

Carta Kawalan EWMA dan Carta Kawalan CUSUM: Satu Perbandingan Prestasi Menggunakan ARL (*EWMA Control Chart and CUSUM Control Chart: A Comparison of Performance Using ARL*)

Norizan Mohamed, Muhamad Safiih Lola, Wan Muhamad Amir & Teoh Kooi Siam
Jabatan Matematik, Kolej Universiti Sains dan Teknologi Malaysia, 21030 Terengganu, Malaysia

Abstrak Carta kawalan kualiti EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) dan CUSUM (*Cumulative Sum*) digunakan dengan meluas untuk mengawal kualiti produk yang dihasilkan daripada proses pengeluaran. Program komputer ditulis dalam bahasa pengaturcaraan SAS (*Statistical Analysis System*) digunakan untuk mengira purata panjang larian, ARL (*average run length*) bagi anjakan dalam min proses bagi carta kawalan optima EWMA dan CUSUM. ARL nominal ditetapkan pada 50, 100, 250, 500, 1000, 1500 dan 2000. Analisis dijalankan terhadap prestasi carta kawalan optima EWMA dan CUSUM bagi mengesan anjakan kecil dan besar dalam min proses. Hasil daripada carta kawalan EWMA dan CUSUM bagi mengesan anjakan kecil dan besar dalam min proses dibincangkan.

Katakunci Purata Panjang Larian, Anjakan, EWMA (*Exponentially Weighted Moving-Average*), CUSUM (*Cumulative Sum*), kawalan optima.

Abstract EWMA (*Exponentially Weighted Moving-Average*) control charts and CUSUM (*Cumulative Sum*) control charts are widely used in industry for process and measurement control. This paper provides a computer implementation of a fast and accurate algorithm in programming SAS (*Statistical Analysis System*) to compute average run length (ARL) for CUSUM and EWMA charts to monitor the process mean. The in-control ARL is set to be at 50, 100, 250, 500, 1000, 1500 dan 2000. The sensitive for optimal control EWMA and CUSUM in monitoring shift is then be analyze. The results from EWMA and CUSUM control charts for monitoring any small and large increases in process mean be discuss.

Keywords Average Run Length, Shift, EWMA (*Exponentially Weighted Moving-Average*), CUSUM (*Cumulative Sum*), optimal control.

1 Pengenalan

Carta kawalan kualiti EWMA (*Exponentially Weighted Moving-Average*) dan CUSUM (*Cumulative Sum*) digunakan dengan meluas untuk mengawal kualiti produk yang dihasilkan daripada proses pengeluaran. Carta kawalan dibina untuk mempercepatkan pengesanan anjakan dalam min proses supaya proses boleh disemak dan langkah pembetulan dapat

dilakukan bagi mengelakkan penghasilan unit yang tidak mematuhi spesifikasi. Kepekaan sesuatu carta kawalan terhadap anjakan biasanya ditentukan oleh nilai-nilai ARL (*average run length*) atau disebut purata panjang larian.

Carta kawalan EWMA diperkenalkan oleh Roberts [11]. Seterusnya, Crowder [3], Lucas dan Saccucci [9] juga terlibat dalam mempertingkatkan carta kawalan EWMA.

Nilai-nilai EWMA ditakrif sebagai

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t \quad t = 1, 2, 3, \dots \text{ dan } 0 < \lambda \leq 1 \quad (1)$$

dengan λ ialah pemalar pelicinan (*smoothing constant*) dan Z_t ialah nilai EWMA selepas cerapan yang ke- t . Dalam kajian ini, X_t dianggap bertaburan normal $N(\mu_0, \sigma^2)$, min proses $\mu_0 = 0$ dan varians proses $\sigma^2 = 1$. Proses akan dianggap di luar kawalan sekiranya nilai Z_t terlalu besar atau terlalu kecil. Pada cerapan ke- t , kita boleh menyimpulkan anjakan (*shift*) dalam min proses berlaku sekiranya

$$|Z_t| > CL$$

dengan CL ialah Had Kawalan.

