MATEMATIKA, 2009, Volume 25, Number 1, 9–14


# Penyelesaian Persamaan Pembezaan Biasa Kaku Menggunakan Kaedah Blok Formulasi Beza Ke Belakang

## *(Solving Stiff Ordinary Differential Equations Using Block Backward Differentiation Formulas)*

[1]**Zarina Bibi Ibrahim**, [2]**Mohamed Suleiman** & [3]**Khairil Iskandar Othman**
[1,2]Jabatan Matematik, Fakulti Sains, Universiti Putra Malaysia
43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia
[3]Jabatan Matematik, Fakulti Teknologi Maklumat dan Sains Kuantitatif
Universiti Teknologi MARA, 40450 UPM Shah Alam, Selangor, Malaysia
e-mail: [1]zarina@math.upm.edu.my, [3]khairail@tmsk.uitm.edu.my

**Abstrak** Kertas kerja ini membincangkan kaedah Blok Formulasi Beza Ke Belakang (BFBB) bagi menyelesaikan persamaan pembezaan biasa (PPB) jenis kaku. Umumnya, persamaan jenis kaku diselesaikan dengan kaedah tersirat yang melibatkan lelaran Newton yang mengambil masa pengiraan yang panjang. Dengan yang demikian, suatu kaedah blok dua titik menggunakan saiz langkah berubah dibangunkan berdasarkan Formulasi Beza Ke Belakang (FBB). Sebelum ini pengiraan beza pembahagi yang berulangkali dan rumit dilakukan pada setiap langkah dalam pengiraan pekali pembezaan, tetapi dalam kod yang dibangunkan, pengiraan pekali pembezaan hanya dilakukan pada langkah awal sahaja. Dipaparkan perbandingan keputusan berangka antara BFBB dan FBB yang menunjukkan keberkesanan dalam mengurangkan masa pengiraan dan kejituan penyelesaian yang lebih baik apabila kaedah BFBB di gunakan dalam menyelesaikan masalah nilai awal PPB kaku.

**Katakunci** Blok; kaku; formulasi beza ke belakang.

***Abstract*** *This paper discussed the Block Backward Differentiation Formula (BBDF) method for solving stiff Ordinary Differential Equations (ODEs). Generally, method for solving stiff ODEs is implicit and requires Newton iteration which is very costly in terms of execution time. Therefore, two point block method using variable step size based on Backward Differentiation Formula (BDF) is developed. The BBDF code will store all the differentiation coefficients in order to prevent tedious and repetitive computation of the differentiation coefficients at every step. The efficiency of the BBDF method is compared with the conventional BDF method. Numerical results indicate that the BBDF method outperform the BDF method in both execution time and accuracy.*

***Keywords*** *Block; stiff; backward differentiation formulas.*

## 1 Pengenalan

Banyak aplikasi dalam bidang kejuruteraan dan sains melibatkan sistem persamaaan pembezaan biasa yang dinamakan sistem persamaan pembezaan biasa jenis kaku. Terdapat pelbagai definasi kaku yang diberikan bagi persamaan pembezaan linear peringkat satu yang berikut:

$$\tilde{y}' = A\tilde{y} + \tilde{\phi}(x), \quad \tilde{y}(a) = \tilde{\eta}, \tag{1}$$

dengan $\tilde{y}^T = (y_1, y_2, ..., y_s)$ dan $\tilde{\eta}^T = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s)$

Takrifan kekakuan yang biasa digunakan diberi oleh Lambert (1993) [3] adalah seperti berikut:

Sistem persamaan pembezaan linear (1) ditakrifkan sebagai kaku jika

(i) $\mathrm{Ny}\,(\lambda_i) < 0$, $i = 1, ..., s$ dan

(ii) $\underset{1\leq i\leq s}{\text{maks}} |Ny\,(\lambda_i)| >> \underset{1\leq i\leq s}{\min} |Ny\,(\lambda_i)|$ dengan $\lambda_i$ adalah nilai eigen bagi bagi $A$, dan $\frac{\underset{1\leq i\leq s}{\text{maks}}|\mathrm{Ny}(\lambda_i)|}{\underset{1\leq i\leq s}{\min}|Ny(\lambda_i)|}$ yang dirujuk sebagai nisbah kaku atau indeks kaku

