin Inc, Homewood, Illinois, 1974.
- [2] E.S. Page, *Continous Inspection Schemes*, Biometrika, 41 (1954), 100–115.
- [3] D.G. Hawkins, *Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool*, Quality Engineering, 5(3) (1993), 463–477.
- [4] D.G. Hawkins & D.V. Olwell, *Cumulative Sum Chart and Charting for Quality Improvement*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] P. Langenberg & B. Inglewicz, *Trimmed Mean $\bar{x}$ and R Charts*, Journal of Quality Technology, 18 (1986), 152–161.
- [6] J.M. Lucas & Ronald B. Crosier, *Robust CUSUM: A Robustness Study for CUSUM Quality Control Schemes*, Commun. Statist. Theory, 11 (1982), 2669–2687.
- [7] D.C. Montgomery, *Introduction to Quality Control*, John Wiley, New York, 1985.
- [8] D.M. Rocke, *Robust Control Charts*, Technometrics, 31(2) (1989), 173–184.

Jadual 1: Nilai ARL bagi data $N(0,1)$

Saiz Sampel	CUSUM biasa			CUSUM teguh		
	Anjakan min			Anjakan min		
	0	0.5	1.0	0	0.5	1.0
5	58.5	5.5 (10.7)	2.4 (24.7)	55.6	6.0 (9.3)	2.5 (22.0)
7	63.7	4.4 (14.4)	2.0 (31.9)	64.1	4.6 (14.0)	2.1 (31.1)
9	60.2	3.7 (16.1)	1.8 (34.2)	63.3	4.0 (15.7)	18.8 (33.6)

Jadual 2: Nilai ARL bagi Data dengan Satu Titik Terpencil

Saiz Sampel	CUSUM biasa			CUSUM teguh		
	Anjakan min			Anjakan min		
	0	0.5	1.0	0	0.5	1.0
5	4.3	3.4 (1.2)	2.4 (1.8)	21.1	4.5 (3.7)	2.6 (8.2)
7	5.3	3.5 (1.5)	2.1 (2.5)	25.5	4.0 (5.7)	2.1 (12.1)
9	6.3	3.4 (1.9)	1.9 (3.4)	31.5	7.9 (7.9)	1.9 (16.6)

Jadual 3: Nilai ARL bagi proses pencung iaitu data dari Taburan T

Saiz Sampel	Darjah Kebebasan	CUSUM biasa			CUSUM teguh		
		Anjakan min			Anjakan min		
		0	0.5	1.0	0	0.5	1.0
5	4	58.5	5.4 (10.9)	2.3 (24.9)	161.3	6.0 (27.1)	2.5 (65.0)
	6	61.0	5.4 (11.4)	2.3 (26.0)	113.6	5.9 (19.2)	2.5 (45.3)
	8	66.2	5.4 (12.3)	2.4 (28.2)	102.0	5.9 (17.4)	2.5 (41.0)
7	4	59.5	4.3 (13.7)	2.0 (29.8)	137.0	4.6 (30.1)	2.1 (66.4)
	6	58.8	4.3 (13.6)	2.0 (29.4)	91.7	4.5 (20.2)	2.0 (44.5)
	8	61.3	4.3 (14.2)	2.0 (30.7)	78.7	4.6 (17.3)	2.1 (38.1)
9	4	58.5	3.7 (15.9)	1.8 (33.1)	263.2	4.0 (66.3)	1.9 (141.0)
	6	64.5	3.7 (17.4)	1.8 (36.6)	147.1	4.0 (37.1)	1.9 (78.9)
	8	65.8	3.7 (17.8)	1.8 (37.3)	113.6	4.0 (28.5)	1.9 (61.1)

Jadual 4: Nilai ARL bagi Proses Pancung iaitu data dari Taburan Khi Kuasadua

Saiz Sampel	Darjah Kebebasan	CUSUM biasa			CUSUM teguh		
		Anjakan min			Anjakan min		
		0	0.5	1.0	0	0.5	1.0
5	4	51.5	5.6 (9.2)	2.4 (21.8)	74.6	7.8 (9.9)	2.7 (27.3)
	6	53.5	5.6 (9.6)	2.4 (22.6)	67.1	7.2 (9.3)	2.7 (24.9)
	8	51.0	5.6 (12.3)	2.4 (28.2)	65.8	7.0 (17.4)	2.7 (41.0)
7	4	58.1	4.5 (13.0)	2.0 (28.9)	77.5	5.8 (13.4)	2.2 (34.8)
	6	59.8	4.5 (13.3)	2.0 (29.6)	76.9	5.7 (13.6)	2.2 (43.5)
	8	59.5	4.5 (13.4)	2.0 (29.6)	74.6	5.5 (13.5)	2.2 (33.7)
9	4	52.9	3.7 (14.1)	1.8 (29.9)	80.6	4.6 (17.6)	2.0 (41.2)
	6	52.4	3.8 (14.0)	1.8 (29.6)	71.4	4.5 (16.0)	1.9 (36.7)
	8	52.1	3.7 (14.0)	1.8 (29.5)	64.9	4.4 (14.8)	1.9 (33.7)