Carta kawalan CUSUM pula diperkenalkan oleh Page [10]. Nilai-nilai berturutan bagi CUSUM dua hujung iaitu CUSUM hujung bawah, $S_t(t)$ dan CUSUM hujung atas, $S_H(t)$ diberi oleh

$$\begin{aligned} S_t(t) &= \max[0, x_t - (\mu_0 + k) + S_H(t-1)] \\ S_H(t) &= \max[0, (\mu_0 - k) - X_t + S_L(t-1)] \end{aligned} \quad k \geq 0, t = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

dengan nilai-nilai permulaan, $S_t(0) = S_H(0) = 0$ dan k ialah nilai rujukan. x_t juga merupakan cerapan tak bersandar dan bertabur secara normal seperti disebut dalam EWMA. Perhatikan bahawa $S_H(t)$ dan $S_t(t)$ melonggokkan sisihan-sisihan daripada μ_0 yang melebihi k dengan kedua-dua $S_H(t)$ dan $S_t(t)$ menjadi sifar semula jika nilai-nilainya adalah negatif. Jika $S_H(t)$ atau $S_t(t)$ melebihi selang keputusan (*decision interval*), H , proses dikatakan di luar kawalan.

2 Tatacara Pembinaan Carta Kawalan EWMA dan CUSUM

Purata panjang larian, ARL (*average run length*) untuk mengkaji prestasi carta kawalan EWMA dan CUSUM bagi mengawal min untuk proses normal dibina menggunakan SAS (*Statistical Analysis System*) versi 6.12. Untuk menjana variat rawak normal piawai X , fungsi nombor rawak SAS iaitu RANNOR digunakan seperti berikut:

$$X = \mu + \sigma * \text{rannor}(33333)$$

dengan μ , $\mu = 0$, σ , $\sigma = 1$ dan 33333 ialah nilai benih rawak (*random seed value*) sebarang yang digunakan sepanjang kajian. Nilai benih (*seed value*) digunakan untuk menghasilkan suatu jujukan nombor rawak. Untuk menjana variat rawak normal iaitu $N(\delta, 1)$, nilai μ , μ dalam persamaan di atas akan digantikan dengan nilai delta, δ dengan $\delta > 0$. Variat-variati rawak normal iaitu $N(\delta, 1)$ yang dijanakan mewakili cerapan-cerapan daripada taburan normal dengan perubahan dalam min proses dengan min proses yang baru ialah $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ dengan μ_0 sebagai min proses asal yang stabil dan σ ialah sisihan piawai

proses. Nilai min proses, $\mu_0 = 0$ dan sisihan piawai proses, $\sigma = 1$ digunakan sepanjang kajian ini.

Kedua-dua program komputer EWMA dan CUSUM memberikan nilai-nilai ARL (*average run length*) bagi setiap anjakan (*shift*) dalam min proses yang diminati. Dalam program CUSUM, μ_0 iaitu min proses asal yang stabil bersamaan sifar ($\mu_0 = 0$). Sebaliknya, μ_1 ialah min proses yang baru, dengan $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$.

2.1 Tatacara Pembinaan Carta Kawalan EWMA

Langkah-langkah pembinaan carta kawalan EWMA bagi tujuan mengesan anjakan dalam min proses adalah seperti berikut:

- (i) Tentukan nilai ARL yang dikehendaki apabila anjakan dalam min proses bersamaan sifar. ARL ialah purata bilangan cerapan atau pemerhatian sebelum terdapat isyarat luar kawalan walaupun proses sebenarnya adalah dalam kawalan.
- (ii) Penetapan nilai anjakan δ pada $\pm 1.00\sigma$ dalam min proses yang perlu dikesan dengan cepat. Seterusnya, nilai optima pelicinan (*smoothing constant*), λ yang sepadan dengan saiz anjakan satu sigma ditentukan.
- (iii) Daripada nilai λ yang diperolehi dalam langkah-(ii), tentukan pemalar had kawalan, k yang memenuhi syarat ARL dalam langkah-(i).
- (iv) Had-had kawalan, CL ditetapkan pada

$$\text{NOMINAL} \pm k[\lambda/(2 - \lambda)]^{1/2} \sigma / \sqrt{n}$$

$$\text{NOMINAL} \pm k[\lambda/(2 - \lambda)]^{1/2} \text{ di mana } \sigma = 1 \text{ dan saiz sample, } n = 1.$$

