MATEMATIKA, 1990, Jilid 6, no. , hlm 95-106,
c Jabatan Matematik, UTM.

ANTI SUBKUMPULAN t-KABUR

ABU OSMAN BIN MD TAP.

Jabatan Matematik
Pusat Pengajian Kuantitatif
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi , Selangor Darul Ehsan.
Malaysia

ABSTRAK

Biswas telah memperkenalkan konsep anti subkumpulan kabur menggunakan fungsi minimum mengikut takrif kumpulan kabur Rosenfeld. Kertas ini akan mentakrifkan konsep anti subkumpulan t-kabur melalui konorma segitiga sebagai dual kepada subkumpulan t-kabur yang dikaji oleh penulis. Sifat anti subkumpulan t-kabur akan dikaji dari segi hubungannya dengan sifat subkumpulan t-kabur.

ABSTRACT

Biswas introduced the concept of anti fuzzy subgroup using the minimum function based on Rosenfeld's definition of fuzzy subgroup. In this paper the concept of anti t-fuzzy subgroup is defined via the triangular conorm as a dual to t-fuzzy subgroup studied previously by the author. The properties of anti t-fuzzy subgroup are studied in relations to the properties of t-fuzzy subgroup.

1. PENGENALAN

Sejak teori set kabur diperkenalkan oleh Zadeh [12], subkumpulan kabur bagi kumpulan telah dikaji oleh ramai penulis seperti Rosenfeld [10], Anthony & Sherwood [6, 7], Sessa [11], Liu [9], Abu Osman [1, 2, 4, 5] dan lain-lain lagi. Kita akan mengambil takrif yang diberikan oleh Anthony & Sherwood [7] dan Abu Osman [1, 2, 4, 5]. Biswas [8] telah mentakrifkan anti subkumpulan kabur mengikut takrif Rosenfeld [10]. Kertas ini akan mengkaji anti subkumpulan t-kabur melalui konorma segitiga dalam semangat yang sama seperti Abu Osman [1, 4].

Kita akan melihat terlebih dahulu beberapa takrif dan sifat yang diperlukan kemudian.

1.1 Takrif. Suatu fungsi $T: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dinamakan *norma-t* jika memenuhi sifat untuk setiap $x, y, z \in [0,1]$,

i) $T(1,x) = x$;

ii) $T(x,y) = T(y,x)$;

iii) $T(x,y) \leq T(x,z)$ jika $y \leq z$;

iv) $T\Big(x, T(y,z)\Big) = T\Big(T(x,y), z\Big)$.

$\square$

Diketahui norma-t T mempunyai sifat berikut:

1.2. TEOREM ([3]) .

i) $T(0,x) = 0$;

ii) $T(x,y) \leq \min (x,y)$;

iii) $T\Big(T(w,x), T(y,z)\Big) = T\Big(T(w,y), T(x,z)\Big)$
$= T\Big(T(w,z), T(x,y)\Big)$.

$\square$

1.3. Takrif. Suatu fungsi $T^*: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, dinamakan *konorma-t* dit.krifkan sebagai

$$T^*(x,y) = 1 - ``(1-x, 1-y)$$
$$\text{untuk setiap } x,\ y \in [0,1]$$

□

Diketahui juga konorma-t mem.unyai sifat berikut:

1.4. TEOREM ([3]). Untuk :etiap $w,\ x,\ y,\ z \in [0,1]$, kita dapati

i) $T^*(0,x) = x$;
ii) $T^*(1,x) = 1$;
iii) $T^*(x,y) = T^*(y,x$;
iv) $T^*(x,y) \le T^*(x,z$ jika $y \le z$;
v) $T^*\Big(x, T^*(y,z)\Big) = '\,^*\Big(T^*(x,y), z\Big)$;
vi) maks $(x,y) \le T^*(:,y)$;
vii) $T(x,y) \le T^*(x,y)$;
viii) $T^*\Big(T^*(w,x), T^*(y,z)\Big) = T^*\Big(T^*(w,y), T^*(x,z)\Big)$
$= T^*\Big(T^*(w,z), T^*(x,y)\Big)$.

□

1.5 Takrif Misalkan X su:tu set. *Set kabur* bagi X ialah fungsi $\mu : X \longrightarrow [0,1]$ lengan gred keahlian $\mu(x)$ untuk setiap $x \in X$.

