MATEMATIKA,1990,Jilid 6,no.1,hlm.15-28

KAEDAH EKSTRAPOLASI UNTUK PERSAMAAN PENGALIRAN HABA

oleh

Mohd. Salleh Sahimi
Chin Choong Wan*
Jabatan Matematik
Pusat Pengajian Kuantitatif
Universiti Kebangsaan Malaysia

Abstrak

Kertas ini memperihalkan perluasan penerapan kaedah ekstrapolasi daripada persamaan pembeza biasa (Gragg [2]) kepada persamaan pembeza separa, khususnya persamaan pengaliran haba. Ini terlaksana menerusi kaedah garis dan pendiskretan tidak tersirat terhadap terbitan-terbitan di dalam persamaan tersebut. Didapati bahawa penyelesaian berangkanya adalah lebih jitu daripada skema tersirat penuh dan Crank-Nicolson untuk beberapa nisbah jaring λ tertentu. Ujikaji berangka memperlihatkan kaedah ekstrapolasi adalah stabil untuk $\lambda \leq 0.5$.

Abstract

The formulation of the extrapolation method is extended from ordinary differential equations (Gragg [2]) to partial differential equations especially the heat flow equation. It is implemented using the method of lines and explicit discretization of the derivatives in the above mentioned equation. It is found that the numerical method is more accurate than the fully implicit and Crank-Nicolson schemes for a number of mesh ratios λ. The extrapolation method is stable for $\lambda \leq 0.5$.

Bercuti belajar dari Institiut Teknologi Mara.

1. **Pendahuluan**

Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o \tag{1.1}$$

Kaedah Gragg [2] untuk menyelesaikan masalah ini diberikan oleh

$$h_s = \frac{H}{N_s}, \quad N_s \text{ genap}$$

$$y_o = y(x_o)$$

$$y_1 = y_o + h_s f(x_o, y_o) \tag{1.2}$$

$$y_{m+2} - y_m = 2h_s f(x_{m+1}, y_{m+1}), \quad m = 0,1,2, \ldots, N_s - 1$$

$$y(x_o + H; \ h_s) = \frac{1}{4} y_{N_s+1} + \frac{1}{2} y_{N_s} + \frac{1}{4} y_{N_s-1}$$

dengan H panjang langkah asas. Jika pengiraan (1.2) diulang untuk jujukan menokok integer positif N_s, $s = 0, 1, \ldots, S$ dengan S suatu integer yang ditetapkan untuk menentukan banyaknya kali H dikecilkan, maka proses pengekstrapolasian polinomial dapat diterapkan untuk mencapai kejituan penghampiran yang lebih tinggi. Ini dapat dilakukan menerusi rumus

$$a_s^{(0)} = y(x_o + H; \ h_s) \tag{1.3}$$

$$a_s^{(m)} = a_s^{(m-1)} + \frac{a_{s+1}^{(m-1)} - a_s^{(m-1)}}{\left[\dfrac{h_s}{h_{m+s}}\right]^2 - 1}, \quad m = 1,2, \ldots, N_s-1, \quad s = 0,1, \ldots, S \tag{1.4}$$

dengan peringkat kejituan $O(h_s^{2m+2})$. Penghampiran-penghampiran ini sebenarnya ialah kemasukan pepenjuru dalam jadual seperti berikut:

Jadual 1 : Kedudukan $a^{(m)}$

h_0	$a_o^{(0)}$				
h_1	$a_1^{(0)}$	$a_o^{(1)}$			
h_2	$a_2^{(0)}$	$a_1^{(1)}$	$a_o^{(2)}$		
h_3	$a_3^{(0)}$	$a_2^{(1)}$	$a_1^{(2)}$	$a_o^{(3)}$	
h_4	$a_4^{(0)}$	$a_3^{(1)}$	$a_2^{(2)}$	$a_1^{(3)}$	$a_o^{(4)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \;\ddots$

Lazimnya jujukan $\{N_s\}$ yang dipilih ialah $\{2,4,6,8,12,16,24, \ldots\}$ dan $\{2,4,8,16,32,64, \ldots\}$. Satu alkhwarizmi untuk mengira kemasukan jadual di atas ialah, dengan menetapkan ε sebagai kriterium penumpuan,

1. Uji adakah $|a_o^{(m)} - a_o^{(m-1)}| \le \varepsilon$?

2. Jika ya, berhenti. Ambil $a_o^{(m)}$ sebagai penghampiran bagi $y(x_o + H)$ dan tandakan dengan $y^{*}(x_o + H;H)$.

3. Jika tidak, teruskan pelelaran sehingga menumpu atau sehingga $s = S$ dan ambil $a_o^{(N_s-1)}$ sebagai penghampiran bagi $y(x_o + H)$.