2.2 Tatacara Pembinaan Carta Kawalan CUSUM

Langkah-langkah pembinaan carta kawalan CUSUM iaitu carta yang memberikan ARL luar kawalan yang sekecil mungkin bagi anjakan tertentu dalam min proses adalah seperti berikut:

- (i) Tentukan nilai ARL yang dikehendaki apabila anjakan dalam min proses bersamaan sifar. ARL ialah purata bilangan cerapan atau pemerhatian sebelum terdapat isyarat luar kawalan walaupun proses sebenarnya adalah dalam kawalan.
- (ii) Bagi anjakan $\pm 1.00\sigma$ dalam min proses di mana pengesanan cepat adalah penting, nilai rujukan optima (*reference value*), k diberi oleh $\delta/2$ iaitu 0.5. Ewan & Kemp [7] menyatakan bahawa pengiraan ekstensif menunjukkan nilai rujukan optima, k bagi carta kawalan CUSUM adalah kira-kira $\delta/2$.
- (iii) Diberi $k = 0.5$, tentukan selang keputusan (*decision interval*), H yang memenuhi kekangan ARL seperti yang dinyatakan dalam langkah-(i). Nilai rujukan optima, k dan selang keputusan, H dirujuk daripada Gan [8].

3 Keputusan

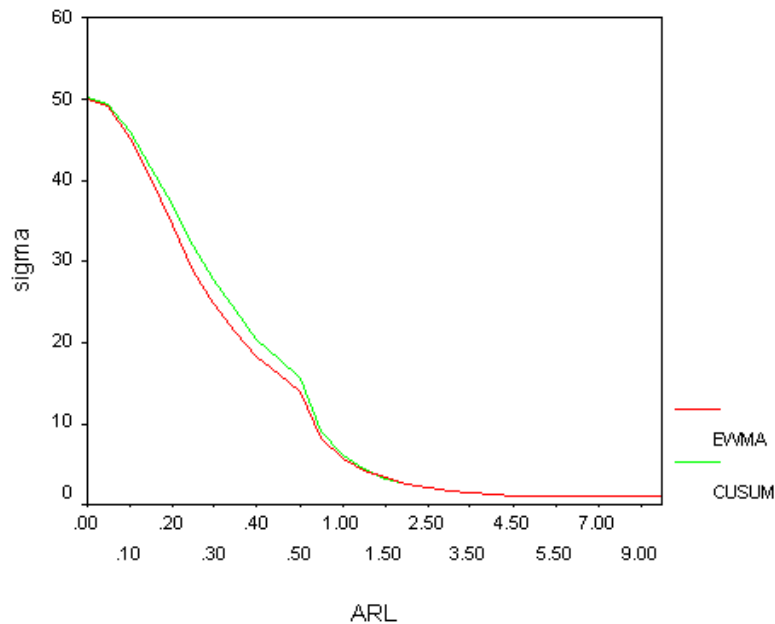
Bagi rekabentuk carta kawalan optima EWMA dan CUSUM, ARL nominal (*in-control ARL*) ditetapkan pada 50, 100, 250, 500, 1000, 1500 dan 2000. Program komputer digunakan untuk mengira ARL bagi anjakan (*shift*) dalam min proses daripada $\mu = \mu_0$ kepada $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ di mana $\mu_0 = 0$, $\sigma = 1$ dan $\delta \in \{0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00, 3.50, 4.00, 4.50, 5.00, 5.50, 6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.00\}$. Kemudian, prestasi carta kawalan optima EWMA dan CUSUM bagi mengesan anjakan (*shift*) kecil dan besar dalam min proses dianalisiskan. Seterusnya, perbandingan antara prestasi carta kawalan optima EWMA dan CUSUM dijalankan untuk pelbagai nilai ARL nominal iaitu 50, 100, 250, 500, 1000, 1500 dan 2000.

Graf 3.1 hingga 3.7 menunjukkan perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM untuk nilai-nilai ARL nominal yang berlainan. Nilai-nilai parameter yang dipilih adalah sepadan dengan saiz anjakan, $\pm 1.00\sigma$ dalam min proses di mana pengesanan cepat adalah penting.

