MATEMATIKA, 2006, Volume 22, Number 2, pp. 171–176

Penambahbaikan untuk Carta EWMA Multivariat
(An Enhancement for the Multivariate EWMA Chart)

[1]**Michael B.C. Khoo & S.J. Gun**
Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 Minden, Penang, Malaysia
e-mail: [1]mkbc@usm.my / mkbc@tm.net.my

Abstrak Carta kawalan kualiti ialah salah satu alat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kawalan kualiti. Carta kawalan digunakan untuk mengenalpasti punca-punca berlakunya suatu masalah. Kawalan kualiti bagi kebanyakan proses melibatkan lebih daripada satu pembolehubah yang berkorelasi. Ini dikenali sebagai kawalan kualiti multivariat. Carta kawalan EWMA multivariat (MEWMA) ialah suatu carta yang baik untuk mengesan anjakan kecil dalam vektor min bagi suatu proses multivariat. Kertas kerja ini mencadangkan penggunaan kaedah kebolehjadian maksimum untuk carta MEWMA dalam penganggaran masa sebenar berlakunya anjakan tetap dalam vektor min. Penggunaan kaedah penganggar masa anjakan tetap untuk carta MEWMA akan memanfaatkan jurutera kawalan kualiti dalam kawalan proses di industri.

Katakunci Carta EWMA multivariat (MEWMA); penganggar kebolehjadian maksimum; penganggar masa anjakan; isyarat luar kawalan; ralat Jenis-I.

Abstract *A quality control chart is one of the tools that is used to solve quality control problems. A control chart is used to identify the causes of a problem. Quality control for most processes involves more than one correlated variable. This is known as multivariate quality control. A multivariate EWMA (MEWMA) control chart is a good chart to detect a small shift in the mean vector of a multivariate process. This paper suggests the use of the maximum likelihood method on the MEWMA chart for the detection of the actual time of the occurrence of a permanent shift in the mean vector. The use of a time step change estimator on a MEWMA chart will benefit quality control engineers in process monitoring in industries.*

Keywords *Multivariate EWMA (MEWMA) chart; maximum likelihood estimator; time step change estimator; out-of-control signal; Type-I error.*

1 Pengenalan

Carta kawalan kualiti univariat seperti carta $\bar{X} - R$ dan $\bar{X} - S$ tidak dapat digunakan untuk mengawal setiap cirian kualiti secara berasingan untuk proses yang terdiri daripada data multivariat oleh sebab cirian-cirian kualiti tersebut mungkin berkorelasi. Pelbagai carta kawalan multivariat seperti carta T^2 Hotelling, EWMA multivariat (MEWMA) dan CUSUM multivariat (MCUSUM) telah digunakan dalam kawalan proses yang melibatkan data multivariat. Carta kawalan multivariat akan memberikan isyarat luar kawalan sebaik sahaja satu titik plot di atas had kawalan atasnya (UCL) atau dalam perkataan lain wujud satu titik sebarangan dengan nilai yang melebihi UCL. Usaha pencarian sebab-sebab terumpukkan akan dijalankan sebaik sahaja isyarat luar kawalan dikesan. Walaupun demikian, pencarian sebab-sebab terumpukkan pada masa isyarat tersebut dikesan adalah kurang berkesan oleh sebab anjakan mungkin sudah berlaku pada suatu masa yang lebih awal. Pencarian sebab-sebab terumpukkan sepatutnya dijalankan pada masa sebenar anjakan berlaku dan bukan pada masa isyarat luar kawalan dikesan.

Objektif kajian ini adalah untuk mencadangkan suatu teknik berdasarkan kaedah kebolehjadian maksimum untuk digunakan dengan carta MEWMA bagi menganggarkan masa sebenar berlakunya anjakan tetap dalam vektor min. Ini bermakna apabila isyarat luar kawalan dikesan oleh carta MEWMA pada masa T, kaedah ini akan digunakan dalam anggaran ke belakang (backward estimation) bermula dari masa T untuk mencari masa perubahan proses yang sebenar iaitu τ, yang mana $1 \leq \tau \leq T$. Fokus pencarian sebab-sebab terumpukkan perlu tertumpu pada masa τ dan bukan T. Kajian simulasi untuk menilai kebagusan kaedah tersebut akan dijalankan dengan menggunakan SAS versi 8.