Tatacara di atas diulang pada titik asas berikutnya, $x_o + 2H$ dengan mempertimbangkan masalah nilai awal yang baru $y' = f(x,y)$, $y(x_o + H) = y^*(x_o + H; H)$ dan seterusnya untuk titik-titik yang lain.

2. Perluasan Kepada Persamaan Terbitan Separa

Pertimbangkan secara khusus, persamaan pengaliran haba,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (2.1)$$

dengan syarat awal dan sempadan yang diberikan. Menerusi kaedah garis, kita diskretkan terbitan ruang (dengan beza pusatan) dan biarkan masa t sebagai pembolehubah selanjar untuk menghasilkan sistem persamaan pembeza biasa peringkat pertama.

$$\frac{dU_i(t_j)}{dt} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U_{i-1}(t_j) - 2U_i(t_j) + U_{i+1}(t_j)\right] \qquad (2.2)$$

dengan $i = 1, \ldots, M-1$ dan M ialah bilangan titik dalaman pada selang (x_o, x_M). Indeks i dan j adalah masing-masing terhadap jarak x dan masa t dan Δ menandakan tokokan pembolehubah yang berkaitan. Persamaan (2.2) dapat diringkaskan sebagai

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right] \qquad (2.3)$$

atau

$$\frac{dU_i}{dt} = f(t_j, U_i) \tag{2.4}$$

dengan $U_o = U(t_o)$. Jelas daripada (2.3) dan (2.4) bahawa pada setiap paras masa t, teknik ekstrapolasi di atas dapat diterapkan pada setiap titik x (atau garis i) yang terletak pada rangkaian grid seragam. Tatacara pengiraan ini diperihalkan di dalam alkhwarizmi berikut:

Tetapkan s, M, q, δ

Untuk $j = 0, 1, 2, \ldots, s$ lakukan

Untuk $i = 1, 2, \ldots, M$ lakukan

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right]$$

$$= f(t_j, U_i)$$

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t\ .$$

Untuk $k = 0, 1, \ldots, q$ lakukan

$$(\Delta t)_k = \frac{\Delta t}{N_k}\ , \quad N_k = 2^{k+1}$$

$$U_{i(0)} = U_{i(t_j)}$$

$$U_{i(1)} = U_{i(0)} + (\Delta t)_k\ f\left(t_j, U_{i(0)}\right)$$

Untuk $n = 0, 1, \ldots, N_k - 1$ lakukan

$$U_{i(n+2)} = U_{i(n)} + 2(\Delta t)_k \; f\left(t_j,\ U_{i(n+1)}\right)$$

teruskan untuk pelelaran n

$$U_i(t_{j+1},\ (\Delta t)_k) = \frac{1}{4} U_i(N_k+1)\ \frac{1}{2} U_i(N_k)$$
$$+ \frac{1}{4} U_i(N_k-1)$$
$$= a_k^{(0)} .$$

Untuk $p = 1, 2, \ldots, k$ lakukan

$$N_{k-p} = 2^{k-p+1}$$
$$(\Delta t)_{k-p} = \frac{\Delta t}{N_{k-p}}$$
$$a_{k-p}^{(p)} = a_{k+1-p}^{(p-1)} + \frac{\left[a_{k+1-p}^{(p-1)} - a_{k-p}^{(p-1)}\right]}{\left[\left(\dfrac{(\Delta t)_{k-p}}{(\Delta t)_k}\right)^2 - 1\right]}$$

teruskan untuk pelelaran p.

Bagi $k \geq 1$, $\epsilon_k = |a_o^{(k)} - a_o^{(k-1)}|$.

Jika $\epsilon_k \leq \delta$, $a_o^{(k)} = U_i(i\ \Delta x,\ t_{j+1})$ *dan*

teruskan untuk pelelaran untuk i.

Jika tidak,

teruskan untuk pelelaran k

$$a_o^{(q)} = U_i(i\Delta t,\ t_{j+1})$$

teruskan untuk pelelaran i

teruskan untuk pelelaran j.

