Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 1, hlm. 37–43

Klasifikasi bagi Kumpulan-Dua dengan Dua Penjana yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua

Nor Haniza Sarmin
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia

Abstrak Dalam kertas kerja ini, kita akan klasifikasikan semua kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua kepada isomorfismanya yang tertinggi. Di akhir kertas kerja ini dirumuskan satu persembahan bagi sebarang kumpulan yang finit dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua.

Katakunci Kumpulan-dua, dua penjana, kelas nilpoten dua

Abstract *In this paper we classify all two-generator two-groups of nilpotency class two, up to isomorphism. We conclude this paper with a presentation for any finite two-generator group of nilpotency class two.*

Keywords *Two-groups, two-generator, nilpotency class two*

1 Pengenalan

M. R. Bacon dan L.-C. Kappe dalam [1] telah memberikan satu klasifikasi bagi semua kumpulan-p (p ganjil) dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, yang dinyatakan dalam Teorem 1. Dalam [2], D.Ya.Trebenko telah cuba mengklasifikasikan semua kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, tetapi kertas kerja beliau banyak mengandungi kesilapan. Seperti dalam [1], kita akan gunakan pendekatan yang sama dengan cara pembuktian yang digunakan oleh Trebenko, dan membetulkan kesilapan-kesilapan yang wujud dalam kertas kerja tersebut. Seperti yang dijangkakan, kes $p = 2$ adalah lebih sukar dan kompleks disebabkan kumpulan yang terlibat bukan lagi nalar, dan tidak semestinya satu belahan perpanjangan (*split extension)*.

Teorem 1 *Katakan $G = \langle a, b\rangle$ adalah satu kumpulan-p yang finit dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, $p \neq 2$. Maka G adalah berisomorfisma dengan hanya satu daripada tiga kumpulan di bawah:*

(1.1) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=c$, $[a,c]=[b,c]=1$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|c|=p^{\gamma}$, α,β,γ *integer-integer* , $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$.

(1.2) $G \cong \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, α,β,γ *integer-integer* , $\alpha \geq 2\gamma$, $\beta \geq \gamma \geq 1$.

(1.3) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b]=a^{-p^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-p^{\alpha-\gamma}}$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|c|=p^{\sigma}$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, $\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ *integer-integer,* $\gamma>\sigma\geq 1$, $\alpha+\sigma\geq 2\gamma$, $\beta\geq\gamma$.

Kumpulan-kumpulan dalam senarai di atas adalah tidak berisomorfisma pasangan demi pasangan dan mempunyai kelas nilpoten dua.

2 Klasifikasi bagi Kumpulan-dua dengan Dua Penjana Yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua

Sebelum kita mulakan klasifikasi bagi kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, kita perlukan tiga lema. Lema di bawah adalah rumus kembangan yang biasa digunakan bagi kumpulan-kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua dan akan digunakan di sepanjang kertas kerja ini dengan tidak dirujuk semula. Kita tinggalkan bukti bagi lema tersebut.

Lema 1 *Katakan G adalah satu kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua. Maka bagi sebarang unsur $x,y,z\in G$ dan $n\in\mathbb{Z}$*

$$[x,yz]=[x,y][x,z] \quad \textit{dan} \quad [xy,z]=[x,z][y,z]; \tag{2.1}$$

$$[x^n,y]=[x,y^n]=[x,y]^n \quad \textit{dan} \quad (xy)^n=x^ny^n[y,x]^{\binom{n}{2}} \tag{2.2}$$

Dalam dua lema yang berikutnya, kita akan nyatakan dan buktikan beberapa ciri-ciri asas bagi kumpulan-kumpulan dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, yang mana mereka adalah korolari dari Lema 1.

Lema 2 *Katakan $G=\langle a,b\rangle$ adalah satu kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua. Maka*

(i) $G'=\langle [a,b]\rangle$;

(ii) Jika G' adalah finit dengan peringkat m, maka $\langle a\rangle\cap Z(G)=\langle a^m\rangle$ dan $\langle b\rangle\cap Z(G)=\langle b^m\rangle$.