Beberapa kajian awal dalam kaedah blok telah diperkenal oleh Shampine dan Watts (1969) [6]. Mereka mengemukakan kaedah blok tersirat satu langkah. Chu dan Hamilton (1987) [1] pula membangunkan kaedah yang dirujuk sebagai kaedah multiblok, manakala Voss dan Abbas (1997) [7] mengemukakan kaedah blok peramal pembetul. Beberapa kaedah blok yang terkini dibincangkan oleh beberapa penyelidik lagi seperti Houwen dan Sommeijer (1989) [2] dengan kaedah blok Runge-Kutta, Omar (1999) [5] dan Majid (2004) [4] dengan kaedah blok berdasarkan formula Adams. Bagaimanapun, kebanyakan kaedah blok yang dibangunkan adalah untuk menyelesaikan persamaan pembezaan biasa yang tak kaku.

Oleh kerana amat kurang kajian dijalankan dalam kaedah blok bagi menyelesaikan PBB kaku, dicadangkan satu kaedah blok dua titik yang berdasarkan kepada FBB yang dirujuk sebagai kaedah Blok Formulasi Beza Ke Belakang (BFBB). Dalam BFBB, dua penyelesaian iaitu $y_{n+1}$ dan $y_{n+2}$ didapati secara serentak supaya masa pelaksanaan dapat dikurangkan. Selain itu, kod yang dibangunkan juga akan mengabaikan pengiraan yang rumit dan berulangkali beza pembahagi pada setiap langkah dalam pengiraan pekali pembezaan. Sebaliknya, pengiraan beza pembahagi hanya dilakukan di langkah awal sahaja.

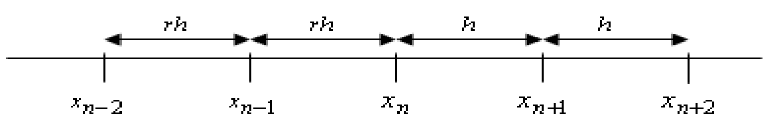
## 2 Rumus Blok Formulasi Beza Ke Belakang (BFBB)

Pertimbangkan suatu masalah nilai awal persamaan pembezaan biasa

$$y' = f\,(x, y) \tag{2}$$

yang tertakluk kepada syarat awal $y\,(a) = y_0$ dan syarat sempadan $a \leq x \leq b$

Merujuk kepada kaedah BFBB yang dibangunkan oleh Zarina (2007) [8], penyelesaian pada $x_{n+1}$ dan $x_{n+2}$ di dapati serentak dengan menggunakan titik-titik $x_{n-2}, x_{n-1}$ dan $x_n$ sebagai titik-titik di belakang yang digambarkan seperti berikut:




Rajah 1: Kaedah Blok 2 Titik ($r$ = nisbah saiz langkah)

Saiz langkah dalam blok yang dikira (computed) ialah $2h$, manakala saiz langkah blok yang terdahulu ialah $2rh$ di mana $r$ ialah nisbah saiz langkah (rujuk Rajah 1). Dalam hal ini, nilai yang dipertimbangkan adalah $r = 1$, $r = 2$ dan $r = 5/8$ yang merujuk kepada saiz langkah tetap, separuh saiz langkah dan peningkatan saiz langkah dengan faktor 1.6. Pemilihan nisbah saiz langkah yang sedemikian adalah untuk memastikan syarat kestabilan sifar dipenuhi.

Berikut diberikan rumus Blok Formulasi Beza Ke Belakang bagi $r$ yang berbeza.