□

1.6. Takrif. Misalkan G sua.u kumpulan dan T suatu norma-t. Fungsi $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ dinamakan *subkumpulan t-kabur bagi kumpulan* G jika da, hanya jika untuk setiap $x,\ y \in G$,

i) $\mu(xy) \ge T\Big(\mu(x), \mu(:)\Big)$;

ii) $\mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$;

iii) $\mu(e) = 1$ dengan e sebagai identiti bagi G.

□

Bentuk kesetaraannya adalah seperti berikut:

1.7. TEOREM ([1]). $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ adalah subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$,

i) $\mu\left(xy^{-1}\right) \geq T\left(\mu(x), \mu(y)\right)$;

ii) $\mu(e) = 1$ dengan e sebagai identiti bagi G.

□

2. ANTI SUBKUMPULAN t-KABUR

Kita akan takrifkan anti subkumpulan t-kabur sebagai dual kepada takrif subkumpulan t-kabur yang diberikan oleh Anthony & Sherwood ([7]), Abu Osman ([1, 2, 4, 5]). Kita akan gunakan T sebagai norma-t dan T^* sebagai konorma-t dalam kertas ini seterusnya.

2.1. Takrif. Misalkan G suatu kumpulan. Set kabur μ bagi G dinamakan *anti subkumpulan t-kabur bagi G* jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$,

i) $\mu(xy) \leq T^*\left(\mu(x), \mu(y)\right)$;

ii) $\mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$;

iii) $\mu(e) = 0$ dengan e sebagai identiti bagi G.

□

Seperti Teorem 1.7, langsung kita dapat bentuk kesetaraan bagi Takrif 2.1.

2.2. **TEOREM.** $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ adalah anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$,

i) $\mu\left(xy^{-1}\right) \le T^{*}\left(\mu(x), \mu(y)\right)$;

ii) $\mu(e) = 0$ dengan e sebagai identiti bagi G.

□

2.3. **TEOREM.** μ adalah subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G jika dan hanya jika pelengkapnya μ^{P} adalah anti subkumpulan t-kabur bagi G.

Bukti. Misalkan μ subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G. Maka untuk setiap $x, y \in G$,

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \ge T\left(\mu(x), \mu(y)\right) .$$

Oleh itu $1-\mu^{P}\left(xy^{-1}\right) \ge T\left(1-\mu^{P}(x),\ 1-\mu^{P}(y)\right)$

sehingga

$$\mu^{P}\left(xy^{-1}\right) \le T^{*}\left(\mu^{P}(x), \mu^{P}(y)\right) .$$

Oleh kerana $\mu(e) = 1$, maka $\mu^{P}(e) = 1-\mu(e) = 1-1 = 0$. Jadi μ^{P} merupakan anti subkumpulan t-kabur bagi G. Akasnya boleh dibuktikan dengan cara yang serupa.

□

2.4. **KOROLARI.** μ adalah anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G jika dan hanya jika pelengkapnya μ^{P} merupakan subkumpulan t-kabur bagi G.

□

Sifat berikut diketahui benar dalam kajian subkumpulan t-kabur.

2.5. TEOREM ([1]). Persilangan sebarang bilangan subkumpulan t-kabur bagi G adalah juga subkumpulan t-kabur bagi G.

$\square$

Sekarang kita lihat sifat dualnya pula.

2.6. TEOREM. Kesatuan sebarang bilangan anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G juga anti subkumpulan t-kabur bagi G.

Bukti. Misalkan $\{\mu_i\}$ pungutan anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G. Maka $\{\mu_i^p\}$ adalah pungutan subkumpulan t-kabur bagi G. Oleh itu dengan Teorem 2.5. di atas, $\left(\bigcup_i \mu_i\right)^p = \bigcap_i \left(\mu_i^p\right)$ adalah subkumpulan t-kabur bagi G. Jadi $\bigcup_i \mu_i$ merupakan anti subkumpulan t-kabur bagi G.

$\square$

2.7. CATATAN. Perhatikan Teorem 2.6. boleh juga dibuktikan secara langsung seperti Teorem 2.5.

$\square$

2.8. Takrif. Jika μ anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G sehinggakan $\mu(xy) = \mu(yx)$ untuk setiap $x, y \in G$, maka μ dinamakan *anti subkumpulan t-kabur normal bagi* G.

