MATEMATIKA, 1990, Jilid 6, no.1, hlm. 29-35

FUNGSI TABURAN FUNGSI PEMBOLEHUBAH RAWAK; MENGITLAK TEOREM MOOD DAN RAKAN-RAKAN

OLEH

ABDUL AZIZ JEMAIN,
Jabatan Statistik,
Pusat Pengajian Kuantitatif,
Universiti Kebangsaan Malaysia,
43600 Bangi, Selangor Darul Ehsan.

ABSTRAK

Mood dan rakan-rakan dalam bukunya yang bertajuk INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS telah mengemukan dua teorem yang dapat digunakan untuk menerbitkan fungsi ketumpatan fungsi pembolehubah rawak menggunakan pendekatan taburan kebarangkalian. Penggunaan kedua-dua teorem, yang akan dinyatakan dalam kertas ini, terbatas untuk kes-kes yang mudah. Kertas ini mengemukan bukti matematik yang mengitlakn teorem-teorem berkenaan.

1. Pengenalan

Katalah X dan Y merupakan pembolehubah rawak selanjar dengan fungsi ketumpatan tercantum $f_{X,Y}(x,y)$. Fungsi ketumpatan bagi suatu fungsi pembolehubah rawak X dan Y, Z(X,Y), dapat diterbitkan dengan menggunakan salah satu dari tiga kaedah; kaedah fungsi kebarangkalian (KFK), kaedah fungsi penjana momen (KFPM) dan kaedah penjelmaan (KP). Kaedah-kaedah tersebut masing-masing mempunyai kelebihan dan kekurangannya. Misalnya KFPM sesuai jika pembolehubah X dan Y tidak bersandar dan mempunyai fungsi ketumpatan yang biasa seperti eksponen, gama, poisson dan normal yang fungsi penjananya diketahui. Untuk keadaan X dan Y bersandar dan fungsi taburannya berlainan dengan yang dinyatakan di atas kegunaannya KFPM agak terbatas. Kaedah ketiga, KP, pada amnya merupakan kaedah yang paling berkesan. Kaedah pertama, KFK, mudah jika $Z(X,Y) = AX \pm BY$, A dan B pemalar, atau $Z(X,Y) = XY$. Kesukaran yang sering dihadapi ialah dalam menentukan kawasan tertakrifnya Z(X,Y).

Kertas ini akan mengitlakan teorem oleh Mood dan rakan-rakan [1] yang dinyatakan pada bahagian 2. Mood dan rakan-rakan [1] membuktikan teorem tersebut dengan KFK, oleh itu adalah menjadi matlamat kertas ini untuk menggunakan pendekatan yang serupa.

2. Teorem Mood dan Rakan-rakan

Berikut merupakan dua teorem oleh Mood dan rakan-rakan [1].

Teorem 1

Andaikan X dan Y pembolehubah rawak selanjar berfungsi ketumpatan tercantum $f_{X,Y}(x,y)$ dengan $x,\ y \in (-\infty,\infty)$. Fungsi ketumpatan bagi $Z = X \pm Y$ ialah

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z \pm y, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z \pm x)\, dx$$

Teorem 2

Andaikan X dan Y pembolehubah rawak selanjar berfungsi ketumpatan tercantum $f_{X,Y}(x,y)$ dengan $x,\ y \in (-\infty,\infty)$. Fungsi ketumpatan bagi $Z = XY$ ialah;

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}(\tfrac{z}{y}, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}(x, \tfrac{z}{x})\, dx$$

3. Pengitlakan Teorem dan Bukti

Kedua-dua teorem sesuai untuk kes-kes yang pembolehubah rawak X dan Y berubah dari positif ke negatif takterhingga. Dalam bahagian ini bukti matematik untuk kes yang lebih umum akan dikemukan. Pengitlakan dapat membantu memudahkan penghitung menggunakan komputer.

Kes umum untuk teorem 1 dan teorem 2 masing-masing akan dipanggil dengan teorem 3 dan teorem 4. Penjelasan untuk teorem-teorem berkenaan secara lebih umum adalah seperti berikut.

