MATEMATIKA, 2004, Jilid 20, Bil. 2, hlm. 133–140

Penjanaan Bentuk Pasu Menggunakan Persamaan Pembezaan Separa *(Generating the Shapes of Jars using Partial Differential Equations)*

[1]**Nur Baini Ismail** & [2]**Jamaludin Md Ali**
[1]Jabatan Matematik, Kolej Bestari, Setiu, Terengganu, Malaysia
[2]Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM Pulau Pinang, Malaysia

Abstrak Kertas ini akan mengemukakan cara menghasilkan pasu yang mempunyai keratan rentas berbentuk eliptik di bahagian atas dan keratan rentas berbentuk bulatan di bahagian bawah pasu dengan menggunakan kaedah persamaan pembezaan separa (PPS).

Katakunci Persamaan pembezaan separa, permukaan bentuk bebas, rekabentuk pasu.

Abstract *This paper presents an alternative way to generate the jars that have elliptical cross-sectional area at the top and circle cross-sectional area at the bottom of the jars by using partial differential equations.*

Keywords *Partial differential equations, free form surface, jar design.*

1 Pengenalan

Dalam Rekabentuk Dibantu Komputer (RBK) dan Rekabentuk Geometri Dibantu Komputer (RGBK), kita telah biasa dengan permukaan Bezier dan permukaan Splin-B bagi menjanakan permukaan dalam menghasilkan bentuk-bentuk objek yang dikehendaki. Dalam kertas ini, kita akan melihat cara menggunakan kaedah persamaan pembezaan separa (PPS) bagi menjanakan permukaan bentuk bebas iaitu pasu.

Kaedah bagi menjanakan permukaan dengan menggunakan pendekatan PPS ini telah diperkenalkan buat pertama kali oleh Bloor dan Wilson [1]. Pada mulanya, mereka hanya menggunakan kaedah ini untuk menjanakan permukaan adunan sahaja dan kemudiannya diteruskan kepada penjanaan permukaan bentuk bebas [2] iaitu bagi menghasilkan hul kapal, bilah kipas dan gagang telefon.

Jadi dalam kertas ini, kita akan mengaplikasikan kaedah PPS untuk menghasilkan pasu yang mempunyai keratan rentas berbentuk eliptik di bahagian atas manakala tapaknya pula berbentuk bulat.

Terlebih dahulu kita akan melihat konsep kaedah PPS ini dari segi matematik dalam bahagian 2. Kemudian dalam bahagian 3, perbincangan diteruskan tentang kaedah bagi menjanakan pasu eliptik ini dengan menggunakan kaedah PPS. Seterusnya bentuk pasu yang diperolehi dalam bahagian 3 akan dimanipulasi dengan melihat perubahan bentuk pasu apabila parameter pelicin dan syarat sempadan diubah masing-masing dalam bahagian 4 dan bahagian 5. Akhir sekali sedikit kesimpulan akan diberikan dalam bahagian 6.

2 Kaedah Pembezaan Separa

Dengan menggunakan kaedah PPS, permukaan yang dihasilkan adalah dengan mencari penyelesaian kepada PPS yang dipilih, iaitu rekabentuk permukaan adalah berdasarkan kepada masalah nilai awal sempadan yang bersesuaian.

Pertimbangkan $\underline{X}(u,\nu)$ yang ditakrifkan sebagai permukaan dalam ruang tiga dimensi yang berada dalam domain Ω (dengan sempadan $\partial\Omega$, iaitu $\partial\Omega$ menentukan data sempadan). Sekarang kita lihat u dan ν sebagai titik-titik koordinat dalam Ω dan $\underline{X}(u,\nu)$ memetakan titik-titik dalam Ω ini kepada titik-titik dalam ruang tiga dimensi. Untuk memenuhi keperluan ini, kita menganggap bahawa $\underline{X}(u,\nu)$ adalah penyelesaian kepada PPS yang berbentuk

$$D^m_{u,\nu}(\underline{X}) = \underline{F}(u,\nu) \tag{1}$$

di mana $D^m_{u,\nu}(\ )$ adalah operator pembezaan separa berperingkat m yang tak bersandar dalam pembolehubah u dan ν manakala $\underline{F}$ pula merupakan vektor dalam fungsi u dan ν. Penyelesaian kepada persamaan (1) akan memberikan bentuk parameter bagi permukaan di dalam ruang (u,ν).