Graf 3.1 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM (ARL

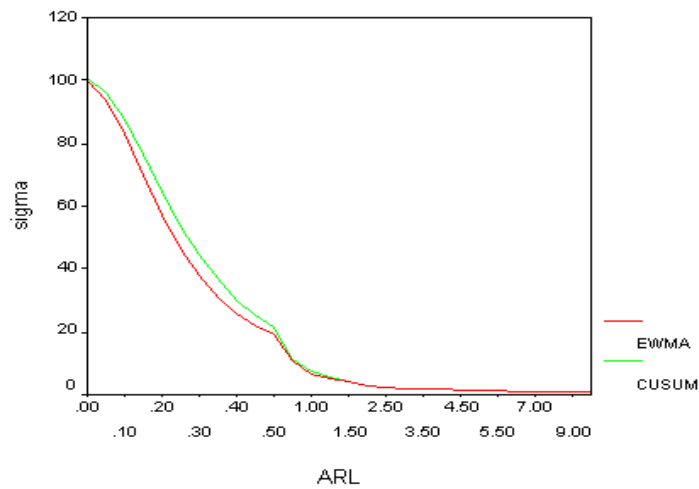
nominal=50, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)

EWMA: $\lambda = 0.21$, $K = 2.06$, $CL = \pm 0.7056$ CUSUM : $H = 2.83$



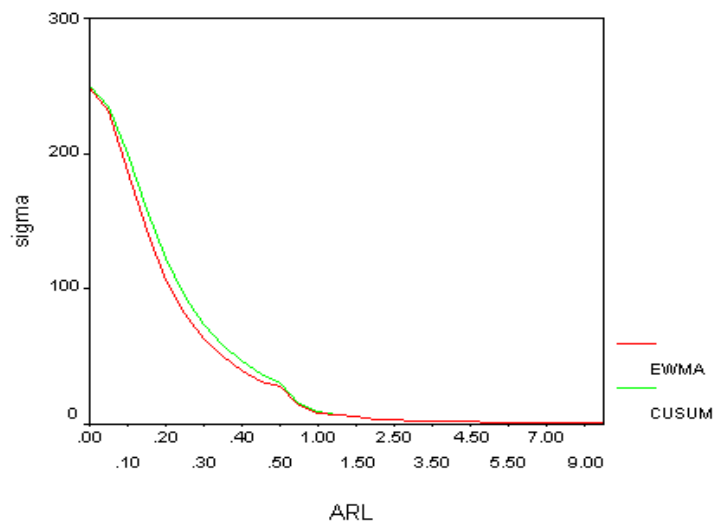
Graf 3.2 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM (ARL nominal=100, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)

EWMA: $\lambda = 0.18, K = 2.32, CL = \pm 0.7296$ **CUSUM:** $H = 3.50$

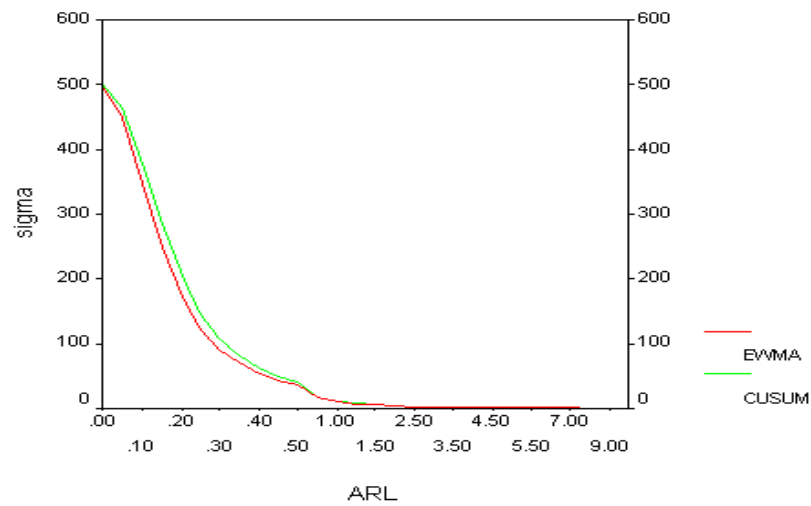


Graf 3.3 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM (ARL nominal=250, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)

