Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 1, hlm. 21–29

Segiempat Tepat Ajaib dengan Baris Tengah

Thomas Bier
Institut Sains Matematik
Fakulti Sains
Universiti Malaya
50603 Kuala Lumpur
Malaysia

Abstrak Kita tunjukkan bahawa untuk setiap pasangan integer ganjil (m, n) dengan $1 < m \leq n$ dan $(m, n) \neq (3, 3)$, wujud satu segiempat tepat ajaib R (R tak semestinya satu segiempat sama) dengan $m = 2h + 1$ baris dan n lajur yang mempunyai sifat berikut: Jujukan integer memusat $\{hn{+}1,\ hn{+}2,\ \ldots,\ (h{+}1)n\}$ boleh disusun untuk menjadi satu baris dalam R. Baris tersebut dinamakan *baris tengah*. Keputusan ini memantapkan Proposisi 8 dalam hasil kerja seorang Amerika iaitu T.R. Hagedorn [5]. Kaedah di sini menggunakan pilihatur lengkap untuk membina segiempat tepat ajaib dengan baris tengah yang mempunyai tiga atau lima baris, dan kemudian menggunakan kaedah dari [1] untuk kes yang umum.

Katakunci Segiempat tepat ajaib, pilihatur lengkap.

Abstract *We show that for each pair of odd integers (m, n) with $1 < m \leq n$ and $(m, n) \neq (3, 3)$, there always exists a magic rectangle R (not necessarily a square) with $m = 2h + 1$ rows and n columns which has the following property: The central integer sequence $\{hn + 1,\ hn + 2,\ \ldots,\ (h + 1)n\}$ can be arranged to be one of the rows of R. This result strengthens Proposition 8 of the work of the American T. R. Hagedorn [5]. Our method uses the notion of a complete permutation to get the required rectangles with three or five rows, and then applies the known method of [1] for the general case.*

Keywords *Magic rectangle, complete permutation.*

1 Segiempat Tepat Ajaib dengan Tiga Baris

Kita akan dapatkan satu segiempat tepat ajaib dengan tiga baris dan n lajur, di mana n ialah suatu nombor ganjil, supaya segiempat tepat tersebut mempunyai satu baris dengan jujukan integer memusat $\{n + 1,\ n + 2,\ \ldots,\ 2n - 1,\ 2n\}$. Kaedah pembinaan di sini adalah berbeza daripada yang diberi di [2].

Katakan $n = 2h + 1$. Kita bermula dengan suatu pilihatur *lengkap* (sila rujuk [6]). Pilihatur lengkap ialah suatu pilihatur π di atas set $\{-h, -h+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +h-1, +h\}$ yang mempunyai sifat berikut: Set semua hasil tambah $i + \pi(i)$

$$\{-h + \pi(-h), \ldots, -1 + \pi(-1), 0 + \pi(0), +1 + \pi(+1), \ldots, +h + \pi(h)\} \tag{1}$$

mestilah sama dengan set

$$\{-h, -h + 1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +h - 1, +h\}. \tag{2}$$

Sebagai contoh,

-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
4	-1	3	-2	2	-3	1	-4	0

adalah suatu pilihatur lengkap sebab hasil tambah bagi semua unsur dalam pilihatur yang diberi adalah seperti dalam susunan di bawah:

-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
4	-1	3	-2	2	-3	1	-4	0
0	-4	1	-3	2	-2	3	-1	4

,

iaitu set hasil tambah bagi semua unsur ialah $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, +2, +3, +4\}$.

Untuk mendapatkan suatu segiempat tepat dari pilihatur lengkap di atas di mana hasil tambah setiap lajurnya bersamaan dengan sifar, kita mesti tukarkan baris terakhir kepada negatifnya:

-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
4	-1	3	-2	2	-3	1	-4	0
0	+4	-1	+3	-2	+2	-3	+1	-4

.