(i) $r = 1$:
$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{10}y_{n-2} + \tfrac{3}{5}y_{n-1} - \tfrac{9}{5}y_n + y_{n+1} + \tfrac{3}{10}y_{n+2} = \tfrac{6}{5}hf_{n+1} \\ &\tfrac{3}{25}y_{n-2} - \tfrac{16}{25}y_{n-1} + \tfrac{36}{25}y_n - \tfrac{48}{25}y_{n+1} + y_{n+2} = \tfrac{12}{25}hf_{n+2} \end{aligned} \tag{3}$$

(ii) $r = 2$:
$$\begin{aligned} &-\tfrac{3}{128}y_{n-2} + \tfrac{25}{128}y_{n-1} - \tfrac{225}{128}y_n + y_{n+1} + \tfrac{75}{128}y_{n+2} = \tfrac{15}{8}hf_{n+1} \\ &\tfrac{2}{115}y_{n-2} - \tfrac{3}{23}y_{n-1} + \tfrac{18}{23}y_n - \tfrac{192}{115}y_{n+1} + y_{n+2} = \tfrac{12}{23}hf_{n+2} \end{aligned} \tag{4}$$

(iii) $r = \frac{5}{8}$:
$$\begin{aligned} &-\tfrac{208}{775}y_{n-2} + \tfrac{6912}{5425}y_{n-1} - \tfrac{13689}{6200}y_n + y_{n+1} + \tfrac{351}{1736}y_{n+2} = \tfrac{117}{124}hf_{n+1} \\ &\tfrac{12544}{29875}y_{n-2} - \tfrac{53248}{29875}y_{n-1} + \tfrac{74529}{29875}y_n - \tfrac{2548}{1195}y_{n+1} + y_{n+2} = \tfrac{546}{1195}hf_{n+2} \end{aligned} \tag{5}$$

Rumus BFBB di atas adalah mirip kepada rumus FBB tetapi BFBB mempunyai saiz langkah berubah. Rumus BFBB yang dibangunkan juga membolehkan pekali nilai $y$ disimpan untuk mengelakkan pengiraan pekali pembezaan pada setiap langkah pengiraan.

## 3 Implementasi Lelaran Newton bagi Kaedah BFBB

Persamaan BFBB (3), (4) dan (5) secara umumnya boleh ditulis seperti berikut:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= \theta_1 y_{n+2} + \alpha_1 hf_{n+1} + \psi_1 \\ y_{n+2} &= \theta_2 y_{n+1} + \alpha_2 hf_{n+2} + \psi_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dengan $\psi_1$ dan $\psi_2$ adalah nilai-nilai dibelakang

Persamaan (6) dalam bentuk matriks vektor adalah setara dengan

$$(I - A)\, Y_{n+1,n+2} = hBF_{n+1,n+2} + \xi_{n+1,n+2}$$

dengan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Y_{n+1,n+2} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $F_{n+1,n+2} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix}$ dan $\xi_{n+1,n+2} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$.

Andaikan

$$\hat{F}_{n+1,n+2} = (I - A)\, Y_{n+1,n+2} - hBF_{n+1,n+2} - \xi_{n+1,n+2} = 0 \tag{7}$$

Proses lelaran Newton bagi mendapatkan penghampiran $y_{n+1}$dan $y_{n+2}$ adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned} &Y^{(i+1)}_{n+1,n+2} - Y^{(i)}_{n+1,n+2} = \\ &-\left[(I - A) - hB\tfrac{\partial F}{\partial Y}\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right)\right]^{-1}(I - A)\, Y^{(i)}_{n+1,n+2} - hBF\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right) - \xi_{n+1,n+2} \end{aligned}$$

di mana $J_{n+1,n+2} = \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\left(Y^{(i)}_{n+1,n+2}\right)$ adalah matriks Jakobian bagi $F$ terhadap $Y$

**Pemilihan Saiz Langkah**

Pengubahsuaian saiz langkah sama ada $r$=1, $r = 2$ atau $r = 5/8$ bergantung kepada ralat pangkasan setempat berbanding dengan kejituan yang ditetapkan oleh pengguna. Algoritma kawalan ralat adalah seperti berikut:

(i) jika ralat kurang dari had toleransi, panjang langkah $h$ dinaikkan dengan faktor 1.6 untuk mendapat kelajuan maksima

(ii) dalam kes berlakunya langkah gagal, panjang langkah $h$ dikurangkan separuh dan langkah itu diulangi.