Bukti *(i)* Oleh kerana G mempunyai kelas nilpoten dua, $G'\subseteq Z(G)$. Oleh itu, subkumpulan $\langle[a,b]\rangle$ adalah normal dalam G. Walaubagaimanapun, $G/\langle[a,b]\rangle=\langle a,b\rangle/\langle[a,b]\rangle$ adalah abelan. Oleh itu $G'\subseteq\langle[a,b]\rangle$. Maka $G'=\langle[a,b]\rangle$.

(ii) Katakan $\langle a\rangle\cap Z(G)=\langle a^k\rangle$. Dengan menggunakan (2.2), $[a,b]^k=[a^k,b]=1$, oleh itu $k\equiv 0 \mod m$ dan $a^k\in\langle a^m\rangle$. Tetapi jika dilihat dari satu sudut yang lain, $[a^m,b]=$

$[a,b]^m = 1$. Maka, $a^m \in \langle a \rangle \cap Z(G) = \langle a^k \rangle$. Oleh itu kita perolehi $\langle a^k \rangle \subseteq \langle a^m \rangle \subseteq \langle a^k \rangle$, yang memberikan $\langle a \rangle \cap Z(G) = \langle a^m \rangle$. Dengan cara yang sama, kita perolehi $\langle b \rangle \cap Z(G) = \langle b^m \rangle$. $\square$

Lema 3 *Katakan $G = \langle a, b \rangle$ adalah satu kumpulan-p yang mempunyai kelas nilpoten dua.*
(i) Jika $G' \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^k} \rangle$ dan $|G'| = p^\gamma$, maka $k \geq \gamma$.
(ii) Jika $|a| = p^\alpha, \alpha \geq 2$, $|[a,b]| = p^\gamma$ dan $[a,b] \in \langle a \rangle$, maka $\alpha \geq 2\gamma$.

Bukti *(i)* Dari Lema 2, $G' = \langle [a,b] \rangle$. Maka $[a,b]^{p^k} = [a^{p^k}, b] = 1$, oleh kerana $a^{p^k} \in Z(G)$. Ini memberikan $k \geq \gamma$, oleh kerana $|[a,b]| = p^\gamma$.

(ii) Oleh kerana $[a,b] \in \langle a \rangle$, kita perolehi $G' \cap \langle a \rangle = G'$. Tetapkan $c = [a,b]$. Maka $c = a^{sp^{\alpha-\gamma}}$, dengan $(s,p) = 1$. Biarkan $a_2 = a^s$. Maka $c = a_2^{p^{\alpha-\gamma}} \in \langle a \rangle$ dan $|a_2| = |a|$. Dari *(i)*, $\alpha - \gamma \geq \gamma$, maka $\alpha \geq 2\gamma$. $\square$

Kes-kes p ganjil dan $p = 2$ dalam mengklasifikasikan kumpulan-p dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua terpaksa dibuktikan secara berasingan disebabkan oleh lema di bawah.

Lema 4 *Katakan G adalah satu kumpulan-p yang bukan abelan dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Juga, katakan $b \in G$ mempunyai peringkat yang minimum tetapi tidak berada dalam $\Phi(G)$, subkumpulan Frattini bagi G, dan katakan a adalah satu unsur dengan peringkat yang minimum supaya $\langle a, b \rangle = G$. Jika $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq \langle 1 \rangle$, maka $p = 2$.*