Bagi tujuan mendapatkan set integer yang sesuai untuk membina segiempat tepat ajaib yang dikehendaki, kita campurkan integer 9 kepada setiap unsur dalam baris pertama, dan tolakkan integer 9 dari setiap nombor dalam baris terakhir. Sekarang segiempat tepat tersebut menjadi seperti di bawah, di mana baris terakhir ialah hasil tolak nombor di baris ketiga daripada nombor di baris pertama:

5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	-1	3	-2	2	-3	1	-4	0
-9	-5	-10	-6	-11	-7	-12	-8	-13
14	11	17	14	20	17	23	20	26

.

Kita akan mendapatkan segiempat tepat ajaib jika (multi)set semua hasil tolak (dalam contoh ini (multi)set $\{11, 14, 14, 17, 17, 20, 20, 23, 26\}$ dengan hasil tambah 162) boleh diseparuhkan oleh suatu subset, iaitu wujud suatu subset bagi (multi)set tersebut di mana hasil tambah nombor-nombor dalam subset itu adalah separuh daripada hasil tambah nombor-nombor dalam (multi)set. Jika (multi)set semua hasil tolak boleh diseparuhkan, kita salingtukarkan nombor di baris pertama dengan nombor di baris ketiga bagi lajur-lajur yang mengandungi nombor-nombor dalam subset tersebut. Perhatikan bahawa dalam contoh yang diberi di atas, tidak wujud subset dengan hasil tambah yang separuh daripada hasil tambah 162. Ini boleh diterangkan seperti berikut: Oleh kerana semua integer x dalam multiset tersebut mempunyai sifat $x \equiv 2(3)$ dan juga 81 ialah gandaan bagi tiga, maka kita harus ambil 3 atau 6 unsur dari set semua hasil tolak. Tetapi hasil tambah bagi sebarang tiga unsur dari set hasil tolak adalah $\leq 20+23+26=69<81$; justeru itu hasil tambah bagi sebarang enam unsur dari set hasil tolak adalah > 81.

Untuk contoh yang sesuai bagi segiempat tepat ajaib, kita rujuk kepada pilihatur lengkap (3) bagi kes $h=4$ dan segiempat tepat ajaib (5) di bawah. Pilihatur lengkap

$$\begin{array}{ccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & -1 & 2 & -4 & -2 & 0 \end{array} \tag{3}$$

menjadi segiempat tepat berikut di mana hasil tolak nombor di baris ketiga daripada nombor di baris pertama diberi dalam baris terakhir:

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ -8 & -6 & -5 & -12 & -10 & -7 & -13 & -11 & -9 \\ \hline 13 & 12 & 12 & 20 & 19 & 17 & 24 & 23 & 22 \end{array}. \tag{4}$$

Perhatikan bahawa set hasil tolak di atas boleh diseparuhkan oleh subset $\{12, 22, 23, 24\}$. Maka kita dapati segiempat tepat ajaib berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & 6 & -5 & 8 & 9 & 10 & -13 & -11 & -9 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 1 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ -8 & -6 & 7 & -12 & -10 & -7 & 11 & 12 & 13 \end{array}. \tag{5}$$

Lema 1 *Bagi semua integer $h \geq 1$, wujud pilihatur lengkap dengan panjang $2h+1$ atas set $\{-h, -h+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +h-1, +h\}$.*

Bukti Pilihatur ini boleh ditakrifkan oleh rumus mudah sebagai:

$$\pi(-h+2i) = h-i \quad \text{bagi } i = 0, 1, \ldots, h \tag{6}$$

$$\pi(-h+2i-1) = -i \quad \text{bagi } i = 1, 2, \ldots, h. \tag{7}$$

Set integer dalam persamaan (6) ialah $0, +1, +2, \ldots, +h-1, +h$ manakala set integer dalam persamaan (7) ialah $-1, -2, \ldots, -h$. $\square$