2 Carta Kawalan EWMA Multivariat (MEWMA)

Carta kawalan EWMA multivariat (MEWMA) ialah carta kawalan alternatif kepada carta T^2 Hotelling yang diperkenalkan oleh Hotelling [1] untuk kawalan kualiti multivariat. Carta MEWMA ialah perkembangan langsung daripada carta EWMA univariat yang diperkenalkan oleh Roberts [2]. Andaikan cerapan-cerapan multivariat $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_t$ mempunyai taburan normal multivariat, $N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ yang secaman dan tak bersandar antara satu sama lain, yang mana

$$\boldsymbol{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tp})' \tag{1}$$

mewakili vektor multivariat $\boldsymbol{X}$ pada masa t dengan p cirian kualiti. Statistik MEWMA ditakrifkan sebagai (Lowry, Woodall, Champ dan Rigdon [3]):

$$\boldsymbol{W}_t = r\boldsymbol{X}_t + (1-r)\boldsymbol{W}_{t-1}. \tag{2}$$

Statistik MEWMA membenarkan pengguna menakrifkan pemberat, r bagi vektor rawak, $\boldsymbol{X}_t$. r ialah parameter yang mengawal magnitud pelicinan. Isyarat luar kawalan akan dikesan apabila

$$Q_t = \boldsymbol{W}_t' \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \boldsymbol{W}_t > \text{UCL} \tag{3}$$

dengan UCL > 0 dipilih berdasarkan ralat Jenis-1 yang dikehendaki. Prestasi carta MEWMA bergantung pada nilai parameter tak memusat berikut (Montgomery [4]; dan Prabhu dan Runger [5]):

$$\lambda^2 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} ((\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{4}$$

yang mana $\boldsymbol{\mu}_1$ dan $\boldsymbol{\mu}_0$ masing-masing mewakili vektor min bagi proses yang mengalami anjakan dan proses yang stabil.

3 Penggunaan Kaedah Penganggar Masa Anjakan Tetap bagi Carta MEWMA

Penggunaan kaedah ini adalah berlandaskan konsep bahawa pada permulaan, suatu proses multivariat berada dalam kawalan dengan setiap cerapannya bertaburan normal multivariat,

$N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ dengan vektor min, $\boldsymbol{\mu}_0$ dan matriks kovarians, $\boldsymbol{\Sigma}_0$ yang diketahui. Akan tetapi, selepas satu masa yang tidak diketahui, katakan τ, yang dikenali sebagai titik perubahan proses, vektor min untuk proses multivariat itu akan berubah daripada $\boldsymbol{\mu}_0$ kepada $\boldsymbol{\mu}_1$ yang mana $\boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\mu}_1$ ialah masing-masing vektor min bagi proses yang stabil dan proses yang berada di luar kawalan.

Selepas perubahan dalam proses berlaku, kita perlu menganggap bahawa vektor min proses multivariat itu akan kekal pada nilai $\boldsymbol{\mu}_1$ sehingga sebab-sebab terumpukkan telah dikesan dan pengubahsuaian telah dibuat. Biarkan $\boldsymbol{X}_T$ sebagai cerapan multivariat pertama yang berada di luar kawalan. Oleh itu, τ merupakan masa terakhir bagi cerapan multivariat yang berada dalam kawalan sebelum anjakan berlaku dan $\tau + 1$ merupakan masa anjakan mula berlaku. Dengan kata lain, $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_\tau$ merupakan cerapan-cerapan multivariat bagi proses yang berada dalam keadaan terkawal manakala $\boldsymbol{X}_{\tau+1}, \boldsymbol{X}_{\tau+2}, \ldots, \boldsymbol{X}_T$ pula merupakan cerapan-cerapan multivariat bagi proses yang mana anjakan telah berlaku.

Penerbitan kaedah penganggar masa anjakan tetap adalah berdasarkan kajian yang dijalankan oleh Pignatiello dan Calvin [6]. Kita menganggap bahawa perubahan dalam vektor min telah berlaku sebaik sahaja selepas masa τ (titik perubahan proses) dan perubahan ini dikesan pada masa T. Teknik penganggar kebolehjadian maksimum (MLE) digunakan untuk menerbitkan rumus-rumus yang diperlukan. Nilai τ yang memaksimumkan logaritma fungsi kebolehjadian yang disyorkan oleh Pignatiello dan Calvin [6] ialah

$$\hat{\tau} = \arg\ \text{maks}\ M_t \quad \text{dengan } t = 0, 1, \ldots, T-1 \tag{5}$$

yang mana

$$M_t = (T-t)\left(\bar{\boldsymbol{X}}_{t,T} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\right)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \left(\bar{\boldsymbol{X}}_{t,T} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\right). \tag{6}$$

Nilai $\hat{\tau}$ merupakan masa sebenar perubahan proses yang dianggarkan. Dalam persamaan (6), $\bar{\boldsymbol{X}}_{t,T} = \dfrac{1}{T-t} \sum\limits_{i=t+1}^{T} \boldsymbol{X}_i$ ialah vektor min yang dianggarkan daripada $T-t$ subkumpulan.

