MATEMATIKA, 1990, Jilid 6, no.2, hlm 85-93,

Penyelesian Bentuk Wronskian bagi Persamaan KdV dan Benjamin-Ono Dengan Menggunakan Persamaan BKT.

Oleh
Mukheta bin Isa
Jabatan Matematik
Universiti Teknologi Malaysia

Abstrak

Penyelesaian N-soliton bagi persamaan bendalir kedalaman terhingga (BKT) diolah dibawah had tertentu untuk mendapatkan penyelesaian bentuk Wronskian bagi persamaan KdV dan Benjamin-Ono.

1. Pendahuluan

Matsuno[1] telah memperlihatkan bahawa persamaan bendalir kedalaman terhingga (BKT),

$$U_t + 2UU_x + G[U_{xx}] = 0 \tag{1.0}$$

dengan

$$G[f(x)] = \frac{\lambda}{2} P\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\coth \frac{\pi\lambda}{2}(x' - x) - \mathrm{sgn}(x'-x)\right\} f(x')\,dx' \tag{1.1}$$

boleh diturunkan kepada persamaan KdV dan persamaan Benjamin-Ono.

Dalam (1.1) P menandakan nilai prinsipal bagi kamiran yang berkenaan, λ^{-1} merujuk kepada jarak antara dasar bendalir dan permukaan gelombang berkenaan.

Dalam kes KdV, iaitu untuk gelombang panjang dipermukaan air cetek, maka diperlukan $\lambda^{-1} \longrightarrow 0$, iaitu $\lambda \longrightarrow \infty$. Dengan mengambil

$\lambda \longrightarrow \infty$ dan menggunakan

$$X = \lambda^{1/2} x, \qquad T = \lambda^{1/2} t \tag{1.3}$$

maka persamaan BKT (1.0) menjadi

$$U_T + 2UU_X + \frac{1}{3} U_{XXX} = 0 \tag{1.4}$$

iaitu persamaan KdV yang menjadi asas kepada perkembangan teori soliton.

Untuk air dalam pula, $\lambda \longrightarrow 0$, (1.0) memberikan persamaan Benjamin-Ono

$$U_t + 2UU_X + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x',t)}{x' - x} dx' = 0. \tag{1.5}$$

Dalam Mukheta[2] telah diperlihatkan bahawa penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT (1.0) boleh ditulis sebagai

$$U = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{G}{F}\right), \qquad i = \sqrt{-1} \tag{1.6}$$

dengan F dan G masing-masing adalah penentu berbentuk Wronskian yang boleh ditulis sebagai

$$F = (\widehat{N-1}) \tag{1.7}$$

$$G = \sum_{r=0}^{N} \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^r (\widehat{r-1}, r+1, r+2, \ldots, N) \tag{1.8}$$

yang ditakrifkan oleh fungsi ϕ_n, $n = 1,2,\ldots,N$ dengan

$$
\left.
\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \exp\left(-\theta_n\right) + B_n \exp\left(\theta_n^{*}\right) \\
\theta_n &= K_n\left(x + \frac{i}{\lambda} + iK_n t - \delta_n\right) \\
K_n &= \frac{1}{2}\left(\lambda\gamma_n + ia_n\right) \\
a_n &= \lambda\left(1 - \gamma_n \mathrm{Kot}\gamma_n\right) \\
A_n &= \left[\left(K_n + K_n^{*}\right) \prod_{p\neq n}^{N} \left(K_p - K_n\right)\right]^{-1} \\
B_n &= \left[\prod_{p=1}^{N} \left(K_p + K_n\right)\right]^{-1}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1.9)
$$

dengan δ_n dan γ_n pemalar dan $0<\gamma_n<\pi$.

Dalam (1.7) dan (1.8) tandaan ^ menunjukkan terbitan bagi ϕ_n terhadap x bermula daripada peringkat 0 hinggalah kepada peringkat yang ditunjukkan oleh nombor dibawahnya. Nombor-nombor lain yang berada dalam tandaan kurungan Wronskian itu menandakan peringkat bagi terbitan ϕ_n terhadap x yang seterusnya.

Perbincangan seterusnya akan memperlihatkan bagaimana penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT [ruj. per. (1.6)-(1.9)] boleh diturunkan kepada penyelesaian N-Soliton bagi persamaan KdV dan persamaan Benjamin-Ono dalam bentuk Wronskian.