Bukti Pilih a dan b seperti dalam hipotesis. Katakan $\langle d \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Maka wujud $u, v \in \mathbb{N}$ dengan keadaan $d = a^u = b^v$. Oleh kerana G bukan satu kumpulan kitaran, kita dapati $u = sp^i, v = tp^j$, dengan $i, j \in \mathbb{N}$, dan $(s,p) = (t,p) = 1$. Sekarang, $|b| \leq |a|$ mengimplikasikan $j \leq i$. Pertimbangkan $b_1 = a^{-sp^{i-j}} b^t$. Oleh kerana $(t,p) = 1$, kita perolehi $\langle b_1, a \rangle = G$. Sekarang, dari (2.2) dan pemilihan b_1, kita dapati

$$b_1^{p^j} = (a^{-sp^{i-j}} b^t)^{p^j} = a^{-sp^i} b^{tp^j} [b^t, a^{-sp^{i-j}}]^{\binom{p^j}{2}} = [b^t, a^{-sp^{i-j}}]^{\binom{p^j}{2}} = [a,b]^{stp^{i-j}\binom{p^j}{2}}.$$

Oleh itu kita perolehi

$$b_1^{p^j} = [a,b]^{stp^{i-j}\binom{p^j}{2}} \tag{4.1}$$

Oleh kerana $b^v = d \neq 1$, maka $|b| > p^j$, dan dari pemilihan b tadi, $|b_1| \geq |b|$. Ini mengimplikasikan $b_1^{p^j} \neq 1$. Jika dilihat dari sudut yang lain, $[a,b]^{sp^i} = [a^{sp^i}, b] = [b^{tp^j}, b] = 1$. Katakan sekarang $p \neq 2$. Dari bahagian kanan (4.1) kita perolehi $[a,b]^{stp^{i-j}\binom{p^j}{2}} = [a,b]^{stp^i(p^j-1)/2} = 1$, iaitu satu percanggahan. Oleh itu p mesti bersamaan dengan 2, jika $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$. $\square$

Sekarang kita telah bersedia untuk mengklasifikasikan kumpulan-dua dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Dengan menggantikan nombor perdana 2 dengan p, satu nombor perdana yang ganjil, dalam (6.1)-(6.3) di bawah dan menghapuskan $\alpha + \beta > 3$ dalam (6.2) akan memberikan setepatnya klasifikasi bagi kumpulan-p, p ganjil, yang mempunyai kelas nilpoten dua seperti yang diberikan dalam Teorem 1. Perhatikan bahawa kes

(6.4) tidak timbul dalam kes p ganjil. Kita tambahkan syarat $\alpha+\beta>3$ dalam (6.2), supaya kumpulan dwihedron tidak termasuk di dalam kedua-dua kes (6.1) dan (6.2).

Teorem 2 *Katakan G adalah satu kumpulan-dua yang finit, bukan abelan, dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Maka G adalah berisomorfisma dengan hanya satu daripada empat kumpulan-kumpulan di bawah:*

(6.1) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=c$, $[a,c]=[b,c]=1$, $|a|=2^{\alpha}$, $|b|=2^{\beta}$, $|c|=2^{\gamma}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$;

(6.2) $G \cong \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=a^{2^{\alpha-\gamma}}$, $|a|=2^{\alpha}$, $|b|=2^{\beta}$, $|[a,b]|=2^{\gamma}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2\gamma$, $\beta \geq \gamma$, $\alpha+\beta>3$;

(6.3) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b]=a^{2^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b]=a^{-2^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-2^{\alpha-\gamma}}$, $|a|=2^{\alpha}$, $|b|=2^{\beta}$, $|c|=2^{\sigma}$, $|[a,b]|=2^{\gamma}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \sigma \in \mathbb{N}$, $\beta \geq \gamma > \sigma$, $\alpha+\sigma \geq 2\gamma$;

(6.4) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\langle b\rangle$, *dengan* $|a|=|b|=2^{\gamma+1}$, $|[a,b]|=2^{\gamma}$, $|c|=2^{\gamma-1}$, $[a,b]=a^2c$, $[c,b]=a^{-4}c^{-2}$, $a^{2^{\gamma}}=b^{2^{\gamma}}$, $\gamma \in \mathbb{N}$.

Kumpulan-kumpulan dalam senarai di atas adalah tidak berisomorfisma pasangan demi pasangan dan mempunyai kelas nilpoten dua.