Penggunaan kaedah penganggar masa anjakan tetap bagi carta MEWMA adalah apabila carta MEWMA memberikan isyarat luar kawalan, nilai-nilai M_t untuk $0 \leq t \leq T-1$ akan dikira dengan menggunakan persamaan (6). Nilai t yang memaksimumkan M_t merupakan masa sebenar berlakunya anjakan tetap dalam vektor min.

4 Penilaian Prestasi Penganggar Masa Anjakan

Kajian simulasi akan dijalankan dengan menggunakan perisian SAS versi 8 bagi tujuan membandingkan masa purata anjakan yang diperoleh antara carta MEWMA berdasarkan kaedah penganggar masa anjakan dengan carta MEWMA yang asas. Kajian simulasi ini mempertimbangkan kes cerapan-cerapan bivariat yang merupakan ukuran-ukuran individu, yakni, saiz sampel, $n = 1$.

Vektor-vektor rawak untuk 100 cerapan bivariat pertama yang mewakili proses yang stabil dijana daripada taburan $N_2(\boldsymbol{\mu}_0,\ \boldsymbol{\Sigma}_0)$ yang mana $\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ dan $\rho = 0$. Cerapan-cerapan bivariat seterusnya yang mewakili proses di luar kawalan pula dijana daripada taburan $N_2(\ \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ yang mana $\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$. Nilai $\rho = 0$ dipertimbangkan di sini kerana prestasi carta MEWMA bergantung kepada nilai ρ hanya melalui punca kuasa dua parameter tak memusat

$$\lambda^2 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{7}$$

Masa purata sebenar anjakan yang dianggarkan dengan kaedah penganggar masa anjakan tetap akan diwakili dan dilabelkan sebagai $\bar{\hat{\tau}}$. Selain itu, masa purata apabila carta kawalan MEWMA menunjukkan suatu isyarat luar kawalan iaitu cerapan pertama yang plot di luar had kawalan akan diwakili oleh ERL (expected run length). Saiz anjakan yang dipertimbangkan meliputi nilai-nilai $\lambda = \delta$ yang kecil, sederhana dan besar iaitu

$$\delta \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0\}.$$

Nilai λ yang kurang daripada 2 adalah dianggap kecil manakala nilai λ yang dianggap besar pula adalah sekurang-kurangnya 4.5. Sebarang nilai λ yang berada dalam selang 2 hingga 4 pula dikatakan melibatkan saiz anjakan yang sederhana. Nilai-nilai $\bar{\hat{\tau}}$ dan ERL bagi setiap δ dikira berdasarkan 5000 larian simulasi yang dijalankan.

Program SAS juga ditulis untuk mencari kebarangkalian kaedah penganggar masa anjakan tetap menentukan masa anjakan dengan tepat dalam selang masa k cerapan antara masa berlakunya anjakan yang dianggarkan dan masa anjakan sebenar iaitu $|\hat{\tau} - \tau| \leq k$ bagi magnitud anjakan, $\lambda = \delta \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0\}$ berdasarkan $k \in \{0, 1, 2, ..., 20\}$. Notasi $\hat{\tau}$ dan τ masing-masing mewakili masa anjakan proses yang dianggarkan dan masa anjakan proses yang sebenar. Justeru, $|\hat{\tau} - \tau|$ memberikan perbezaan masa antara masa anjakan yang sebenar, τ dan masa anjakan yang dianggarkan, $\hat{\tau}$. Nilai $|\hat{\tau} - \tau|$ yang kecil mencerminkan situasi yang lebih baik oleh sebab ia menunjukkan bahawa masa anjakan yang dianggarkan, $\hat{\tau}$ adalah dekat dengan masa anjakan yang sebenar, τ. Kebagusan kaedah penganggar masa anjakan yang dicadangkan akan dinilai berdasarkan kebarangkalian, $P(|\hat{\tau} - \tau| \leq k)$, yang mewakili keupayaan kaedah ini untuk menganggarkan masa anjakan, $\hat{\tau}$ dalam lingkungan k cerapan daripada masa anjakan sebenar, τ. Untuk kes ini, 100 cerapan pertama yang bertaburan normal bivariat, $N_2(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ akan dijanakan bagi mewakili proses yang berada dalam keadaan terkawal. Disebabkan 100 cerapan bivariat yang pertama untuk proses yang stabil dijanakan, maka nilai $\tau = 100$. Prosedur mengira $P(|\hat{\tau} - \tau| \leq k)$ diulangi sebanyak 5000 kali bagi setiap nilai δ.