2. Persamaan KdV

Penyelesaian N-Soliton dalam bentuk Wronskian bagi persamaan KdV telah diperolehi oleh Freeman[3]. Analisis yang dikemukakan disini adalah untuk tujuan perbandingan *dengan* keputusan yang ada dalam Freeman[3].

Jika diperlihatkan persamaan KdV (1.4), ianya telah diterbitkan daripada persamaan BKT (1.0) dengan menggunakan penjelmaan (1.3). Ini bermakna kita perlu menetapkan nilai $\lambda^{1/2}\gamma_n$ dan $\lambda^{1/2}\delta_n$ pada peringkat satu ketika melakukan proses $\lambda \longrightarrow \infty$ dan $\gamma_n << 1$.

Dengan mengambil had $\lambda \longrightarrow \infty$, $\gamma_n << 1$ dan menetapkan $\lambda^{1/2}\gamma_n$ dan $\lambda^{1/2}\delta_n$ kita memperolehi

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\lambda\gamma_n^2}{3} = \frac{\left(\lambda^{1/2}\gamma_n\right)^2}{3} \\ K_n &= \frac{\lambda\gamma_n}{2}\left(1 + \frac{i\gamma_n}{3}\right) \\ A_n &= 2^{N-1}\lambda^{-N/2}\, P_n^{-1}\left\{\prod_{l\neq n}^{N}\left(P_l - P_n\right)\right\}^{-1} \\ B_n &= 2^{N-1}\lambda^{-N/2}\, P_n^{-1}\left\{\prod_{l\neq n}^{N}\left(P_l + P_n\right)\right\}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$\phi_n = 2^{N-1}\lambda^{-N/2}\, P_n^{-1}\, e^{-i\lambda^{1/2}P_n^2 T/4}\left\{C_n \exp\left(-\frac{\xi_n'}{2}\right) + D_n \exp\left(\frac{\xi_n'}{2}\right)\right\} \tag{2.2}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned}
C_n &= \left\{ \prod_{l \neq n}^{N} \left(P_l - P_n \right) \right\}^{-1} \\
D_n &= \left\{ \prod_{l \neq n}^{N} \left(P_l + P_n \right) \right\}^{-1} \\
\xi_n' &= P_n \left(X - \frac{P_n^2}{3} T - d_n' \right) \\
P_n &= \lambda^{1/2} \gamma_n \\
d_n' &= \lambda^{1/2} \delta_n
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Bagaimanapun memandangkan bahawa penyelesaian akhir N-Soliton boleh ditulis dalam bentuk (1.6) maka faktor yang ada pada ungkapan ϕ_n [ruj. (2.2)] boleh dibuang dan seterusnya kita tulis

$$\phi_n = \text{kosh} \left(\frac{\xi_n}{2} \right) \tag{2.4}$$

dengan

$$\xi_n = P_n \left(X - \frac{P_n^2}{3} T - d_n \right) \tag{2.5}$$

$$d_n = \frac{1}{2} \left[2d_n' - \log C_n + \log D_n \right]. \tag{2.6}$$

Sekarang, daripada (1.7) dan (1.8), kita memperolehi

$$\frac{G}{F} = \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^N \left[1 + \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N-2},N)}{(\hat{N-1})} + O(\lambda^{-2})\right] \tag{2.7}$$

Maka seterusnya,

$$\log\left(\frac{G}{F}\right) = \log\left\{1 + \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N-2},N)}{(\hat{N-1})} + O(\lambda^{-2})\right\}$$

$$= \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N-2},N)}{(\hat{N-1})} + O(\lambda^{-2})$$

iaitu setelah meninggalkan faktor $\left(\frac{i\lambda}{2}\right)^N$ dalam (2.7) dengan alasan ianya tidak mempengaruhi penyelesaian akhir (1.6). Dengan itu (1.6) menjadi

$$U = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N-2},N)}{(\hat{N-1})}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x} \frac{(\hat{N-2},N)}{(\hat{N-1})}$$

$$= 2\frac{\partial^2}{\partial X^2} \log(\hat{N-1}) \tag{2.8}$$

dengan ingatan bahawa

$$\frac{\partial}{\partial X}(\hat{N-1}) = (\hat{N-2},N) \text{ dan } X = \lambda^{1/2}x.$$

Keputusan yang diperolehi diatas, iaitu (2.8), (2.4) adalah sama dengan keputusan yang telah diperolehi oleh Freeman[3] bagi persamaan KdV (1.4).