Perhatikan bahawa jika kita campurkan integer $2h+1$ kepada baris pertama dan jika kita tolakkan integer $2h+1$ daripada negatif baris terakhir, maka kita mendapat segiempat tepat dengan tiga baris atas set $[-3h-1, 3h+1]$ di mana hasil tambah nombor-nombor dalam setiap turus dan dalam baris kedua adalah bersamaan dengan sifar. Segiempat tepat tersebut ialah

$$\begin{array}{ccccccccc} h+1 & h+2 & h+3 & \ldots & 2h+1 & \ldots & 3h-1 & 3h & 3h+1 \\ +h & -1 & h-1 & \ldots & x & \ldots & 1 & -h & 0 \\ -2h-1 & -h-1 & -2h-2 & \ldots & y & \ldots & -3h & -2h & -3h-1 \end{array}$$

di mana $x = \frac{h}{2}$, $y = -2h-1-\frac{h}{2}$ bagi h genap dan $x = -\frac{h+1}{2}$, $y = \frac{h+1}{2} - 2h - 1$ bagi h ganjil. Hasil tambah untuk baris pertama ialah $(2h+1)^2$ manakala hasil tambah untuk baris terakhir ialah $-(2h+1)^2$. Dari jadual di atas kita dapati (multi)set semua hasil tolak nombor-nombor dalam baris ketiga daripada nombor-nombor dalam baris pertama ialah

$$\{3h+2,\ 2h+3,\ 3h+5,\ 2h+6,\ 3h+8,\ \ldots,\ 6h-1,\ 5h,\ 6h+2\}. \tag{8}$$

(Multi)set dalam (8) ialah cantuman bagi dua janjang aritmetik dengan beza 3, iaitu:

$$\{3h+2,\ 3h+5,\ 3h+8,\ \ldots,\ 6h-4,\ 6h-1,\ 6h+2\}, \tag{9}$$

$$\{2h+3,\ 2h+6,\ 2h+9,\ \ldots,\ 5h-3,\ 5h\}. \tag{10}$$

Janjang aritmetik (9) mempunyai $h+1$ unsur manakala janjang aritmetik (10) mempunyai h unsur. Bagi $h=4$, kita telah lihat di atas bagaimana segiempat tepat ajaib (5) dapat dibina daripada suatu pilihatur lengkap di mana set semua hasil tolak boleh diseparuhkan. Bagi $h \neq 4$, kita ada hasil berikut:

Lema 2 *(Multi)set (8) boleh diseparuhkan bagi setiap integer $h > 1$ dan $h \neq 4$.*

Bukti Bukti bagi lema ini dibuat dengan mempertimbangkan enam kes kekongruenan h modulo 6. Kita akan menggunakan pasangan-pasangan $\{(6h-1-3i)+(2h+3+3i)\}$, di mana setiap pasangan mempunyai hasil tambah $8h+2$, bagi nilai-nilai $i = 0, 1, \ldots, h-1$ yang sesuai.

Jika $h \equiv 3(6)$ kita akan pilih $\frac{h-1}{2}$ pasangan dengan hasil tambah

$$\frac{h-1}{2} \cdot (8h+2) \ = \ 4h^2 - 3h - 1,$$

dan juga dua unsur khas, iaitu $4h$ dan $3h+2$ yang mempunyai hasil tambah $7h+2$. Maka hasil tambah bagi semua unsur yang dipilih menjadi $4h^2+4h+1 = (2h+1)^2$.

Jika $h \equiv 5(6)$ kita akan pilih $\frac{h-1}{2}$ pasangan dengan hasil tambah

$$\frac{h-1}{2} \cdot (8h+2) \ = \ 4h^2 - 3h - 1,$$

dan juga dua unsur khas, iaitu $3h+2$ dan $3h+[h]$ yang mempunyai hasil tambah $7h+2$ supaya hasil tambah bagi semua unsur diambil menjadi $4h^2+4h+1 = (2h+1)^2$.

Jika $h \equiv 2(6)$ kita akan pilih $\frac{h-2}{2}$ pasangan dengan hasil tambah

$$\frac{h-2}{2} \cdot (8h+2) \ = \ 4h^2 - 7h - 2,$$

dan juga tiga unsur khas, iaitu $3h+2$, $2h+[h+1]$ dan $5h$ yang mempunyai hasil tambah $11h+3$, supaya hasil tambah bagi semua unsur yang dipilih menjadi $4h^2+4h+1 = (2h+1)^2$.