Bukti Katakan G adalah satu kumpulan-dua yang finit dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Biarkan

$$T=\{x \in G-\Phi(G);\ x \text{ mempunyai peringkat yang minimum}\}.$$

Maka terdapat dua kes:
Kes I. Wujud $y \in G$, $x \in T$ dengan keadaan $G=\langle x,y\rangle$ dan $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = 1$. Di antara semua $x \in T$ yang mana wujud y supaya $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \langle 1\rangle$, pilih $x=b_1$ supaya $y=a_1$ mempunyai peringkat yang minimum.
Kes II. Bagi semua $x \in T$ dan semua $y \in G$ dengan $\langle x,y\rangle = G$, kita perolehi $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \neq 1$. Di antara semua $x \in T$ pilih $x=b_1$ supaya $y=a_1$ mempunyai peringkat yang minimum. Mulai dari sekarang, katakan $G=\langle a_1,b_1\rangle$, dengan a_1 dan b_1 adalah seperti yang dinyatakan dalam Kes I dan II, dan katakan $|a_1|=2^{\alpha}$, $|b_1|=2^{\beta}$ dan $|G'|=2^{\gamma}$.

Sekarang kita lihat kedua-dua kes tersebut secara berasingan. Mula-mula kita kaji Kes I dan oleh itu pertimbangkan lima subkes di bawah:

(6.5) $\langle a_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle, \quad \langle b_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle;$

(6.6) $\langle b_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle, \quad \langle a_1\rangle \cap G' = G';$

(6.7) $\langle b_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle, \quad \langle 1\rangle \neq \langle a_1\rangle \cap G' \subset G';$

(6.8) $\langle a_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle, \quad \langle b_1\rangle \cap G' = G';$

(6.9) $\langle a_1\rangle \cap G' = \langle 1\rangle, \quad \langle 1\rangle \neq \langle b_1\rangle \cap G' \subset G'.$

Katakan (6.5) adalah benar. Tetapkan $b = b_1$ dan $a = a_1$. Sekarang, $\alpha \geq \beta$ diikuti dari pemilihan a dan b, dan $|b| = 2^\beta$ mengimplikasikan $1 = [a, b^{2^\beta}] = [a, b]^{2^\beta}$. Maka, $\beta \geq \gamma$. Keputusan ini, bersama-sama dengan $G' \neq \langle 1 \rangle$, memberikan $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$. Maka, adalah mudah untuk dilihat bahawa $G = (\langle [a, b] \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, dan G adalah dari jenis (6.1).

Seterusnya pertimbangkan (6.6). Maka $[a_1, b_1] = a_1^{r2^{\alpha-\gamma}}$ bagi sebarang integer ganjil r. Dengan menetapkan $a = a_1$ and $b = b_1^s$ dengan $rs \equiv 1 \mod 2^\gamma$, kita dapati $[a, b] = a_1^{rs2^{\alpha-\gamma}} = a^{2^{\alpha-\gamma}}$. Adalah mudah untuk dilihat bahawa G adalah dari jenis (6.2).

Sekarang katakan (6.7) adalah benar. Tetapkan $c_1 = [a_1, b_1]$. Kita dapati $\langle c_1^{2^\sigma} \rangle = \langle a_1 \rangle \cap G'$ bagi $\sigma \in \mathbb{N}$, dan σ adalah yang minimum dengan keadaan $1 \neq c_1^{2^\sigma} = a_1^{s2^k}$ bagi $s, k \in \mathbb{N}$ dan $(s, 2) = 1$. Ini memberikan $\sigma < \gamma$. Dan lagi, $2^{\gamma-\sigma} = |c_1^{2^\sigma}| = |a_1^{s2^k}| = 2^{\alpha-k}$. Ini mengimplikasikan $k = \alpha - \gamma + \sigma$. Dari Lema 3, bahagian *(i)*, kita dapati $\alpha + \sigma \geq 2\gamma$. Tetapkan $a = a_1^s$ dan $c = c_1 a^{-2^{k-\sigma}} = c_1 a^{-2^{\alpha-\gamma}}$, oleh itu $c^{2^\sigma} = 1$. Keputusan ini, bersama-sama dengan keminimuman σ mengimplikasikan $|c| = 2^\sigma$ dan $|G' \cap \langle a \rangle| = 2^{\gamma-\sigma}$. Boleh ditunjukkan bahawa $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = \langle 1 \rangle$, dan oleh itu $\langle c_1, a \rangle = \langle c, a \rangle = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$.