3. Persamaan Benjamin-Ono

Persamaan Benjamin-Ono (1.5) boleh didapati daripada persamaan BKT dalam had $\lambda \longrightarrow 0$ dan

$$\gamma_n = \pi\left(1 - \frac{\lambda}{V_n}\right), \tag{3.1}$$

(lihat Matsuno[1]). Dalam (3.1), V_n adalah suatu parameter yang menentukan soliton ke-n bagi persamaan Benjamin-Ono.

Dengan menggunakan $\lambda \longrightarrow 0$ beserta dengan γ_n yang diberikan oleh (3.1), kuantiti-kuantiti dalam (1.9) boleh dikira untuk menghasilkan

$$a_n = \lambda\left(1 - \frac{\pi^2\lambda^2}{3V_n^2}\right) + O(\lambda^2)$$

$$K_n = \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\lambda^2\pi}{2V_n} + i\left(\frac{V_n}{2} - \frac{\lambda^2\pi^2}{6V_n}\right) + O(\lambda^3)$$

$$A_n = \left[\pi\lambda \prod_{p\neq n}^{N} \frac{i}{2}\left(V_p - V_n\right)\right]^{-1}$$

$$B_n = \left[\pi\lambda \prod_{p\neq n}^{N} \frac{i}{2}\left(V_p - V_n\right)\right]^{-1}\left[1 + i2\pi\lambda\alpha_n\right]$$

$$\text{dengan } \alpha_n = \sum_{p\neq n}^{N} \frac{1}{V_p - V_n},$$

$$\phi_n = i\left\{-e^{\frac{\pi\lambda}{2}\left(\frac{i}{V_n}-\xi_n\right)} + (1 + i2\pi\lambda\alpha_n)e^{-i\lambda\left(\frac{i}{V_n}-\xi_n\right)}\right\} e^{-\frac{iV_n}{2}\eta_n} \tag{3.2}$$

$$\text{dengan } \xi_n = x - V_n t - \delta_n,\ \eta_n = x - \frac{V_n t}{2} - \delta_n. \tag{3.3}$$

Daripada (1.8) pula, mudah untuk kita melihat bila $\lambda \longrightarrow 0$, bahawa

$$G = (1,\ 2,\ \ldots,\ N) = (\tilde{N}). \tag{3.4}$$

Dalam (3.4) tandaan ~ bermaksud bahawa penentu berkenaan terdiri daripada lajur-lajur yang bermula dengan terbitan ϕ_n peringkat 1 pada lajur pertama, peringkat 2 pada lajur kedua sehinggalah peringkat yang ditunjukkan oleh nombor dibawahnya untuk lajur yang berkenaan.

Jika dirumuskan perbincangan diatas, penyelesaian N-Soliton bagi persamaan Benjamin-Ono boleh ditulis sebagai

$$U = i\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(\tilde{N})}{(\widehat{N-1})}\right\} \tag{3.5}$$

dengan penentu bentuk Wronskian ditakrifkan oleh fungsi ϕ_n, $n = 1,2,\ldots,N$ yang diberikan oleh (3.2).

4. Kesimpulan

Dalam perbincangan diatas kita telah melihat bagaimana penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT diturunkan kepada penyelesaian N-Soliton bagi persamaan KdV dan juga persamaan Benjamin-Ono dalam bentuk penentu Wronskian. Keputusan yang diperolehi ini dengan sendirinya menjawab persoalan yang telah dikemukakan oleh Matsuno[4] yang menyatakan bahawa penyelesaian N-Soliton bagi persamaan Benjamin-Ono tidak boleh ditulis dalam bentuk Wronskian.

Rujukan

[1] Y. Matsuno, The Bilinear Transformation Method, Academic Press, Tokyo, 1984.

[2] Mukheta bin Isa, Penyelesaian persamaan BKT dalam bentuk Wronskian: dlm prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-IV (1990), 113-121.

[3] N.C. Freeman, Soliton solutions of nonlinear evolution equations, IMA J.Appl.Math. 32 (1984), 125-145.

[4] Y. Matsuno, A direct proof of the N-Soliton solution of the Benjamin-Ono equation by means of Jacobi's formula, J.Phys.Soc.Japan 57 (1988), 1924-1929.