Jika $h \equiv 0(6)$ kita akan pilih $\frac{h-2}{2}$ pasangan dengan hasil tambah

$$\frac{h-2}{2} \cdot (8h+2) \ = \ 4h^2 - 7h - 2,$$

dan juga tiga unsur khas, iaitu $3h+2$, $3h+2+[h-3]$ dan $3h+2+[h]$ yang mempunyai hasil tambah $11h+3$ supaya hasil tambah bagi semua unsur dipilih menjadi $4h^2+4h+1 = (2h+1)^2$.

Jika $h \equiv 1(6)$, $h \geq 7$ atau $h \equiv 4(6)$, $h > 4$ kita mempunyai kes $h \equiv 1(3)$. Kes ini ialah kes di mana wujud multiset, sebab dalam jujukan (9) dan (10) kita boleh dapati unsur-unsur yang diulangi. Maka kes ini adalah lebih susah daripada kes di atas. Bagi kes ini kita akan menggunakan lema berikut:

Lema 3 *Biar $h \equiv 1(3)$, $h \neq 1, 4$. Setiap integer antara $\frac{(h-1)(29h+22)}{6}$ dan $\frac{(h-1)(19h+2)}{6}$ yang merupakan gandaan bagi 3 boleh ditulis sebagai hasil tambah $h-1$ integer dari kesatuan jujukan (9) dan (10).*

Bukti Perhatikan bahawa hasil tambah $h-1$ unsur yang paling besar ialah hasil tambah $\frac{2(h-1)}{3}$ unsur dari (9), iaitu

$$(6h+2)+(6h-1)+(6h-4)+\ldots+(6h+2-2(h-1)+3)$$

dengan $\frac{h-1}{3}$ unsur dari (10), iaitu

$$5h+(5h-3)+\ldots+(5h-(h-1)+3)$$

yang jumlahnya adalah $\frac{(h-1)(29h+22)}{6}$. Hasil tambah $h-1$ unsur yang paling kecil pula ialah hasil tambah $\frac{2(h-1)}{3}$ unsur dari (10), iaitu

$$(2h+3)+(2h+6)+\ldots+(2h+2(h-4)+6)$$

dengan $\frac{h-1}{3}$ unsur dari (9), iaitu

$$(3h+2)+(3h+5)+\ldots+(3h+2+(h-4))$$

yang jumlahnya adalah $\frac{(h-1)(19h+2)}{6}$. Oleh kerana $h \equiv 1(3)$, maka kedua-dua $\frac{(h-1)(19h+2)}{6}$ dan $\frac{(h-1)(29h+22)}{6}$ boleh dibahagi oleh 3. Seterusnya, oleh kerana (9) dan (10) adalah janjang aritmetik dengan beza 3, maka setiap integer yang merupakan gandaan 3 antara $\frac{(h-1)(19h+2)}{6}$ dan $\frac{(h-1)(29h+22)}{6}$ boleh ditulis sebagai hasil tambah $h-1$ unsur dari (9) atau (10). Misalnya, $\frac{(h-1)(19h+2)}{6}+3$ ialah hasil tambah $\frac{2(h-1)}{3}$ unsur dari (10), iaitu

$$(2h+3)+(2h+6)+\ldots+(2h+2(h-4)+6)$$

dengan $\frac{h-1}{3}$ unsur dari (9), iaitu

$$(3h+2)+(3h+5)+\ldots+(3h+2+(h-7))+(3h+2+(h-1)).$$

Ini membuktikan Lema 3. $\square$

Kita teruskan sekarang dengan bukti bagi Lema 2. Adalah mudah untuk kita lihat bahawa integer $4h^2+4h+1=(2h+1)^2$ ialah suatu gandaan bagi tiga dan

$$\frac{(h-1)(19h+2)}{6} < 4h^2+4h+1 \leq \frac{(h-1)(29h+22)}{6}. \qquad (11)$$

Dari Lema 3, kita dapat ungkapkan $(2h+1)^2$ sebagai hasil tambah $h-1$ integer dari kesatuan set-set (9) dan (10). Perbincangan ini menamatkan bukti bagi kes kekongruenan $h \equiv 1, 4(6)$ dan dengan itu, bukti bagi Lema 2. $\square$