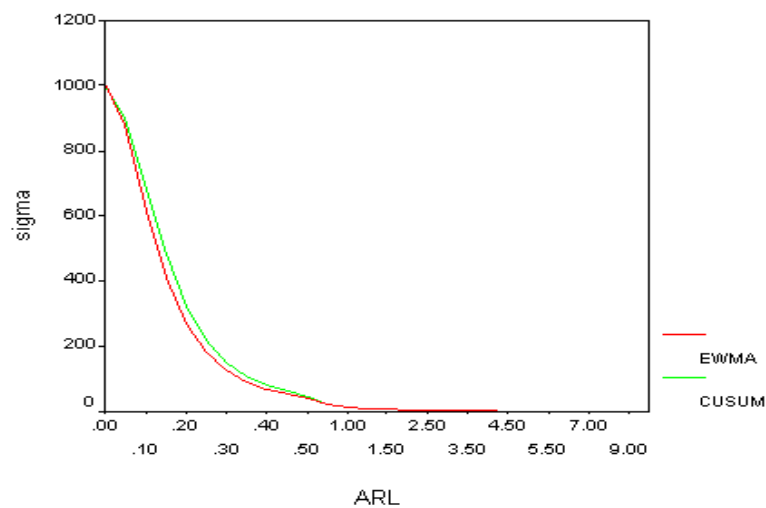
EWMA: $\lambda = 0.15, K = 2.65, CL = \pm 0.7546$ **CUSUM:** $H = 4.37$



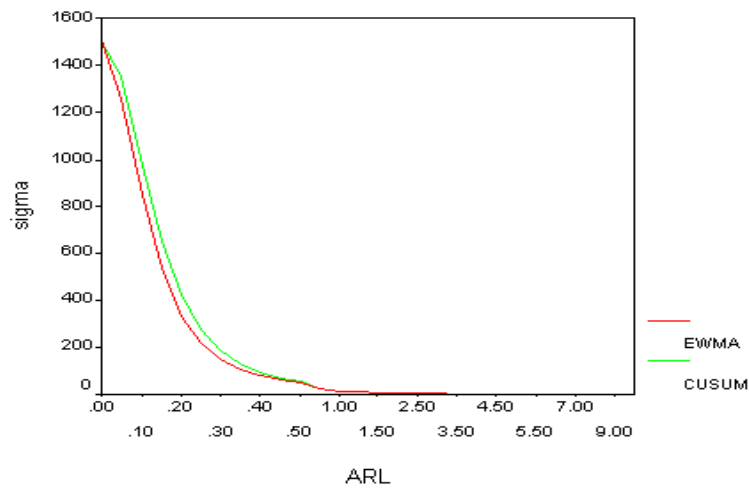
Graf 3.4 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM
 (ARL nominal=500, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)
EWMA: $\lambda = 0.14$, $K = 2.89$, $CL = \pm 0.7929$ CUSUM: $H = 5.08$



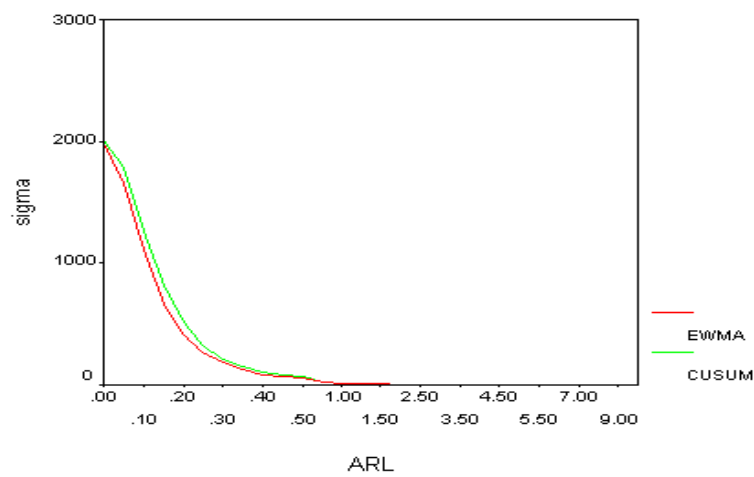
Graf 3.5 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM
 (ARL nominal=1000, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)
EWMA: $\lambda = 0.12$, $K = 3.10$, $CL = \pm 0.7832$ CUSUM: $H = 5.76$



Graf 3.6 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM
 (ARL nominal=1500, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)
EWMA: $\lambda = 0.11$, $K = 3.21$, $CL = \pm 0.7744$ CUSUM:H = 6.17