$\square$

2.9. TEOREM. Misalkan μ anti subkumpulan minm-kabur normal bagi kumpulan G. Misalkan $E_k = \{x \in G \mid \mu(x) \leq k\}$ untuk $k \in [0,1]$. Maka E_k merupakan subkumpulan normal bagi G.

Bukti. Yang E_k subkumpulan bagi G telah dibuktikan oleh Biswas [7].

Sekarang misalkan $x \in E_k$ dan $z \in G$, maka

$$\mu\left(zxz^{-1}\right) = \mu\left((zx)z^{-1}\right) = \mu\left(z^{-1}(zx)\right) = \mu(x) \leq k$$

sehinggakan $zxz^{-1} \in E_k$. Oleh itu E_k merupakan subkumpulan normal bagi G.

$\square$

2.10. TEOREM. Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur normal bagi kumpulan G. Maka $H = \{x \in G \mid \mu(x) = 0\}$ merupakan subkumpulan normal bagi G.

Bukti. Misalkan $x, y \in H$. Maka

$$\mu(xy^{-1}) \leq T^{*}\left(\mu(x), \mu(y)\right) = T^{*}(0,0) = 0$$

sehinggakan $xy^{-1} \in H$ dan dengan itu H merupakan subkumpulan bagi G.

Sekarang jika $x \in H$, $z \in G$ dan μ normal, maka

$$\mu(zxz^{-1}) = \mu\left((zx)z^{-1}\right) = \mu\left(z^{-1}(zx)\right) = \mu(x) = 0$$

sehinggakan $zxz^{-1} \in H$ dan dengan itu H merupakan subkumpulan normal bagi G.

$\square$

2.11. TEOREM. Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G dan $N = \{x \in G \mid \mu(xz) = \mu(zx)$ untuk setiap $z \in G\}$. Maka N adalah subkumpulan bagi G.

Bukti. Misalkan $x, y \in N$ dan $z \in G$.

Maka $\mu\left((xy^{-1})z\right) = \mu\left(x(y^{-1}z)\right) = \mu\left((y^{-1}z)x\right)$

$= \mu\left(y^{-1}(zx)\right) = \mu\left((zx)y^{-1}\right) = \mu\left(z(xy^{-1})\right)$

sehinggakan $xy^{-1} \in N$. Jadi N merupakan subkumpulan bagi G.

$\square$

3. ANTI SUBKUMPULAN t-KABUR DI BAWAH PEMETAAN

Pengaruh pemetaan ke atas set kabur dan subkumpulan kabur sering mendapat perhatian pengkaji seperti Zadeh [12], Rosenfeld [10], Anthony & Sherwood [6], Sessa [11], Abu Osman [1, 4, 5] dan lain-lain lagi. Kita akan melihat pula pengaruh pemetaan ke atas anti subkumpulan t-kabur. Sebelum itu kita ingat kembali takrif imej dan praimej bagi set kabur.

3.1. Takrif. Misalkan μ set kabur bagi set X dan f suatu fungsi yang tertakrif pada X, maka *imej bagi μ di bawah* f, μ_f, ialah set kabur bagi f(X) yang ditakrifkan sebagai

$$\mu_f(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) \qquad \text{untuk} \quad y \in f(X).$$

Sebaliknya jika γ set kabur bagi f(X), maka *praimej bagi γ di bawah* f, μ, ditakrifkan sebagai

$$\mu(x) = \gamma(f(x)) \qquad \text{untuk } x \in X.$$

$\square$

3.2. TEOREM. Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi kumpulan G dengan konorma-t selanjar T^* dan f homomorfisme pada G. Maka μ_f, imej bagi μ di bawah f, merupakan anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi kumpulan f(G).
Tambahan pula jika γ anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi f(G), maka praimej bagi γ di bawah homomorfisme f merupakan anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi G.

Bukti Oleh kerana μ anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi G, maka μ^P merupakan subkumpulan t-kabur (normal) bagi G. Maka dengan Abu Osman [1, 4], μ_f^P merupakan subkumpulan t-kabur (normal) bagi f(G). Oleh itu $\mu_f = \left(u_f^P\right)^P$ merupakan anti subkumpulan t-kabur (normal) bagi f(G). Teknik yang sama boleh digunakan bagi praimej.

□

Sekarang, kita lihat pengaruh translasi (kiri, kanan) dan automorfisme terkedalam seperti yang dikaji oleh Abu Osman [1, 4]. Kita ingat dahulu takrif berikut.