Perhatikan bahawa bagi setiap kes dalam Lema 2, kita telah dapatkan satu subset bagi multiset yang diberi di mana hasil tambah nombor-nombor dalam subset itu adalah separuh daripada hasil tambah nombor-nombor dalam multiset tersebut. Kita berikan satu contoh bagi kes kekongruenan $h \equiv 1 \bmod 6$ di atas.

Contoh 1 Bagi $h = 7$ kita dapatkan segiempat tepat

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
7	-1	6	-2	5	-3	4	-4	3	-5	2	-6	1	-7	0
-15	-8	-16	-9	-17	-10	-18	-11	-19	-12	-20	-13	-21	-14	-22

dengan multiset hasil tolak

$$\{23, 17, 26, 20, 29, 23, 32, 26, 35, 29, 38, 32, 41, 35, 44\}.$$

Dari multiset ini, kita pilih dua pasangan $32 + 26$ dan $29 + 29$ dan juga lima unsur khas $23 + 26 + 23 + 17 + 20$ yang mempunyai hasil tambah $116 + 109 = 225 = 15^2$. Di sini kita boleh gunakan $23, 26, 29$ sebanyak dua kali sebab hasil tolak di atas adalah suatu multiset. Segiempat tepat ajaib yang diperolehi ialah

-15	-8	-16	-9	-17	-10	-18	-11	16	-12	18	19	20	21	22
7	-1	6	-2	5	-3	4	-4	3	-5	2	-6	1	-7	0
8	9	10	11	12	13	14	15	-19	17	-20	-13	-21	-14	-22

Jika kita campurkan 23 kepada setiap nombor dalam segiempat tepat di atas, kita akan mendapat suatu segiempat tepat ajaib 3×15 dengan satu baris tengah. □

Hasil dari perbincangan di atas, kita mendapat teorem berikut:

Teorem 1 *Bagi setiap nombor ganjil $n > 3$ wujud satu segiempat tepat ajaib dengan tiga baris dan n turus yang mempunyai satu baris tengah dengan integer-integer $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$.*

2 Segiempat Tepat Ajaib dengan Lima Baris

Sekarang kita akan bincangkan kes segiempat tepat ajaib dengan lima baris yang mempunyai satu baris tengah. Kita ambil pilihatur lengkap

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
3	0	-2	4	1	-3	2	-1	-4
1	3	4	-3	-1	2	-4	-2	0

dan membina suatu segiempat tepat dengan lima baris seperti berikut: Tiga baris yang terletak di tengah-tengah segiempat tepat tersebut adalah seperti yang didapati di (4), iaitu kita campur (tolak) integer 9 kepada (daripada) baris pertama (ketiga) dalam pilihatur di atas. Baris pertama dalam segiempat tepat yang dikehendaki didapati dengan mencampurkan $18 = 2 \cdot 9$ kepada baris pertama dalam pilihatur lengkap. Baris terakhir pula adalah negatif bagi baris pertama. Hasilnya adalah segiempat tepat berikut:

14	15	16	17	18	19	20	21	22
5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	0	-2	4	1	-3	2	-1	-4
-8	-6	-5	-12	-10	-7	-13	-11	-9
-14	-15	-16	-17	-18	-19	-20	-21	-22
13	12	12	20	19	17	24	23	22
28	30	32	34	36	38	40	42	44

di mana kita telah tuliskan dua baris di bawah segiempat tepat itu, iaitu hasil tolak bagi baris kedua dengan baris keempat dan bagi baris pertama dengan baris terakhir. Adalah lebih mudah untuk mengimbangkan baris pertama dan baris kelima sebab hasil tolaknya ialah $2(2h+1)^2 = 162$ yang boleh dituliskan sebagai hasil tambah beberapa unsur dalam set $\{28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44\}$, iaitu $162 = 44 + 42 + 40 + 36$. Jika kita salingtukarkan unsur-unsur yang sesuai dalam baris kedua dan keempat dengan cara yang sama seperti bagi (5), maka kita mendapat segiempat tepat