3. Ujikaji Berangka Dan Hasil Perbandingan

Masalah yang diselesaikan diberikan oleh persamaan pengaliran haba

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

tertakluk kepada syarat awal,

$$U(x,0) = 4x(1-x), \qquad 0 \le x \le 1$$

dan syarat sempadan,

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, \qquad t \ge 0 .$$

Penyelesaian tepat (Saul'yev [5]) diberi oleh

$$U(x,t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x), \quad k = 2n-1$$

Penyelesaian berangka yang diperoleh daripada pengekstrapolasian dibandingkan dengan kaedah-kaedah penghampiran beza terhingga teritlak.

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \lambda \Big[\Theta(U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1})$$

$$+ (1-\Theta)(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) \Big]$$

$$\text{dengan } \lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{3.2}$$

Perhatikan apabila Θ sama dengan 1, $\frac{1}{2}$ dan 0, masing-masingnya kita mendapat skema tersirat penuh, Crank-Nicolson dan tidak tersirat dengan kejituan $O[(\Delta x)^2 + (\Delta t)]$, $O[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2]$ dan $O[(\Delta x)^2 + (\Delta t)]$.

Daripada hasil di dalam jadual 2-11, didapati kaedah ekstrapolasi adalah lebih jitu daripada skema tersirat penuh dan Crank-Nicolson untuk λ = 0.1, 0.2, 0.3 dan lebih jitu daripada skema tersirat penuh untuk λ = 0.4 dan 0.5. Daripada ujian berangka, kaedah ekstrapolasi adalah stabil untuk $\lambda \le 0.5$. Ini mungkin dapat dijelaskan daripada pendiskretan tidak tersirat terhadap

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ pada titik grid yang berkenaan.

Jadual 2 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.01$, $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $\delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	5.81×10^{-4}	4.68×10^{-4}	1.89×10^{-4}	5.43×10^{-5}	1.01×10^{-5}	5.50×10^{-5}	1.90×10^{-4}	4.68×10^{-4}	5.81×10^{-4}
TERSIRAT PENUH	2.30×10^{-3}	1.97×10^{-3}	8.83×10^{-4}	2.84×10^{-4}	1.16×10^{-4}	2.84×10^{-4}	8.83×10^{-4}	1.97×10^{-3}	2.30×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	1.45×10^{-3}	1.24×10^{-3}	5.40×10^{-4}	1.62×10^{-4}	5.54×10^{-5}	1.62×10^{-4}	5.40×10^{-4}	1.24×10^{-3}	1.45×10^{-3}
TIDAK TERSIRAT	5.82×10^{-4}	4.69×10^{-4}	1.91×10^{-4}	5.57×10^{-5}	1.11×10^{-5}	5.58×10^{-5}	1.91×10^{-4}	4.70×10^{-4}	5.82×10^{-4}

Jadual 3 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.05$, $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $\delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	3.61×10^{-4}	6.49×10^{-4}	8.28×10^{-4}	9.12×10^{-4}	9.34×10^{-4}	9.12×10^{-4}	8.28×10^{-4}	6.49×10^{-4}	3.61×10^{-4}
TERSIRAT PENUH	1.47×10^{-3}	2.63×10^{-3}	3.35×10^{-3}	3.68×10^{-3}	3.76×10^{-3}	3.68×10^{-3}	3.35×10^{-3}	2.63×10^{-3}	1.47×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	9.15×10^{-4}	1.64×10^{-3}	2.09×10^{-3}	2.30×10^{-3}	2.36×10^{-3}	2.30×10^{-3}	2.09×10^{-3}	1.64×10^{-3}	9.15×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	3.64×10^{-4}	6.53×10^{-4}	8.33×10^{-4}	9.17×10^{-4}	9.40×10^{-4}	9.17×10^{-4}	8.33×10^{-4}	6.53×10^{-4}	3.64×10^{-4}