Dalam kod BFBB, nilai-nilai $x_{n+1}, x_{n+2}$ dan $y_{n+1}, y_{n+2}$ diterima serta dianggap sebagai langkah berjaya jika ralat pangkasan setempat, LTE berbanding dengan nilai toleransi, TOL, kurang daripada had toleransi:

$$\text{LTE} < \text{TOL}$$

LTE didapati dengan

$$\text{LTE} = \left| y_{n+2}^{(p+1)} - y_{n+2}^{(p)} \right|$$

di mana $y_{n+2}^{(p+1)}$ adalah kaedah peringkat ($p$+1) dan $y_{n+2}^{(p)}$ adalah kaedah peringkat $p$.

Selepas langkah berjaya, saiz langkah ditingkatkan dengan

$$h_{new} = c \times h_{old} \times \left( \frac{\text{TOL}}{\text{LTE}} \right)^{1/p} \quad \text{dan jika} \;\; h_{new} > 1.6 \times h_{old}$$

maka $h_{new} = 1.6 \times h_{old}$

Langkah itu dianggap berjaya dan panjang langkah berikutnya

$$h_{acc} = 2 \times h_{old} \;\; \text{atau} \;\; h_{acc} = h_{old}.$$

di mana $c$ adalah faktor keselamatan, $p$ adalah peringkat kaedah yang dibangunkan dan $h_{old}$ adalah saiz langkah dari blok terdahulu. Tujuan mempunyai faktor keselamatan $c$ adalah untuk mengelakkan terlalu banyak langkah gagal. Dalam kod yang dibangunkan, faktor keselamatan adalah 0.9.

Jika ralat pangkasan setempat, LTE lebih daripada had toleransi yang ditetapkan, nilai $y_{n+1}, y_{n+2}$ ditolak dan ini di anggap sebagai langkah gagal. Oleh itu, langkah pengiraan di ulangi dengan separuh saiz langkah daripada saiz langkah semasa, iaitu nisbah langkah $r$ = 2.

## 4 Masalah Masalah Penguji

Beberapa masalah PBB kaku diuji untuk menunjukkan keberkesanan kaedah BFBB. Tiga masalah berikut digunakan sebagai penguji.

**Masalah 1**

$y' = -1000\,(y-1)$ dengan nilai awal $y\,(0) = 2$ dalam selang $0 \leq x \leq 10$.

Nilai eigen: $-1000$.

Penyelesaian tepat: $y(x) = e^{-1000x} + 1$.

**Masalah 2**

$$\begin{matrix} y_1' = 998y_1 + 1998y_2 \\ y_2' = -999y_1 - 1999y_2 \end{matrix} \quad \text{dengan nilai awal} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix} \quad \text{dalam selang } 0 \leq x \leq 20.$$

Nilai eigen : $-1$ dan $-1000$.

Penyelesaian tepat: $\begin{matrix} y_1(x) = 4e^{-x} - 3e^{-1000x} \\ y_2(x) = -2e^{-x} + 3e^{-1000x} \end{matrix}$

**Masalah 3**

$$\begin{matrix} y_1' = -1002y_1 + 1000y_2^2 \\ y_2' = y_1 - y_2(1 + y_2) \end{matrix} \quad \text{dengan nilai awal} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix} \quad \text{dalam selang } 0 \leq x \leq 20$$

Penyelesaian tepat: $\begin{matrix} y_1(x) = e^{-2x} \\ y_2(x) = e^{-x} \end{matrix}$

## 5 Keputusan Berangka

Dalam bahagian ini dipaparkan beberapa keputusan berangka yang menggunakan kaedah BFBB. Dalam membandingkan keberkesanan kaedah BFBB, beberapa parameter dijadikan sebagai pengukur. Parameter yang diukur dalam Jadual 1 adalah seperti berikut:

| | | |
|---|---|---|
| STPS | : | jumlah keseluruhan lelaran |
| TOL | : | toleransi kawalan ralat |
| IFST | : | jumlah langkah gagal |
| IST | : | jumlah langkah berjaya |
| RALAT | : | ralat maksima |
| FBB | : | kaedah Formulasi Beza Ke Belakang (peringkat satu hingga 6) |
| BFBB | : | kaedah Blok Formulasi Beza Ke Belakang |
| MASA | : | masa pelaksanaan ($\mu$s) |

## 6 Kesimpulan

Berdasarkan keputusan berangka yang dipaparkan dalam Jadual 1, didapati kaedah BFBB adalah lebih baik keputusannya berbanding dengan keputusan berangka yang didapati daripada kaedah FBB berasaskan bilangan lelaran yang diambil, kejituan dan masa pelaksanaan. Secara keseluruhannya, boleh disimpulkan bahawa kaedah berangka yang lebih efisien adalah berdasarkan kaedah BFBB.