14	15	16	17	-18	19	-20	-21	-22
5	6	-5	8	9	10	-13	-11	-9
3	0	-2	4	1	-3	2	-1	-4
-8	-6	7	-12	-10	-7	11	12	13
-14	-15	-16	-17	18	-19	20	21	22

.

Kita teruskan dengan menggunakan kaedah seperti di seksyen satu dan pertimbangkan dua baris yang mempunyai hasil tambah $\pm 2 \cdot (2h+1)^2$. Untuk suatu segiempat tepat dengan n turus, set hasil tolak bagi dua baris baru, iaitu baris pertama dan baris kelima ialah

$$\{3n+1,\, 3n+3,\, 3n+5,\, \ldots,\, 5n-3,\, 5n-1\}.$$

Kita pertimbangkan kes h ganjil dan h genap secara berasingan. Ingat kembali bahawa $n = 2h+1$.

Kes 1: h **ganjil.** Ambil unsur $4n+6 = 8h+10$ dari set hasil tolak di atas dan pilih $\frac{h-1}{2}$ pasangan $(8h+8+2i) + (8h+8-2i)$ bagi $i > 1$ yang memberi nilai

$$\frac{h-1}{2}(16h+16) + 8h + 10 = (8h^2 - 8) + 8h + 10 = 2n^2.$$

Kes 2: h **genap.** Ambil unsur-unsur $4n+6 = 8h+10$ dan $4n+4 = 8h+8$ dari set hasil tolak di atas serta pilih $\frac{h-2}{2}$ pasangan $(8h+8+2i) + (8h+8-2i)$ bagi $i > 1$ yang memberi nilai

$$\begin{aligned} \frac{h-2}{2}(16h+16) + (8h+8) + (8h+10) &= (8h^2 - 8h - 16) + 16h + 18 \\ &= 2n^2. \end{aligned}$$

Bagi kes h ganjil dan $h \geq 5$, kita dapati $n \geq 11$ dan $4n+6 < 5n-1$ serta $8h+8+2\left(\frac{h+1}{2}\right) = 9h+9 \leq 5n-1$. Bagi kes h genap dan $h \geq 4$, kita dapati $n \geq 9$ dan $4n+6 < 5n-1$

serta $8h+8+2\left(\frac{h-2}{2}+1\right) \leq 5n-1$. Jadi bagi $n>7$ kita selalu boleh dapatkan unsur yang dikehendaki. Untuk $n=5$ dan $n=7$, kita cari dua penyelesaian khas untuk segiempat tepat ajaib yang mempunyai baris tengah seperti di bawah:

12	-12	-4	-3	7
-9	8	5	3	-7
-2	-1	0	1	2
-11	11	4	-10	6
10	-6	-5	9	-8

-11	-12	-13	14	15	16	-9
4	12	-4	-14	8	-16	10
1	3	-2	0	2	-3	-1
-5	5	6	-7	-10	-6	17
11	-8	13	7	-15	9	-17

.

Dari hasil-hasil di atas, kita mendapat keputusan berikut:

Teorem 2 *Bagi setiap nombor ganjil $n>3$ wujud satu segiempat tepat ajaib dengan lima baris dan n turus yang mempunyai satu baris tengah dengan integer-integer $2n+1$, $2n+2, \ldots, 3n$.*

3 Penyelesaian bagi Kes Am

Untuk kes am, kita gunakan kaedah dari seksyen tiga dalam [1]. Suatu segiempat tepat yang *simetri berpusat* ialah suatu susunan nombor-nombor dari set $\left[-\frac{mn-1}{2}, +\frac{mn-1}{2}\right]$ dalam suatu segiempat tepat di mana hasil tambah nombor-nombor pada setiap baris dan turus adalah kosong. Misalnya, segiempat tepat ajaib yang diperolehi dalam Contoh 1 adalah simetri berpusat. Dari Teorem 1 dalam [1], kita mendapat hasil berikut:

Wujud segiempat tepat dengan empat baris dan n turus atas set $\pm[c+1, c+2n]$ jika dan hanya jika c ialah penyelesaian bagi ketaksamaan $0 \leq 2c < (n-1)^2-4$.