Graf 3.7 Perbandingan ARL antara carta kawalan optima EWMA dan CUSUM
 (ARL nominal=2000, saiz anjakan untuk pengesanan cepat = $\pm 1.00\sigma$)
EWMA: $\lambda = 0.11$, $K = 3.30$, $CL = \pm 0.7961$ CUSUM:H = 6.46



Dalam rajah di atas

δ = anjakan dalam min proses (dalam gandaan sisihan piawai)

λ = pemalar pelicinan (*smoothing constant*)

K = pemalar had kawalan (*control limit constant*)

CL = had kawalan

H = selang keputusan (*decision interval*)

3.1 Perbandingan EWMA dengan CUSUM terhadap Anjakan

Daripada ARL, dapat diperhatikan bahawa:

- (i) Bagi anjakan kurang daripada satu sigma, terdapat perbezaan yang ketara antara ARL bagi carta kawalan EWMA dan CUSUM. Carta kawalan EWMA mempunyai ARL yang lebih kecil daripada carta kawalan CUSUM.
- (ii) Apabila anjakan menghampiri satu sigma, perbezaan yang kurang ketara diperhatikan. Carta kawalan EWMA masih mempunyai ARL yang lebih kecil daripada carta kawalan CUSUM.
- (iii) Apabila anjakan melebihi satu sigma, kedua-dua carta kawalan EWMA dan CUSUM mempunyai ARL yang agak sama.
- (iv) Apabila anjakan adalah cukup besar, ARL bagi kedua-dua carta kawalan EWMA dan CUSUM menghampiri satu.

Apabila proses beroperasi pada tahap min yang diingini, ARL mesti panjang. Apabila proses berubah daripada tahap min yang diingini kepada tahap min yang tidak boleh diterima, ARL mesti pendek. Oleh itu, carta kawalan optima EWMA lebih berkesan untuk mengesan anjakan yang sangat kecil dalam min proses jika dibandingkan dengan carta kawalan optima CUSUM. Akan tetapi, kedua-dua carta kawalan optima EWMA dan CUSUM mempunyai keberkesanan yang sama dalam mengesan anjakan yang melebihi satu sigma.

3.2 Perbandingan EWMA dengan CUSUM pada ARL Nominal

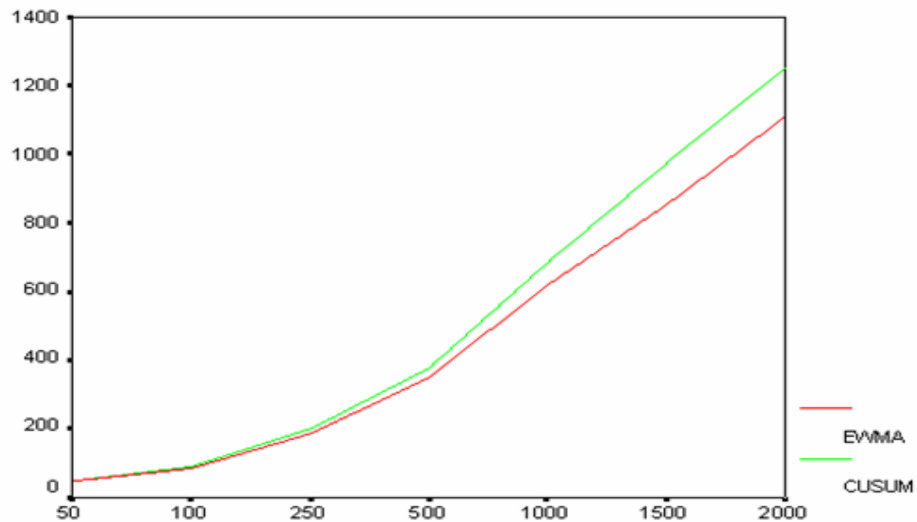
Bagi ARL nominal yang besar, terdapat perbezaan yang ketara antara ARL bagi carta kawalan EWMA dan CUSUM. Bagi ARL nominal yang kecil pula, terdapat perbezaan yang kurang ketara antara ARL carta kawalan EWMA dan CUSUM. Jadual 3.1 dapat memberi gambaran yang lengkap mengenai tafsiran di atas.