## Rujukan

[1] M. Chu & H. Hamilton, *Parallel solution of ODEs by multi-block methods*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 8(1987), 342-353.

[2] P.J. Houwen & B.P. Sommeijer, *Block Runge-Kutta methods on parallel computers*, Report NM-R8906, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1989.

Jadual 1: Keputusan Berangka

| MASALAH | TOL | KAEDAH | IFST | IST | STPS | RALAT MAKSIMA | MASA ($\mu$s) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $10^{-2}$ | FBB | 4 | 30 | 34 | $9.1237\text{x}10^{-3}$ | 11910 |
| | | BFBB | 0 | 22 | 22 | $2.3041\text{x}10^{-4}$ | 4835 |
| | $10^{-4}$ | FBB | 9 | 56 | 65 | $5.0779\text{x}10^{-4}$ | 14056 |
| | | BFBB | 0 | 34 | 34 | $2.7518\text{x}10^{-6}$ | 5581 |
| | $10^{-6}$ | FBB | 12 | 94 | 106 | $1.4659\text{x}10^{-5}$ | 18318 |
| | | BFBB | 0 | 69 | 69 | $2.3291\text{x}10^{-8}$ | 7684 |
| 2. | $10^{-2}$ | FBB | 13 | 58 | 71 | $3.5277\text{x}10^{-1}$ | 17475 |
| | | BFBB | 0 | 26 | 26 | $2.3223\text{x}10^{-4}$ | 5549 |
| | $10^{-4}$ | FBB | 18 | 101 | 119 | $1.1269\text{x}10^{-3}$ | 22692 |
| | | BFBB | 0 | 53 | 53 | $2.4437\text{x}10^{-6}$ | 8429 |
| | $10^{-6}$ | FBB | 22 | 165 | 660 | $6.8001\text{x}10^{-6}$ | 30318 |
| | | BFBB | 0 | 130 | 130 | $2.3362\text{x}10^{-8}$ | 15481 |
| 3. | $10^{-2}$ | FBB | 8 | 48 | 56 | $1.3084\text{x}10^{-1}$ | 23062 |
| | | BFBB | 1 | 22 | 23 | $1.1578\text{x}10^{-4}$ | 8208 |
| | $10^{-4}$ | FBB | 17 | 84 | 101 | $1.1900\text{x}10^{-3}$ | 26540 |
| | | BFBB | 1 | 40 | 41 | $8.9855\text{x}10^{-6}$ | 10244 |
| | $10^{-6}$ | FBB | 20 | 123 | 143 | $6.5959\text{x}10^{-6}$ | 30981 |
| | | BFBB | 3 | 88 | 91 | $6.8684\text{x}10^{-8}$ | 16200 |


[3] J.D. Lambert, *Numerical methods for Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problems*, John Wiley & Sons, 1993.

[4] Z. Majid, *Parallel Block Methods For Solving Ordinary Differential Equations*, PhD Thesis, Universiti Putra Malaysia, 2004.

[5] Z.B. Omar, *Developing Parallel Block Methods for Solving Higher Order ODEs Directly*, PhD Thesis, Universiti Putra Malaysia, 1999.

[6] L.F. Shampine & H.A. Watts, *Block Implicit One-Step Methods*, Math. Comp. 23(1969), 731-740.

[7] D. Voss & S. Abbas, *Block Predictor-Corrector Schemes for the Parallel Solution of ODEs*, Comp. Math.Applic. 33(1997), 65-72.

[8] I. Zarina Bibi, O. Khairil Iskandar, M. Suleiman, *Block Backward Differentiation Formula For Solving ODEs,* Proceedings of International MultiConference of Engineers and Computer Scientist, HONG KONG, Vol II: pg 2439. ISBN: 978-988-98671-7-1, 2007.