Jadual 4 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.02, \quad \Delta t = 0.002, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.2, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	2.56×10^{-4}	3.58×10^{-4}	2.96×10^{-4}	1.86×10^{-4}	1.36×10^{-4}	1.86×10^{-4}	2.96×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.56×10^{-4}
TERSIRAT PENUH	2.61×10^{-3}	3.43×10^{-3}	2.73×10^{-3}	1.75×10^{-3}	1.33×10^{-3}	1.75×10^{-3}	2.73×10^{-3}	3.43×10^{-3}	2.61×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	1.16×10^{-3}	1.57×10^{-3}	1.26×10^{-3}	7.83×10^{-4}	5.81×10^{-4}	7.83×10^{-4}	1.26×10^{-3}	1.57×10^{-3}	1.16×10^{-3}
TIDAK TERSIRAT	2.56×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.96×10^{-4}	1.85×10^{-4}	1.35×10^{-4}	1.85×10^{-4}	2.95×10^{-4}	3.56×10^{-4}	2.55×10^{-4}

Jadual 5 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.1, \quad \Delta t = 0.002, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.2, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	1.99×10^{-4}	3.79×10^{-4}	5.20×10^{-4}	6.10×10^{-4}	6.41×10^{-4}	6.10×10^{-4}	5.20×10^{-4}	3.79×10^{-4}	1.99×10^{-4}
TERSIRAT PENUH	2.11×10^{-3}	4.01×10^{-3}	5.50×10^{-3}	6.45×10^{-3}	6.78×10^{-3}	6.45×10^{-3}	5.50×10^{-3}	4.01×10^{-3}	2.11×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	9.61×10^{-4}	1.82×10^{-3}	2.51×10^{-3}	2.94×10^{-3}	3.09×10^{-3}	2.94×10^{-3}	2.51×10^{-3}	1.82×10^{-3}	9.61×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	1.97×10^{-4}	3.75×10^{-4}	5.16×10^{-4}	6.06×10^{-4}	6.37×10^{-4}	6.06×10^{-4}	5.16×10^{-4}	3.75×10^{-4}	1.97×10^{-4}

Jadual 6 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.03, \quad \Delta t = 0.003, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.3, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	8.36×10^{-4}	1.32×10^{-3}	1.38×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.11×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.38×10^{-3}	1.32×10^{-3}	8.36×10^{-4}
TERSIRAT PENUH	2.87×10^{-3}	4.43×10^{-3}	4.52×10^{-3}	3.96×10^{-3}	3.64×10^{-3}	3.96×10^{-3}	4.52×10^{-3}	4.43×10^{-3}	2.87×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	9.85×10^{-4}	1.55×10^{-3}	1.62×10^{-3}	1.43×10^{-3}	1.32×10^{-3}	1.43×10^{-3}	1.62×10^{-3}	1.55×10^{-3}	9.86×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	8.35×10^{-4}	1.32×10^{-3}	1.38×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.11×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.38×10^{-3}	1.32×10^{-3}	8.35×10^{-4}

Jadual 7 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut:

$t = 0.15, \quad \Delta t = 0.003, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.3, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	7.16×10^{-4}	1.36×10^{-3}	1.87×10^{-3}	2.20×10^{-3}	2.32×10^{-3}	2.20×10^{-3}	1.87×10^{-3}	1.36×10^{-3}	7.16×10^{-3}
TERSIRAT PENUH	2.45×10^{-3}	4.67×10^{-3}	6.42×10^{-3}	7.55×10^{-3}	7.94×10^{-3}	7.55×10^{-3}	6.42×10^{-3}	4.67×10^{-3}	2.45×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	8.75×10^{-4}	1.67×10^{-3}	2.29×10^{-3}	2.69×10^{-3}	2.83×10^{-3}	2.69×10^{-3}	2.29×10^{-3}	1.67×10^{-3}	8.75×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	7.15×10^{-4}	1.36×10^{-3}	1.87×10^{-3}	2.20×10^{-3}	2.31×10^{-3}	2.20×10^{-3}	1.87×10^{-3}	1.36×10^{-3}	7.15×10^{-4}

Jadual 8 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.04, \quad \Delta t = 0.004, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.4, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	1.32×10^{-3}	2.29×10^{-3}	2.75×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.84×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.75×10^{-3}	2.29×10^{-3}	1.32×10^{-3}
TERSIRAT PENUH	3.22×10^{-3}	5.44×10^{-3}	6.35×10^{-3}	6.44×10^{-3}	6.37×10^{-3}	6.44×10^{-3}	6.35×10^{-3}	5.44×10^{-3}	3.22×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	8.98×10^{-4}	1.55×10^{-3}	1.86×10^{-3}	1.92×10^{-3}	1.92×10^{-3}	1.92×10^{-3}	1.86×10^{-3}	1.55×10^{-3}	8.98×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	1.32×10^{-3}	2.29×10^{-3}	2.75×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.84×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.75×10^{-3}	2.29×10^{-3}	1.32×10^{-3}