Apabila ARL nominal adalah besar, carta kawalan optima EWMA lebih berkesan untuk mengesan anjakan dalam min proses jika dibandingkan dengan carta kawalan optima CUSUM. Walau bagaimanapun, kedua-dua carta kawalan optima EWMA dan CUSUM mempunyai keberkesanan yang sama dalam mengesan anjakan dalam min proses jika ARL nominal kecil.

Jadual 3.1 Perbezaan antara nilai-nilai ARL yang sepadan bagi EWMA dan CUSUM dengan anjakan 0.10 sigma

ARL nominal	EWMA	CUSUM	Perbezaan = CUSUM- EWMA
50	45.1218	46.0580	0.9362
100	82.8798	87.9886	5.1088
250	187.3852	199.8920	12.5068
500	346.0182	375.2728	29.2546
1000	614.5360	682.2128	67.6768
1500	851.6622	974.5642	122.9020
2000	1106.9900	1252.6400	145.6500

Graf 3.8 Perbezaan antara nilai-nilai ARL yang sepadan bagi EWMA dan CUSUM dengan anjakan 0.10 sigma



4 Kesimpulan

Carta kawalan EWMA lebih berkesan untuk mengesan anjakan yang sangat kecil dalam min proses jika dibandingkan dengan carta kawalan CUSUM. Carta kawalan EWMA mempunyai ARL yang lebih pendek daripada carta kawalan CUSUM sehingga anjakan mencapai satu sigma seperti yang telah ditetapkan dalam prosedur rekabentuk.

Sebaliknya, kedua-dua carta kawalan EWMA dan CUSUM mempunyai keberkesanan yang sama dalam mengesan anjakan melebihi satu sigma. Selepas melebihi anjakan satu sigma, kedua-dua carta kawalan EWMA dan CUSUM mempunyai ARL yang agak sama. Akan tetapi, kedua-dua carta kawalan EWMA dan CUSUM adalah sangat lambat dalam mengesan anjakan besar dalam proses.

Apabila ARL nominal adalah besar, carta kawalan optima EWMA lebih berkesan untuk mengesan anjakan dalam min proses jika dibandingkan dengan carta kawalan optima CUSUM disebabkan terdapat perbezaan yang ketara antara ARL bagi EWMA dan CUSUM.

Walau bagaimanapun, kedua-dua carta kawalan optima EWMA dan CUSUM mempunyai keberkesanan yang sama dalam mengesan anjakan dalam min proses jika ARL nominal sangat kecil disebabkan terdapat perbezaan kurang ketara antara ARL luar kawalan bagi EWMA dan CUSUM.

Rujukan

- [1] S.L. Albin, L. Kang & G. Shea, *An X and EWMA Chart for Individual Observation*, Journal of Quality Technology, 29(1997), 41-48.
- [2] Mitra Amitava, *Fundamentals of Quality Control and Improvement, 2nd edition*, Macmillan Publishing Company, New York, 1998.
- [3] S.V. Crowder, *Design of EWMA Schemes*, Journal of Quality Technology, 21(1989), 155-162.
- [4] C. Montgomery Douglas, C. Runger George, F. Hubele Norma, *Engineering Statistics, 2nd edition*, John Wiley, New York, 2000, 448-470.
- [5] C. Montgomery Douglas, C. Runger George, *Applied Statistics and Probability for Engineers, 2nd edition*, John Wiley, New York 1999, 754-776.
- [6] C. Montgomery Douglas, *Introduction to Statistical Quality Control, 4th edition*, John Wiley, New York 2001, 153-206, 403-433.
- [7] W.D. Ewan & K.W. Kemp, *Sampling Inspection of Continuous Processes with no Autocorrelation between Successive Results*, Biometrika, 47(3&4)(1960), 363-380.
- [8] F.F. Gan, *An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts*, Journal of Quality Technology, 23(1991), 279-286.
- [9] J.M. Lucas & M.S. Saccucci, *Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*, Technometrics, 32(1)(1990), 1-29.
- [10] E.S. Page, *Continuous Inspection Schemes*, Biometrika, 41(1954), 100-115.
- [11] S.W. Roberts, *Control Charts Based on Geometrics Moving Averages*, Technometrics, 1(1959), 239-250.
- [12] P. Cod Ronald, K. Smith Jeffrey, *Applied Statistics and the SAS Programming Language, 4th edition*, 1997.