Pemilihan bagi operator pembezaan separa dipilih sebagai eliptik untuk memastikan penyelesaian $\underline{X}(u,\nu)$ akan diperolehi apabila syarat sempadan dikenakan dalam domain $\partial\Omega$. Syarat sempadan yang dikenakan adalah dalam ungkapan yang mempunyai parameter u dan ν dan biasanya diwakili oleh koordinat (x,y,z). Peringkat untuk operator pembezaan separa pula akan ditentukan oleh jumlah data sempadan yang diperlukan. Dalam perbincangan kita untuk menghasilkan pasu, dipilih sebagai $m = 4$. Dalam menjana pasu, kita boleh menggunakan persamaan berbentuk eliptik peringkat empat seperti berikut

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + a^2\frac{\partial}{\partial \nu^2}\right)^2 \underline{X} = 0. \tag{2}$$

Ini adalah operator biharmonik (operator ini mempunyai banyak aplikasi dalam bidang mekanik kuantum) yang diubahsuai dengan pemasukan sebutan a yang digunakan sebagai parameter pelicin [3]. Ia juga mewakili proses yang licin iaitu nilai fungsi pada sebarang titik di atas permukaan, dalam keadaan tertentu, adalah purata antara nilai-nilai yang berada di sekitarnya. Jadi permukaan yang diperolehi merupakan suatu permukaan yang licin antara syarat sempadan yang dikenakan dikedua-dua fungsi dan terbitan pertamanya.

3 Rekabentuk Pasu

Setelah meninjau serba sedikit tentang teori yang berkaitan dengan kaedah PPS, sekarang kita akan meneruskan perbincangan tentang kaedah untuk menjanakan pasu eliptik seperti yang telah dijelaskan sebelum ini. Terlebih dahulu kita perlu menentukan syarat sempadan untuk masalah nilai awal yang perlu diselesaikan. Untuk tujuan ini, kita boleh menggunakan syarat sempadan seperti berikut bagi memperolehi pasu eliptik seperti yang dikehendaki.

$$\begin{aligned}\underline{X}(0,\nu) &= (rx\cos\nu, ry\sin\nu, H),\\ \underline{X}(1,\nu) &= (R\cos\nu, R\sin\nu, 0),\\ \underline{X}_u(0,\nu) &= (r'\cos\nu, r'\sin\nu, S_{top}),\\ \underline{X}_u(1,\nu) &= (R'\cos\nu, R'\sin\nu, 0),\end{aligned} \tag{3}$$

dengan $rx, ry, R, r', H, S_{top} \in \Re$ (nombor nyata). Perhatikan bahawa rx dan ry adalah jejari pada bahagian atas pasu masing-masing pada komponen-x dan komponen-y. H adalah tinggi pasu manakala R pula jejari bulatan di bahagian tapak pasu.

Sekarang kita akan menyelesaikan persamaan (2) berdasarkan syarat sempadan (3) secara analitikal. Diketahui bahawa syarat sempadan adalah berkala dalam ν, maka kita akan mencari penyelesaian yang berkadaran langsung dengan fungsi $\cos\nu$ dan $\sin\nu$. Pertama sekali, kita harus perhatikan bahawa penyelesaian yang berkadaran langsung dengan $\cos\nu$ mempunyai bentuk $F(u)\cos\nu$ di mana