Jadual 9: Ralat mutlat bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.2, \quad \Delta t = 0.004, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.4, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	1.02×10^{-3}	1.94×10^{-3}	2.67×10^{-3}	3.13×10^{-3}	3.29×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.67×10^{-3}	1.94×10^{-3}	1.02×10^{-3}
TERSIRAT PENUH	2.43×10^{-3}	4.63×10^{-3}	6.37×10^{-3}	7.49×10^{-3}	7.88×10^{-3}	7.49×10^{-3}	6.37×10^{-3}	4.63×10^{-3}	2.43×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	7.10×10^{-4}	1.35×10^{-3}	1.86×10^{-3}	2.18×10^{-3}	2.30×10^{-3}	2.18×10^{-3}	1.86×10^{-3}	1.35×10^{-3}	7.10×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	1.02×10^{-3}	1.93×10^{-3}	2.66×10^{-3}	3.13×10^{-3}	3.29×10^{-3}	3.13×10^{-3}	2.66×10^{-3}	1.93×10^{-3}	1.02×10^{-3}

Jadual 10 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.05, \quad \Delta t = 0.005, \quad \Delta x = 0.1, \quad \lambda = 0.5, \quad \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	1.17×10^{-3}	3.58×10^{-3}	4.01×10^{-3}	5.21×10^{-3}	4.61×10^{-3}	5.21×10^{-3}	4.01×10^{-3}	3.58×10^{-3}	1.71×10^{-3}
TERSIRAT PENUH	3.68×10^{-3}	6.54×10^{-3}	8.24×10^{-3}	8.98×10^{-3}	9.16×10^{-3}	8.98×10^{-3}	8.24×10^{-3}	6.54×10^{-3}	3.68×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	8.68×10^{-4}	1.57×10^{-3}	2.04×10^{-3}	2.27×10^{-3}	2.34×10^{-3}	2.27×10^{-3}	2.04×10^{-3}	1.57×10^{-3}	8.69×10^{-4}
TIDAK TERSIRAT	1.71×10^{-3}	3.58×10^{-3}	4.01×10^{-3}	5.21×10^{-3}	4.61×10^{-3}	5.21×10^{-3}	4.01×10^{-3}	3.58×10^{-3}	1.71×10^{-3}

Jadual 11 : Ralat mutlak bagi penyelesaian kaedah-kaedah berikut

$t = 0.25, \quad \Delta t = 0.005, \quad \Delta x = 0.1, \lambda = 0.5, \delta = 10^{-5}$

KAEDAH \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
EKSTRAPOLASI	1.09×10^{-3}	2.14×10^{-3}	2.85×10^{-3}	3.46×10^{-3}	3.53×10^{-3}	3.46×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.14×10^{-3}	1.09×10^{-3}
TERSIRAT PENUH	2.20×10^{-3}	4.18×10^{-3}	5.76×10^{-3}	6.77×10^{-3}	7.11×10^{-3}	6.77×10^{-3}	5.76×10^{-3}	4.18×10^{-3}	2.20×10^{-3}
CRANK-NICOLSON	5.38×10^{-4}	1.02×10^{-3}	1.41×10^{-3}	1.66×10^{-3}	1.74×10^{-3}	1.66×10^{-3}	1.41×10^{-3}	1.02×10^{-3}	5.38×10^{-3}
TIDAK TERSIRAT	1.09×10^{-3}	2.14×10^{-3}	2.85×10^{-3}	3.45×10^{-3}	3.52×10^{-3}	3.45×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.14×10^{-3}	1.09×10^{-3}

RUJUKAN:

[1] W.F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations (Second Edition)*, Academic Press, New York, 1977.

[2] W.B. Gragg, On Extrapolation Algorithms for Ordinary Initial Value Problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 2 (1965), 384-403.

[3] J.D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, London, 1973.

[4] Mohd. Salleh Sahimi dan Habibah Shaari, Kaedah ekstrapolasi untuk persamaan gelombang lembapan di dalam *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-3*, (1988).

[5] V.K. Saul'yev, *Integration of Equations of Parabolic Type by the Method of Nets*, Pergamon Press, New York, 1964.