Tetapkan $b_1 = b$. Kita tunjukkan $\langle c \rangle \cap \langle b \rangle = \langle 1 \rangle$. Andaikan ia tidak benar. Oleh kerana $c \in \langle [a, b], a^{-2^{k-\sigma}} \rangle$, ini bermakna wujud integer-integer $\lambda, \mu \geq 0$ dengan keadaan $a^{-2^{k-\sigma+\lambda}} \equiv b^{r2^\mu} \mod G'$ bagi $r \in \mathbb{N}$ dengan $(r, 2) = 1$. Katakan $a^{-2^{k-\sigma+\lambda}} \not\equiv 1 \mod G'$. Tetapkan $i = \alpha - k + \sigma - \lambda - 1$. Kita perolehi $a^{-2^{k-\sigma+\lambda+i}} = a^{-2^{\alpha-1}}$. Oleh itu $a^{-2^{k-\sigma+\lambda+i}}$ mempunyai peringkat 2. Oleh kerana $k \leq \alpha - 1$, $a^{-2^{\alpha-1}} \in G'$. Maka $1 \neq b^{r2^{\mu+i}} \in \langle a \rangle \cap G'$, dan oleh itu $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq \langle 1 \rangle$, percanggahan kepada pemilihan a dan b. Jika $a^{-2^{k-\sigma+\lambda}} \equiv 1 \mod G'$, kita mendapat percanggahan yang sama . Oleh itu kita rumuskan bahawa $\langle c \rangle \cap \langle b \rangle = \langle 1 \rangle$. Boleh ditunjukkan bahawa G adalah dari jenis (6.3).

Kes-kes (6.8) dan (6.9) adalah setara dengan (6.6) dan (6.7) , dengan peranan a dan b saling ditukarganti. Secara khususnya, katakan (6.8) atau (6.9) adalah benar dan $G = \langle a_1, b_1 \rangle$. Di sini kita tetapkan $a = b_1$ and $b = a_1^s$ bagi satu integer ganjil s yang sesuai dan menghasilkan kumpulan dari jenis (6.2) atau (6.3), masing-masing.

Akhir sekali, kita pertimbangkan Kes II, iaitu bagi semua $x \in T$ dan semua $y \in G$ dengan $G = \langle x, y \rangle$, kita dapati $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \langle 1 \rangle$. Maka wujud integer-integer ganjil s dan t dengan keadaan $a_1^{s2^k} = b_1^{t2^l}$, bagi $k, l \in \mathbb{N}$. Oleh kerana $|b_1| \leq |a_1|$, kita perolehi $l \leq k$. Kita buktikan $k = \gamma$. Katakan $b_0 = a_1^{-s2^{k-l}} b_1^t$. Oleh kerana $(t, 2) = 1$, ini bermakna $\langle b_0, a_1 \rangle = G$, dan (5.1) memberikan

$$b_0^{2^l} = [a_1, b_1]^{st2^{k-1}(2^l-1)} \tag{6.10}$$

Dari pemilihan b_1 and $|b_0| \geq |b_1| > 2^l$, kita dapati $b_0^{2^l} \neq 1$. Maka $[a_1, b_1]^{2^{k-1}} \neq 1$. Oleh kerana s dan t adalah ganjil, $[a_1, b_1]^{s2^k} = [a_1^{s2^k}, b_1] = [b_1^{t2^l}, b_1] = 1$. Ini mengimplikasikan $k = \gamma$.