3.3. Takrif. Misalkan G suatu kumpulan. Untuk $a \in G$, kita takrifkan

$\psi_a : x \longrightarrow ax$ sebagai *translasi kiri* G ;

$\lambda_a : x \longrightarrow xa$ sebagai *translasi kanan* G ;

$\mathcal{J}_a : x \longrightarrow xax^{-1}$ sebagai *automorfisme ke dalam bagi* G.

□

3.4. **TEOREM.** Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G dan $a \in G$. Maka (masing-masing) imej bagi μ di bawah ψ_a, λ_a, $\mathcal{J}_a$, yang dilambangkan (masing-masing) dengan $\psi_a(\mu) = a\mu$, $\lambda_a(\mu) = \mu a$, $\mathcal{J}_a(\mu) = a\mu a^{-1}$, memenuhi sifat $a\mu(x) = \mu(a^{-1}x)$, $\mu a(x) = \mu(xa^{-1})$ dan $a\mu a^{-1}(x) = \mu(a^{-1}xa)$ untuk setiap $x \in G$.

Bukti. Langsung daripada takrif.

□

Seperti pembuktian yang setara di dalam Abu Osman [4], dapat kita tunjukkan sifat berikut.

3.5. **TEOREM.** Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G. Maka yang berikut adalah setara:

i) μ anti subkumpulan t-kabur normal ;

ii) $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in G$;

iii) $a\mu = \mu a$ untuk setiap $a \in G$;

iv) $a\mu a^{-1} = \mu$ untuk setiap $a \in G$.

□

3.6. **TEOREM.** Misalkan μ anti subkumpulan t-kabur bagi kumpulan G. Misalkan $a \in H = \{x \in G | \mu(x) = 0\}$. Jika γ merupakan imej bagi μ di bawah setiap ψ_a, λ_a, $\mathcal{J}_a$ di dalam Takrif 3.3. di atas, maka $\gamma = \mu$.

Bukti Misalkan $x \in G$ dan γ imej bagi μ di bawah ψ_a. Maka

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \sup_{z \in \psi_a^{-1}(x)} \mu(z) = \mu(a^{-1}x) \\ &\le T^*\big(\mu(a), \mu(x)\big) = T^*\big(0, \mu(x)\big) = \mu(x) = \mu(aa^{-1}x)\end{aligned}$$

$$\leq T^{*}\left(\mu(a),\mu(a^{-1}x)\right) = T^{*}\left(0,\mu(a^{-1}x)\right)$$

$$= \mu(a^{-1}x) = \gamma(x).$$

Oleh itu $\gamma = \mu$.

Cara yang serupa dilakukan untuk pembuktian imej bagi μ di bawah λ_a dan $\mathcal{J}_a$.

$\square$

PENGHARGAAN

Penulis ingin merakamkan ucapan terima kasih kepada Universiti Kebangsaan Malaysia yang telah membenarkan beliau bercuti sabatikal.

RUJUKAN

[1] M.T. Abu Osman, Some properties of fuzzy subgroups. Sains Malaysiana 13(2), (1984), 155-163.

[2] M.T. Abu Osman, On the direct product of fuzzy subgroups. Fuzzy Sets and Systems 12, (1984), 87-91.

[3] M.T. Abu Osman, Pengoperasian teritlak pada set Kabur. Matematika UTM 2(1), (1986), 19-30.

[4] M.T. Abu Osman, Subkumpulan kabur normal. Prosidang Simposiumm Kebangsaan Sains Matematik Kedua, UKM (1986), 186-195.

[5] M.T. Abu Osman, On some product of fuzzy subgroups. Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 79-86.

[6] J.M. Anthony & H. Sherwood, Fuzzy groups redefined. J. Maths. Anal. Appl. 69 (1979), 124-130.

[7] J.M. Anthony & H. Sherwood, A characterization of fuzzy subgroups. Fuzzy Sets and System 7 (1982), 297-305.

[8] R. Biswas, Fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups. Fuzzy Sets and Systems 35 (1990), 121-124.

[9] W.J. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), 133-139.

[10] A.Rosenfeld, Fuzzy Groups. J. Maths Anal. Appl. 35 (1971), 512-517.

[11] S. Sessa, On fuzzy subgroups and fuzzy ideals under triangular norms. Fuzzy Sets and Systems 13 (1984), 95-100.

[12] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets. J. Inform Control 8 (1965), 338-353.