Kita akan gunakan Teorem 1(ii) dari [1] untuk segiempat tepat dengan $m=3+4k$ atau $m=5+4k$ baris, di mana $m \leq n$, dan kita gabungkan suatu segiempat tepat dengan empat baris dan n turus atas set $\pm[c+1, c+2k]$ kepada segiempat tepat yang sudah didapati oleh kaedah aruhan matematik. Kita mulakan aruhan itu dengan kes $m=3$ atau $m=5$ yang telah pun dipertimbangkan dalam seksyen-seksyen di atas. Pemalar c menjadi $c=\frac{(m-4)n-1}{2}$ dengan keadaan $0 \leq 2c < (n-1)^2-4$, supaya kita boleh gunakan Teorem 1 dari [1] dan aruhan matematik untuk mendapatkan satu segiempat tepat ajaib dengan m baris dan n turus. Baris tengah yang terdiri daripada $\{-h, \ldots, +h\}$ dalam kes simetri berpusat tidak berubah dalam pembinaan ini. Maka kita dapati

Teorem 3 *Bagi nombor ganjil m, n dengan $1<m \leq n$ dan $(m, n) \neq (3,3)$, wujud satu segiempat tepat ajaib dengan m baris dan n turus yang mempunyai satu baris tengah.*

Kita jelaskan kaedah di atas dengan contoh berikut: Gabungan segiempat tepat dari (5) dengan segiempat tepat

15	16	20	23	-21	-27	-25	13	-14
17	18	19	-26	-24	-28	25	29	-30
-15	-18	-20	26	21	27	-22	-13	14
-17	-16	-19	-23	24	28	22	-29	30

dari [1] (m.s. 34 dan m.s. 37) memberikan suatu segiempat tepat simetri berpusat dengan 7 baris dan 9 turus yang mempunyai satu baris tengah.

4 Kesimpulan

Dalam kertas ini, kita telah memberikan kaedah pembinaan suatu jenis segiempat tepat ajaib yang mudah, yang mempunyai satu baris tengah. Ini merupakan suatu reformulasi dan pemantapan hasil dari [5]. Dalam [3] dan [4], beberapa kotak ajaib telah dibina. Masalah pembinaan kotak ajaib adalah lebih sukar dan masih belum diselesaikan dengan sepenuhnya. Adalah diharapkan bahawa persoalan yang dikaji dalam kertas ini dan kaedah penyelesaiannya boleh diterapkan untuk masalah pembinaan kotak ajaib yang lebih sukar itu.

Penghargaan. Saya berterimakasih kepada Angelina Chin kerana bantuan beliau semasa penyediaan makalah ini.

Rujukan

[1] T. Bier & A. Kleinschmidt, *Centrally Symmetric and Magic Rectangles*, Discrete Mathematics **176** (1997), 29–42.

[2] T. Bier & D.R. Rogers, *Balanced Magic Rectangles*, European Journal of Combinatorics **14** (1993), 285–299.

[3] T. Bier, *Kewujudan Kotak Ajaib Berperingkat Ganjil*, Menemui Matematik, akan terbit.

[4] T. Bier, *Magic Boxes with Odd Coprime Sidelength*, Preprint, University of Malaya, 1999.

[5] T.R. Hagedorn, *Magic Rectangles Revisited*, Discrete Mathematics, to appear.

[6] D.G. Rogers, *On the General Erdos Conjecture of Difference Sets and Embedding Partial Complete Permutations*, European Journal of Combinatorics **12** (1991), 549–560.