Kita akan tunjukkan juga bahawa $l = \gamma$. Perhatikan bahawa dari (2.2) kita dapati $[a_1, b_1]^{t2^l} = [a_1, b_1^{t2^l}] = [a_1, a_1^{s2^\gamma}] = 1$. Maka $l \geq \gamma$. Walau bagaimanapun, dari fakta di atas dan dari pemilihan b_1, kita perolehi $l \leq k = \gamma$, dan ini memberikan $l = \gamma$.

Sekarang kita buktikan bahawa $|b_0| = |b_1| = |a_1| = 2^{\gamma+1}$. Dari (6.10) dan fakta-fakta di atas, kita dapati $b_0^{2^\gamma} \neq 1$ dan $b_0^{2^{\gamma+1}} = [a_1, b_1]^{s2^\gamma(2^\gamma-1)} = 1$. Maka $|b_0| = 2^{\gamma+1}$. Ini, bersama-sama dengan $|b_0| \geq |b_1| > 2^\gamma$, memberikan $|b_1| = 2^{\gamma+1}$. Oleh kerana $k = l$, kita dapati $a_1^{-s} = b_0 b_1^{-t}$, dan oleh itu, dari (2.2), $(a_1^{-s})^{2^{\gamma+1}} = [a_1, b_1]^{st\binom{2^{\gamma+1}}{2}} = 1$. Ini mengimplikasikan $|a_1| \leq 2^{\gamma+1}$. Tetapi, dari atas tadi, $|a_1| > 2^\gamma$. Kita rumuskan $|a_1| = 2^{\gamma+1}$.

Oleh kerana $|b_0| = |b_1|$ dan $\langle b_0, a_1\rangle = \langle b_1, a_1\rangle$, kita dapati $b_0 \in T$. Kita tetapkan $b = b_0$ dan $a = a_1$, dan oleh itu memperolehi $a^{2^\gamma} = b^{2^\gamma}$. Dari bahagian *(ii)* dalam Lema 2, kita dapati $\langle b^{2^\gamma}\rangle = \langle b\rangle \cap Z(G) \supseteq G' \cap \langle b\rangle \neq 1$. Oleh kerana $|b^{2^\gamma}| = 2$, ini dan di atas memberikan $\langle b\rangle \cap G' = \langle a\rangle \cap G' = \langle b^{2^\gamma}\rangle$. Adalah mudah untuk menjustifikasikan bahawa $Z(G) = G'$. Oleh itu kita tinggalkan buktinya.

Sekarang, katakan $\gamma = 1$. Oleh itu $|a| = |b| = 2^2$, $a^2 = b^2 = [a, b]$, dan G adalah kumpulan kuaternion dengan peringkat 8. Bagi $\gamma > 1$, tetapkan $c = a^{-2}[a, b]$. Oleh kerana $[a, b]^{2^{\gamma-1}} = a^{2^\gamma}$, kita perolehi $c^{2^{\gamma-1}} = (a^{-2}[a, b])^{2^{\gamma-1}} = a^{2^\gamma}[a, b]^{2^{\gamma-1}} = 1$. Ini, bersama-sama dengan $\langle a\rangle \cap G' = \langle a^{2^\gamma}\rangle$, mengimplikasikan $|c| = 2^{\gamma-1}$. Kita tunjukkan $\langle a\rangle \cap \langle c\rangle = \langle 1\rangle$. Katakan $\langle d\rangle = \langle a\rangle \cap \langle c\rangle$. Maka wujud integer-integer n, m dengan keadaan $a^n = c^m = d$, dan oleh itu $a^{n+2m} = [a, b]^m$. Oleh kerana $G' \cap \langle a\rangle = \langle a^{2^\gamma}\rangle$, ini memberikan $m \equiv 2^{\gamma-1} \mod 2^\gamma$. Oleh kerana $|c| = 2^{\gamma-1}$, kita perolehi $1 = c^m = d$. Maka $\langle a\rangle \cap \langle c\rangle = \langle 1\rangle$ dan $\langle a, c\rangle = \langle a\rangle \times \langle c\rangle$. Untuk membina kumpulan G, pertimbangkan $H = (\langle w\rangle \times \langle u\rangle) \rtimes \langle v\rangle$, satu kumpulan dari jenis (6.3) dengan $\alpha = \beta = \gamma + 1$. Oleh kerana $u^{2^\gamma}, v^{2^\gamma} \in Z(H)$, $\langle u^{2^\gamma} v^{2^\gamma}\rangle \lhd H$. Perhatikan $G \cong H/\langle u^{2^\gamma} v^{2^\gamma}\rangle$. Boleh ditunjukkan bahawa G adalah dari jenis (6.4).