Keputusan simulasi bagi nilai $\bar{\hat{\tau}}$ dan ERL yang dikira diberikan dalam Jadual 1 manakala untuk $P(|\hat{\tau} - \tau| \leq k)$ dalam Jadual 2. Daripada keputusan dalam Jadual 1, didapati bahawa masa sebenar berlakunya anjakan yang dianggarkan berhampiran dengan nilai 100 iaitu, $\bar{\hat{\tau}} \approx 100$ bagi semua magnitud anjakan, δ yang ditetapkan. Keputusan ini menunjukkan bahawa kaedah yang digunakan adalah jitu dan berkesan. Selain itu, juga didapati bahawa apabila magnitud anjakan, δ semakin besar, anggaran masa sebenar anjakan adalah semakin hampir dengan 100. Dalam kajian yang dijalankan, boleh disimpulkan bahawa kaedah penganggar masa anjakan dapat memberikan masa anggaran yang hampir sama dengan masa sebenar berlakunya anjakan.

Berdasarkan keputusan simulasi dalam Jadual 2, didapati bahawa kebarangkalian kaedah penganggar masa anjakan menentukan masa anjakan dalam selang masa k cerapan adalah semakin hampir dengan 1 apabila saiz anjakan δ semakin besar. Bagi magnitud anjakan yang kecil, iaitu $\delta \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$, $P(|\hat{\tau} - \tau| \leq 0)$ adalah antara 0.0664 dan 0.582 manakala kebarangkaliannya bagi nilai anjakan sederhana, iaitu $\delta \in \{2.5, 3.0, 3.5, 4.0\}$ adalah antara 0.7014 dan 0.8972. Demikian juga, bagi magnitud anjakan besar, $\delta \in \{4.5, 5.0, 5.5, 6.0\}$, Jadual 1 : Keputusan Simulasi bagi $\bar{\hat{\tau}}$ dan ERL untuk Kes $p = 2$

Anjakan, δ	$\bar{\hat{\tau}}$	ERL
0.50	106.1138	174.0562
1.00	99.3104	114.2030
1.50	98.8856	105.9604
2.00	99.0314	103.7366
2.50	99.1088	102.7602
3.00	99.5588	102.2172
3.50	99.5476	101.8892
4.00	99.7294	101.6616
4.50	99.8212	101.4940
5.00	99.8258	101.3530
5.50	99.9480	101.2302
6.00	99.9582	101.1428

Jadual 2 : Keputusan Simulasi bagi $P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le k)$ untuk Kes $p = 2$