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} - a^2\right)^2 F = 0, \tag{4}$$

iaitu

$$F \sim \alpha_1 e^{au} + \alpha_2 u e^{au} + \alpha_3 e^{-au} + \alpha_4 u e^{-au}, \tag{5}$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dan α_4 adalah pemalar. Keputusan yang sama juga adalah benar untuk penyelesaian yang berkadar langsung kepada $\sin\nu$. Jadi kita boleh mendeduksikan bahawa komponen x dan y bagi permukaan adalah berbentuk

$$\begin{aligned} x &= \left(\alpha_1 e^{au} + \alpha_2 u e^{au} + \alpha_3 e^{-au} + \alpha_4 u e^{-au}\right)\cos\nu,\\ y &== \left(\beta_1 e^{au} + \beta_2 u e^{au} + \beta_3 e^{-au} + \beta_4 u e^{-au}\right)\sin\nu,\end{aligned} \tag{6}$$

dengan nilai $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ dan $\beta_1, \ldots, \beta_4$ adalah pemalar dan dapat diperolehi dengan membandingkan persamaan (6) dengan syarat sempadan (3). Sementara itu, syarat sempadan pada z pula diberikan oleh

$$z(0) = H; \quad z_u(0) = S_{top}; \quad z(1) = 0; \quad z_u(1) = 0. \tag{7}$$

Dapat diperhatikan bahawa komponen-z boleh diungkapkan dalam bentuk polinomial seperti berikut

$$z(u) = z_0 + z_1 u + z_2 u^2 + z_3 u^3. \tag{8}$$

Dengan menggantikan persamaan (7) ke dalam (8), kita dapati

$$z_0 = H; \quad z_1 = S_{top}; \quad z_2 = -3H - 2S_{top}; \quad z_3 = 2H + S_{top}, \tag{9}$$

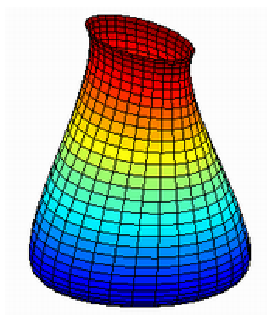
dan memberikan

$$\begin{aligned} z &= H + S_{top}u - (3H + 2S_{top})u^2 + (2H + S_{top})u^3,\\ z &= (S_{top} + 3H)(u-1)^2 + (S_{top} + 2H)(u-1)^3.\end{aligned} \tag{10}$$

Jadi kita telah mendapatkan penyelesaian untuk ketiga-tiga komponen iaitu komponen x, y dan z. Sekarang kita boleh menggunakan ketiga-tiga penyelesaian ini untuk menjanakan pasu seperti yang dikehendaki. Kita boleh memilih nilai-nilai pemalar yang terdapat dalam syarat sempadan (3) seperti berikut:

$$rx = 0.2;\;\; ry = 0.4;\;\; H = 1;\;\; R = 0.5;\;\; r' = -0.5;\;\; R' = -1;\;\; S_{top} = -0.5. \tag{11}$$

Dengan menggunakan nilai-nilai dalam (11) dan $a = 0.1$, pasu seperti dalam Rajah 1 dapat diperoleh.



Rajah 1 : Pasu eliptik

4 Kesan Perubahan Parameter Pelician

Sekarang kita akan memanipulasi bentuk pasu yang diperolehi dalam Rajah 1 dengan mengubah nilai parameter pelicin, a, bagi memperolehi bentuk yang berlainan. Parameter a dapat mengubah proses pelicinan secara relatif bagi pembolehubah bersandar antara arah u dan ν. Dalam menjanakan pasu di atas, nilai bagi parameter a diambil sebagai pemalar. Jadi operator pembezaan separa dalam (2) boleh diubahsuai seperti berikut