Adalah mudah untuk menjelaskan bahawa semua kumpulan di atas mempunyai kelas nilpoten dua. Juga, tidak sukar tetapi rumit untuk menunjukkan bahawa mereka adalah tidak berisomorfisma pasangan demi pasangan. Oleh itu buktinya ditinggalkan. $\square$

3 Klasifikasi Bagi Kumpulan Yang Finit Dengan Dua Penjana Yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua

Secara umumnya, satu kumpulan yang finit dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua boleh dipersembahkan dalam teorem di bawah:

Teorem 3 *Katakan G adalah satu kumpulan yang finit dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Maka*

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n,$$

dengan $G_1, G_2, ..., G_n$ ditakrifkan dengan syarat-syarat berikut:

(7.1) peringkat bagi kumpulan-kumpulan G_i adalah suatu kuasa bagi nombor-nombor perdana p_i, $i = 1, 2, ..., n$.

(7.2) kumpulan-kumpulan G_i, $i = 1, 2, ..., n$, adalah sama ada abelan, dan dijana oleh

sebanyak-banyaknya dua unsur, atau mereka adalah satu kumpulan dari jenis (6.1)-(6.4), jika $p_i = 2$, dan satu kumpulan dari jenis (1.1)-(1.3), jika $p_i \neq 2$.

Bukti Katakan $G_{p_1}, G_{p_2}, ..., G_{p_n}$ adalah semua subkumpulan Sylow bagi G yang tidak remeh. Oleh kerana G adalah nilpoten, $G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times ... \times G_{p_n}$. Adalah jelas bahawa setiap $G_{p_1}, G_{p_2}, ..., G_{p_n}$ dijana oleh sebanyak-banyaknya dua unsur dari G. Oleh kerana kelas nilpoten bagi subkumpulan ini tidak melebihi dua, maka bagi setiap $i = 1, 2, ..., n$, G_{p_i} adalah sama ada satu kumpulan abelan, atau satu kumpulan dari jenis (6.1)-(6.4), jika $p = 2$, atau satu kumpulan dari jenis (1.1)-(1.3), jika $p \neq 2$. Katakan $G_{p_1} = G_1$, $G_{p_2} = G_2$, ... , $G_{p_n} = G_n$. Maka $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ dengan kedua-dua syarat tersebut dipenuhi.

Sebaliknya, katakan $G = G_1 \times ... \times G_n$ seperti yang diberi di atas. Kita tunjukkan bahawa G adalah satu kumpulan yang finit dan nilpoten dengan dua penjana. Fakta bahawa G adalah finit dan nilpoten datangnya dari syarat (7.1)-(7.2). Sekarang, $G_i = \langle a_i, b_i \rangle$ bagi $i = 1, ..., n$. Katakan $g = a_1 ... a_n$ dan $h = b_1 ... b_n$. Maka $G = \langle g, h \rangle$, dan G adalah satu kumpulan dengan dua penjana. □

Rujukan

[1] M. R. Bacon, L.-C. Kappe, *The nonabelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2*, Arch. Math. **61** (1993), 508-516.

[2] D.Ya. Trebenko, *Nilpotent groups of class two with two generators*, Current Analysis and its Applications, Naukova Dumka. Kiev **228** (1989), 201-208.