	δ=0.5	δ=1.0	δ=1.5	δ=2.0	δ=2.5	δ=3.0	δ=3.5	δ=4.0	δ=4.5	δ=5.0	δ=5.5	δ=6.0
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 0)$	0.0664	0.2294	0.4200	0.5820	0.7014	07896	0.8630	0.8972	0.9322	0.9624	0.9724	0.9836
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 1)$	0.1492	0.4286	0.6536	0.7896	0.8692	0.9176	0.9438	0.9622	0.9684	0.9864	0.9916	0.9942
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 2)$	0.2166	0.5524	0.7716	0.8724	0.9204	0.9450	0.9652	0.9776	0.9826	0.9914	0.9960	0.9974
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 3)$	0.2672	0.6416	0.8370	0.9084	0.9434	0.9556	0.9736	0.9832	0.9860	0.9938	0.9974	0.9982
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 4)$	0.3148	0.7044	0.8780	0.9304	0.9534	0.9640	0.9782	0.9860	0.9872	0.9952	0.9978	0.9988
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 5)$	0.3566	0.7506	0.9056	0.9422	0.9616	0.9688	0.9824	0.9884	0.9898	0.9958	0.9980	0.9990
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 6)$	0.3896	0.7880	0.9222	0.9514	0.9676	0.9736	0.9860	0.9898	0.9918	0.9962	0.9982	0.9990
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 7)$	0.4222	0.8174	0.9324	0.9578	0.9718	0.9766	0.9878	0.9908	0.9924	0.9966	0.9984	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 8)$	0.4534	0.8452	0.9414	0.9614	0.9746	0.9796	0.9888	0.9922	0.9928	0.9970	0.9988	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 9)$	0.4836	0.8662	0.9472	0.9658	0.9768	0.9814	0.9902	0.9932	0.9934	0.9974	0.9990	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 10)$	0.5118	0.8832	0.9514	0.9688	0.9790	0.9828	0.9908	0.9934	0.9940	0.9976	0.9990	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 11)$	0.5406	0.8988	0.9542	0.9708	0.9797	0.9844	0.9916	0.9938	0.9946	0.9982	0.9990	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 12)$	0.5664	0.9104	0.9576	0.9732	0.9806	0.9848	0.9922	0.9944	0.9948	0.9984	0.9992	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 13)$	0.5894	0.9216	0.9590	0.9748	0.9814	0.9862	0.9924	0.9948	0.9952	0.9986	0.9992	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 14)$	0.6074	0.9292	0.9638	0.9770	0.9824	0.9872	0.9930	0.9950	0.9956	0.9986	0.9994	0.9992
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 15)$	0.6270	0.9366	0.9685	0.9784	0.9836	0.9880	0.9934	0.9950	0.9958	0.9988	0.9996	0.9994
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 16)$	0.6484	0.9418	0.9647	0.9796	0.9844	0.9888	0.9934	0.9952	0.9958	0.9988	0.9996	0.9994
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 17)$	0.6648	0.9460	0.9688	0.9812	0.9852	0.9902	0.9940	0.9956	0.9958	0.9990	0.9996	0.9994
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 18)$	0.6830	0.9496	0.9704	0.9820	0.9864	0.9908	0.9946	0.9956	0.9958	0.9990	0.9996	0.9994
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 19)$	0.6998	0.9542	0.9724	0.9832	0.9872	0.9912	0.9946	0.9960	0.9962	0.9992	0.9996	0.9994
$P(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 20)$	0.7132	0.9582	0.9732	0.9848	0.9882	0.9918	0.9954	0.9964	0.9962	0.9992	0.9996	0.9994

kebarangkalian kaedah penganggar masa anjakan menentukan masa anjakan dengan tepat adalah antara 0.9322 dan 0.9836. Maka, boleh dikatakan bahawa semakin besar magnitud anjakan, ketepatan keadah penganggar masa anjakan menentukan masa anjakan yang sebenarnya adalah semakin meningkat.

5 Kesimpulan

Carta kawalan telah banyak digunakan untuk mengawal proses dan menentukan sama ada sesuatu proses berada dalam atau luar kawalan. Apabila carta kawalan menunjukkan isyarat luar kawalan, kita perlu mengesan sebab-sebab terumpukkan yang menyebabkan berlakunya variasi dalam proses. Namun, jika pengesanan sebab-sebab terumpukkan dilakukan secara meneka sahaja tanpa mengetahui masa sebenar berlakunya anjakan tetap, pembaziran masa dan kos akan berlaku. Dengan mengetahui masa sebenar berlakunya anjakan tetap, pengesanan sebab-sebab terumpukkan dapat dijalankan dengan lebih mudah. Hal ini membolehkan juru inspeksi kualiti mengambil tindakan pembetulan yang sewajarnya dengan serta merta untuk meningkatkan kualiti produk yang dihasilkan.

Rujukan

[1] H. Hotelling, *Multivariate Quality Control, Techniques of Statistical Analysis*, Eisenhart, Hastay dan Wallis (eds.), McGraw-Hill, New York, 1947.

[2] S.W. Roberts, *Control Chart Tests based on Geometric Moving Averages*, Technometrics, 1 (1959), 97–102.

[3] C.A. Lowry, W.H. Woodall, C.W. Champ dan S.E. Rigdon, *A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*, Technometrics, 34 (1992), 46–53.

[4] D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th. ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[5] S.S. Prabhu dan G.C. Runger, *Designing a Multivariate EWMA Control Chart*, Journal of Quality Technology, 29 (1997), 8–15.

[6] J.J. Pignatiello, Jr. dan J.A. Calvin, *Identifying the Time of a Step-Change with χ^2 Control Chart*, Quality Engineering, 13 (2001), 153–159.