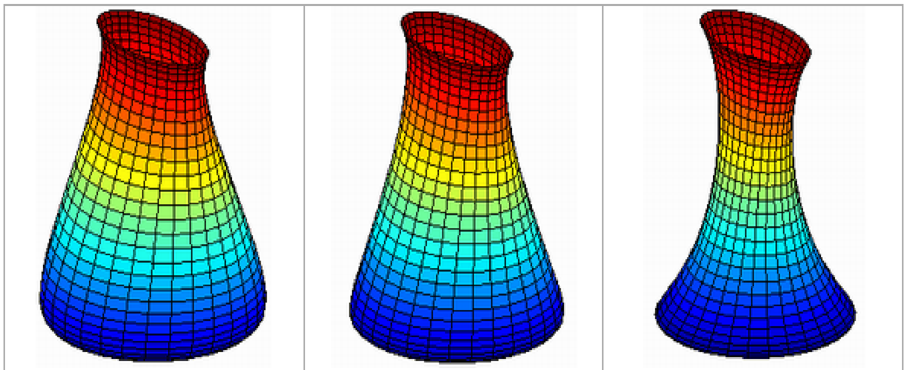
$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \left(\nu/a\right)^2} \right). \tag{12}$$

Hal ini menunjukkan bahawa parameter a dapat mengubah skala jarak dalam arah v. Jadi untuk nilai a yang kecil, permukaan yang penuh akan dijanakan manakala untuk nilai a yang besar pula akan menyebabkan permukaan yang dihasilkan mempunyai pergelangan yang kecil. Pemerhatian ini dapat diperhatikan dalam Rajah 2.

5 Kesan Perubahan Syarat Sempadan Tangen

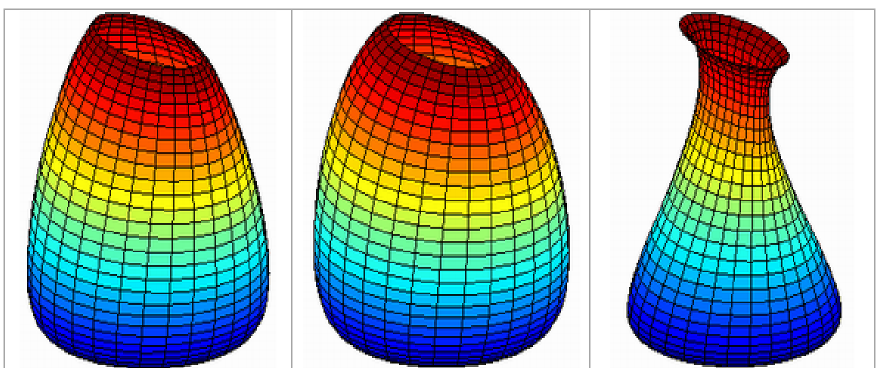
Selain daripada parameter pelicin, kita boleh mengubah syarat sempadan tangen untuk memperoleh bentuk pasu yang berlainan. Dalam kes ini, terdapat tiga nilai yang boleh diubah iaitu r', R' dan S_{top}. Syarat sempadan tangen mengawal kadar perubahan permukaan pada sempadan dan berapa cepat ia merebak ke dalam permukaan yang dihasilkan.

Bagi memerhatikan kesan perubahan nilai-nilai ini, kesemua nilai dalam (11) ditetapkan dan $a = 0.2$. Untuk tujuan ini, dua nilai akan ditetapkan dan satu nilai akan diubah. Terlebih dahulu, kita tetapkan parameter R' dan S_{top} sementara nilai r' diubah. Keputusan ini boleh diperhatikan dalam Rajah 3.



(a) $a = 1.0$ (b) $a = 3.0$ (c) $a = 5.0$

Rajah 2 : Kesan perubahan parameter a terhadap bentuk pasu eliptik



(a) $r' = 0.7$ (b) $r' = 1.2$ (c) $r' = -1.3$

Rajah 3 : Kesan perubahan parameter r'

Daripada pemerhatian ini, dapat dilihat bahawa apabila nilai r' bernilai besar, ia akan menyebabkan bahagian pasu pada bahagian atas akan membesar. Sebaliknya sekiranya nilai r' hanya bernilai kecil atau bernilai negatif, ia akan menyebabkan bahagian tersebut melengkung ke dalam. Dengan cara yang sama, nilai R' pula yang akan diubah dan keputusannya pula diberikan dalam Rajah 4.