Teorem 3

Andaikan X dan Y pembolehubah rawak selanjar berfungsi ketumpatan tercantum $f_{X,Y}(x,y)$ dengan $x \in [-a,b]$ dan $y \in [-c,d]$, $a,b,c,d > 0$. Fungsi ketumpatan bagi $Z = AX+BY$, A dan B nombor nyata, ialah

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-c}^{\frac{z+Aa}{B}} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (-Aa-Bc, Bd-Aa) \\ \displaystyle\int_{-c}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (Bd-Aa, Ab-Bc) \\ \displaystyle\int_{\frac{z-Ab}{B}}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (Ab-Bc, Ab+Bd) \end{cases} \tag{3.1}
$$

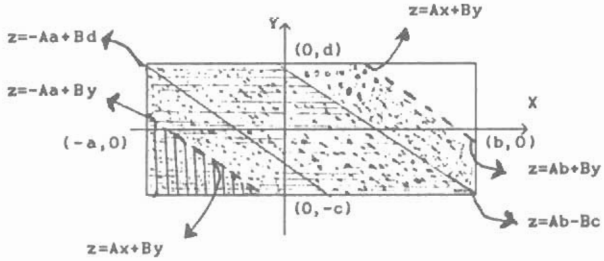
jika Bd-Aa < Ab-Bc dan

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-c}^{\frac{z+Aa}{B}} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (-Aa-Bc, Ab-Bc) \\ \displaystyle\int_{-c}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (Ab-Bc, -Aa+Bd) \\ \displaystyle\int_{\frac{z-Ab}{B}}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{z-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A} & \text{jika } z \in (-Aa+Bd, Ab+Bd) \end{cases} \tag{3.2}
$$

jika Bd-Aa > Ab-Bc.

Bukti;

Kawasan di mana $Z = AX + BY \leq z$ ditakrif, jika $Bd-Aa \leq Ab-Bc$ adalah seperti di rajah 1.



Rajah 1: Kawasan Tertakrifnya $AX + BY \leq z$ dan $Bd-Aa \leq Ab-Bc$

$$
F_Z(Z\leq z) = Kb(AX+BY\leq z) = \iint_{(Ax+By\leq z)} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy
$$

$$
= \begin{cases} \displaystyle\int_{-c}^{\frac{z+Aa}{B}} \int_{-a}^{\frac{z-By}{A}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & z \in (-Aa-Bc, Bd-Aa) \\ \displaystyle\int_{-c}^{d} \int_{-a}^{\frac{z-By}{A}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & z \in (Bd-Aa, Ab-Bc) \\ \displaystyle 1 - \int_{\frac{z-Ab}{B}}^{d} \int_{\frac{z-By}{A}}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & z \in (Ab-Bc, Ab+Bd) \end{cases}
$$

Ganti x dengan (u-By)/A, maka dx = du/A

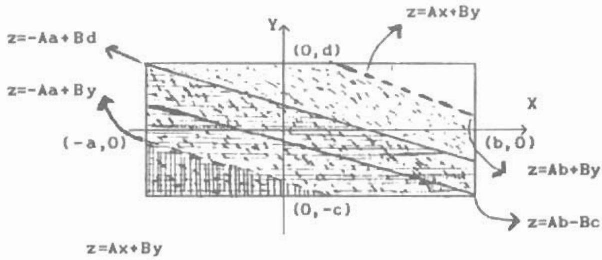
$$
F_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-c}^{\frac{z+Aa}{B}} \int_{By-aA}^{z} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{du}{A}\,dy, & z \in (-Aa-Bc, Bd-Aa) \\ \displaystyle\int_{-c}^{d} \int_{By-Aa}^{z} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{du}{A}\,dy, & z \in (Bd-aA, Ab-Bc) \\ \displaystyle 1 - \int_{\frac{z-Ab}{B}}^{d} \int_{z}^{By+Ab} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{du}{A}\,dy, & z \in (Ab-Bc, Ab+Bd) \end{cases}
$$

Tukar tertib kamiran dari du dy kepada dy du, maka

$$
F_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-Bc-aA}^{z} \int_{-c}^{\frac{u+Aa}{B}} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A}\,du, & z \in (-Aa-Bc, Bd-Aa) \\ \displaystyle\int_{-Bc-aA}^{z} \int_{-c}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{du}{A}\,dy & z \in (Bd-aA, Ab-Bc) \\ \qquad\qquad \displaystyle - \int_{-Bc-aA}^{Bd-aA} \int_{\frac{u+Aa}{B}}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{dy}{A}\,du & \\ \displaystyle 1 - \int_{z}^{Bd+bA} \int_{\frac{u-bA}{B}}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{u-By}{A}, y\right) \frac{du}{A}\,dy & z \in (Ab-Bc, Ab+Bd) \end{cases}
$$

Dengan menggunakan hubungan $f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(Z\le z)$, persamaan (3.1) diperolehi.