Dalam Rajah 4 dapat ditunjukkan bahawa perubahan parameter R' akan memberikan kesan kepada bentuk pasu pada bahagian bawah pula. Tetapi, cara ia mempengaruhi bentuk pasu adalah berbeza berbanding peranan yang dimainkan oleh parameter r', iaitu ia akan membesar pada bahagian bawah sekiranya R' adalah bernilai negatif dan apabila nilai R' yang diambil bernilai positif, bahagian tersebut akan melengkung ke dalam.

Sekarang kita akan perhatikan apa pula yang akan berlaku sekiranya nilai S_{top} pula yang diubah. Rajah 5 menunjukkan kesan perubahan ini apabila nilai S_{top} diubah daripada 0.1 (Rajah 5(a)) kepada 1.5 (Rajah 5(b)) dan kemudian kepada 2.3 (Rajah 5(c)).

Apabila mengubah parameter S_{top}, kita mengubah magnitud vektor tangen pada bahagian atas pasu. Dalam Rajah 5, dapat diperhatikan bahawa apabila nilai S_{top} ditingkatkan semakin besar, permukaan pada bahagian atas pasu akan ditolak ke dalam pasu. Pemerhatian ini adalah disebabkan oleh jarak antara garisan-garisan dalam pemalar u.

6 Kesimpulan

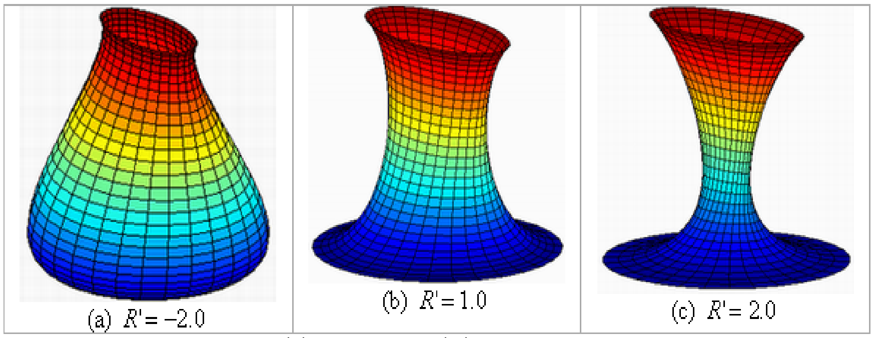
Pasu adalah salah satu daripada kelas permukaan bentuk bebas. Selain daripada kaedah konvensional, kaedah PPS juga dapat digunakan dengan mudah dan berkesan untuk menjanakan bentuk berkenaan. Dengan memilih masalah nilai awal sempadan yang bersesuaian, bentuk pasu yang ingin diperoleh dapat dijana dan seterusnya kita dapat memanipulasi bentuk-bentuk ini dengan mengubah syarat sempadan dan parameter pelicin yang terdapat dalam masalah nilai awal tadi. Bagi menjana pasu berbentuk eliptik di bahagian atas dan tapak yang bulat, kita boleh memilih persamaan eliptik peringkat empat dengan kehadiran parameter a sebagai parameter pelicin. Apabila kita mengubah nilai bagi parameter pelicin, kita boleh mengawal bentuk pasu di bahagian tengah manakala perubahan bentuk pasu di bahagian atas dan bawah pasu pula dikawal oleh syarat tangen pada sempadan.

Rujukan

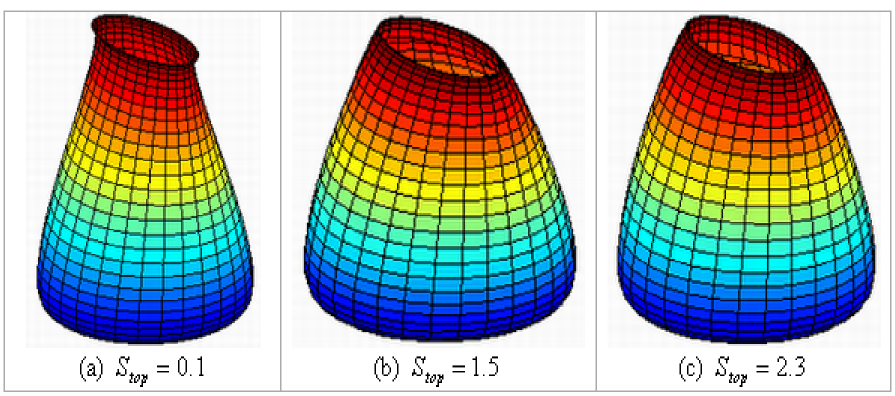
[1] M.I.G Bloor & M.J. Wilson, *Generating blend surfaces using partial differential equations,* Computer-Aided Design, 21(1989), 165-171.

[2] M.I.G Bloor & M.J. Wilson, *Using partial differential equations to generate free-form surfaces,* Computer-Aided Design 22(1989), 202-212.

[3] H. Nowacki et al, *Computational geometry for ships,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1995.



Rajah 4 : Kesan perubahan parameter R'



Rajah 5 : Kesan perubahan parameter S_{top}

Lampiran

```
%Program ini adalah untuk menghasilkan pasu
%pemboleh ubah dalam syarat sempadan
h=1;                  %tinggi pasu
%pembolehubah dalam syarat terbitan
r=-0.5;               %magnitud vektor pada u=0
R=-1;                 %magnitud vektor pada u=1
Stop=-0.5;            %magnitud vektor tangen pada bahagian atas pasu
%pembolehubah yang mewakili jejari pasu
rx=0.2;               %jejari pada u=0 dalam arah-x
ry=0.4;               %jejari pada u=0 dalam arah-y
Rx=0.5;               %jejari bulatan pada bahagian bawah pasu
Ry=Rx;                %Rx=Ry adalah bagi mendapatkan tapak yg bulat
%parameter pelicin
ax=0.1;
ay=ax;
D=[1 0 0 0;1 1 1 1;0 1 0 0;0 1 2 3];
F1=[0;0;0;0];         %komponen-x
F2=[0;0;0;0];         %komponen-y
F3=[h;0;Stop;0];      %komponen-z
d=D\F1;
e=D\F2;
f=D\F3;
%nilai-nilai bagi p(1),p(2),...,q(1),q(2)
A1=[1 0 1 0;exp(ax) exp(ax) exp(-ax) exp(-ax);ax 1 -ax 1;
  ax*exp(ax) (1+ax)*exp(ax) -ax*exp(-ax) (1-ax)*exp(-ax)];
k1=[rx;Rx;r;R];
p=A1\k1
A2=[1 0 1 0;exp(ay) exp(ay) exp(-ay) exp(-ay);ay 1 -ay 1;
  ay*exp(ay) (1+ay)*exp(ay) -ay*exp(-ay) (1-ay)*exp(-ay)];
k2=[ry;Ry;r;R];
q=A2\k2
w=0:1/30:1;
u=w';
v=0:2*pi/30:2*pi;
%mendapatkan nilai-nilai bagi X0, X1 dan X2
X0=d(1)+d(2)*u+d(3)*u.^2+d(4)*u.^3;
Y0=e(1)+e(2)*u+e(3)*u.^2+e(4)*u.^3;
Z0=f(1)+f(2)*u+f(3)*u.^2+f(4)*u.^3;
X1=p(1).*exp(ax*u)+p(2).*u.*exp(ax*u)+p(3).*exp(-ax*u)+p(4).*u.*exp(-ax*u);
Y1=q(1).*exp(ay*u)+q(2).*u.*exp(ay*u)+q(3).*exp(−ay*u)+q(4).*u.*exp(-ay*u);
X=X0*ones(size(v))+X1*cos(v);
Y=Y0*ones(size(v))+Y1*sin(v);
Z=Z0*ones(size(v));
surf(X,Y,Z),
%shading flat,
axis off,
xlabel('paksi-x');ylabel('paksi-y');zlabel('paksi-z');
```