Untuk kes yang Ab-Bc < Bd-Aa, cara yang serupa dapat diguna. Kawasan yang ditakrif oleh AX+BY < z dan Ab-Bc < Bd-Aa adalah seperti dalam rajah 2.



Rajah 2: Kawasan Tertakrifnya $AX + BY \le z$ dan $Bd-Aa \ge Ab-Bc$

Contoh 1

Fungsi ketumpatan tercantum pembolehubah rawak X, Y ialah

$$f_{X,Y}(x,y) = 6xy$$

dengan $x,\ y \in [0,1]$. Dapatkan fungsi ketumpatan $Z = X + Y$.

Penyelsaian

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^2 6(z-y)y\,dy & \text{untuk} z\in[0,1) \\ \int_0^1 6(z-y)y\,dy & \text{untuk} z\in[1,2] \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan kamiran di atas, maka

$$f\ (z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ z^4 & \text{untuk } z \in [0,1) \\ -\frac{2}{3} + 2z - 2(z-1)^3 - \frac{1}{2}\ (z-1)^4 & \text{untuk } z \in [1,2] \end{cases}$$

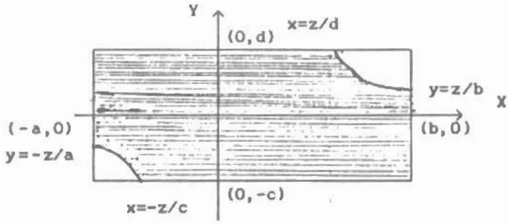
Teorem 4

Andaikan X dan Y pembolehubah rawak selanjar berfungsi ketumpatan tercantum $f_{X,Y}(x,y)$ dengan $x \in [-a,b]$ dan $y \in [-c,d]$. Fungsi ketumpatan bagi $Z = XY$.

$$f_Z(z) = \int_{-c}^{-\frac{z}{a}} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},y\right)\frac{dy}{(-y)} + \int_{\frac{z}{b}}^{d} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},y\right)\frac{dy}{y}$$

Bukti

Kawasan di mana $Z = XY \le z$ ditakrif ialah seperti dalam rajah 3.



Rajah 3: Rajah Tertakrifnya $Z = XY \le z$

$$F_V(Z\le z) = Kb(XY\le z) = \iint_{(xy\le z)} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= 1 - \int_{z/b}^{d}\int_{z/y}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy - \int_{-c}^{-z/a}\int_{-a}^{z/y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Dengan mengambil $u = xy$, maka

$$F_Z(Z\le z) = 1 - \int_{z/b}^{d}\int_{z}^{by} f_{X,Y}(\frac{u}{y},y)\,\frac{du}{y}\,dy - \int_{-c}^{-z/a}\int_{-ay}^{z} f_{X,Y}(\frac{u}{y},y)\,\frac{du}{y}\,dy$$

$$= 1 - \int_{z}^{db}\int_{\frac{u}{b}}^{d} f_{X,Y}(\frac{u}{y},y)\,\frac{dy}{y}\,du - \int_{z}^{-ac}\int_{-c}^{-\frac{u}{a}} f_{X,Y}(\frac{u}{y},y)\,\frac{dy}{(-y)}\,du$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(Z\le z)$$

$$= \int_{-c}^{-\frac{z}{a}} f_{X,Y}(\frac{z}{y},y)\,\frac{dy}{(-y)} + \int_{\frac{z}{b}}^{d} f_{X,Y}(\frac{z}{y},y)\,\frac{dy}{y}$$

Hubungan di atas serupa dengan persamaan (3.3).

Contoh 2

Fungsi ketumpatan X, Y adalah seperti contoh 1. Dapatkan fungsi ketumpatan $Z = XY$.

Penyelsaian

$$f_Z(z) = \int_{z}^{1} 6\,z\,dy$$

$$= 6z(1-z) \qquad \text{dengan } z \in (0,1).$$

Rujukan

Mood A. M., Graybill F. A., Boes D. C., (1984) Introduction to the theory of Statistics 3rd. ed., McGraw-Hill International Book Company, Singapore.