Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 1, hlm. 65–78

Beberapa Penganggar Kukuh Dalam Model Linear Teritlak

Nor Aishah Hamzah
Institut Sains Matematik
Universiti Malaya
50603 Kuala Lumpur, Malaysia

Abstrak Beberapa penganggar kukuh sebagai alternatif kepada Penganggar Kebolehjadian Maksimum (PKM) di dalam Model Linear Teritlak (MLT) apabila wujud titik-titik terpencil akan dibincangkan. Penganggar - penganggar kukuh ini adalah hasil lanjutan penganggar-M dan lanjutan penganggar Median Kuasadua Terkecil (MKT) dalam model linear. Suatu kajian simulasi dengan respons yang bertaburan Gamma telah dijalankan untuk membandingkan kekukuhan penganggar-penganggar tersebut apabila pencemaran berlaku di dalam data. Satu kajian kes juga akan dilihat.

Katakunci Penganggar kebolehjadian maksimum, model linear teritlak, nilai-nilai terpencil, median kuasadua terkecil, model linear, penganggar kukuh

Abstract *Several robust estimators as alternative to Maximum Likelihood Estimator in Generalized Linear Models(GLMs) in the presence of outlying observations is discussed. These robust estimators are generalization of the M-estimator and Least Median of Squares (LMS) in the linear model. A simulation study when the response is from the Gamma distribution will be carried out to compare the robustness of these estimators when the data is contaminated. A real example will be revisited.*

Keywords *Maximum likelihood estimator, generalized linear model, outliers, least median of squares, linear model, robust estimators.*

1 Pengenalan

Dalam kertas ini, kita akan mempelajari tentang kaedah penganggaran kukuh $\boldsymbol{\beta}$ dalam Model Linear Teritlak (MLT) (Nelder dan Wedderburn [7]) apabila ketumpatan bersyarat bagi $\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}$ adalah berbentuk

$$f(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i;\phi)\right\} \tag{1}$$

Di sini θ_i adalah parameter asli untuk keluarga eksponen. Bagi setiap respons y_i, kita biarkan satu parameter θ_i yang berasingan, yang membawa maklumat dari pembolehubah penerang X. Parameter ϕ adalah parameter skel yang sepunya untuk semua y_i, seumpama varians bagi satu taburan Gaussian. Parameter b dan c menentukan bentuk taburan dari mana respons dipilih. Di antara contoh-contoh MLT ialah model linear regresi sebagai kes istimewa dan model analisis varians, model logit dan probit untuk respons quantal serta model log-linear.

Sekarang kita beri takrif

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j,\ i = 1, \ldots, n$$

iaitu kita biarkan n-vektor peramal, η sebagai fungsian bersandar ke atas p parameter. Hubungan θ_i dalam sebutan $\mathbf{x}_i$ bagi respons ke-i melalui

$$g(y_i) = \eta_i = \boldsymbol{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2}$$

di mana $g(\cdot)$ adalah satu fungsi terbeza dan dikenali sebagai fungsi penyambung.

Kaedah yang kerap digunakan untuk menganggar parameter(anu), $\boldsymbol{\beta}$, adalah kaedah penganggar kebolehjadian maksimum(PKM), di mana $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$ memaksimumkan jumlah setiap fungsi log-kebolehjadian. Sebagaimana yang dijangka di dalam teori, PKM adalah satu penganggar yang cekap sekiranya tiada wujud data lampau atau terpencil.

Motivasi bagi penganggaran kukuh dalam MLT adalah sama seperti di dalam model linear iaitu penganggar kebolehjadian maksimum (PKM) adalah tidak kukuh dan mudah dipengaruhi oleh titik-titik terpencil. Perhatikan bahawa di dalam kes di mana y adalah bertaburan normal (model linear) dengan min, $E(y) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$, dan varians σ^2, kaedah penganggaran Kuasa Dua Terkecil Klasikal (KDTK) yang digunakan adalah PKM.

Beberapa alternatif kepada kaedah PKM akan dibincangkan dalam kertas ini. Ini termasuklah kaedah penganggar-M iaitu lanjutan daripada penganggar-M dalam model linear dan kaedah Median Devian Terkecil (MDT) iaitu lanjutan daripada Median Kuasadua Terkecil (MKT) dalam model linear. Kajian simulasi akan dibincangkan dalam bahagian tiga dan diikuti oleh satu kajian kes dalam bahagian empat. Kesimpulan akan diberikan dalam bahagian lima.

2 Alternatif Kepada PKM

Sekarang kita takrifkan fungsi sisihan (deviance)

$$d(\theta_i, y_i) = 2\{l(\tilde{\theta}_i; y_i) - l(\theta_i; y_i)\} \tag{3}$$

di mana

$$l(\theta_i; y_i) = \log_e\ f(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i; \phi)$$

Di sini $\tilde{\theta}_i$ ialah PKM yang berdasarkan kepada cerapan y_i sahaja, iaitu $\tilde{\theta}_i = (b')^{-1}(y_i)$.

Kaedah PKM dengan penganggar $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$ adalah setara dengan meminimumkan jumlah sisihan individu. Maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$ meminimumkan

$$D(\theta; y) = \min_\beta \sum_{i=1}^{n} d(\theta_i, y_i) = \min_\beta \sum_{i=1}^{n} d_i \tag{4}$$

Pengubahsuaian PKM mula diperkenalkan oleh Pregibon [8] hanya menggantikan komponen sisihan, d_i , dengan suatu fungsi sisihan, $\rho(d_i)$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ ditakrifkan sebagai nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang meminimumkan jumlah $\rho(d_i)$ ke atas $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, iaitu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M \text{ ialah } \hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ yang meminimumkan } \sum_{i=1}^{n} \rho(d_i) \tag{5}$$

Fungsi ρ memainkan peranan sebagai penapis yang akan menghadkan sumbangan cerapan terpencil atau lampau dalam menentukan penyuaian kepada suatu set data. Dengan andaian keujudan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ dan bahawa $\rho(d)$ adalah pasti monoton, maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ juga adalah unik sebagai kesan terus hasil andaian terdahulu mengenai keujudan dan keunikan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$ (lihat Wedderburn [13] dan Haberman [2]).

Meminimumkan (5) adalah setara dengan penyelesaian bagi

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_i \rho(d_i) = \sum_i \psi(d_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \tag{6}$$

Dari (2) dan (3), fungsi $\psi(d_i)$ boleh diungkapkan sebagai

$$\psi(d_i) = v_i \frac{dl(\theta_i, y_i)}{d\eta_i} x_{ij}, \; j = 1, \ldots, p \tag{7}$$

di mana

$$v_i = \frac{\partial}{\partial d_i} \rho(d_i)$$

adalah fungsi pemberat yang bersandar kepada data. Jika $\psi(\cdot)$ berbentuk (7), persamaan (6) adalah satu versi fungsi skor kebolehjadian maksimum berpemberat. Satu generalisasi terus bagi penganggar-M Huber (Pregibon [8]) dicapai dengan membenarkan

$$\rho(d_i) = \begin{cases} d_i, \text{ jika } d_i \leq c, \\ 2(d_i c)^{1/2} c, \text{ selainnya.} \end{cases}$$

di mana c sebagai pemalar 'tuning' yang boleh berubah bagi memberikan kecekapan relatif asimptotik yang dikehendaki pada taburan yang diketahui. Pregibon [8] telah menunjukkan bahawa pemberat boleh didapati dengan membezakan $\rho(t)$ terhadap t yang kemudiannya diberikan oleh

$$v_i = \begin{cases} 1, \text{ jika } d_i \leq c, \\ (c/d_i)^{1/2}, \text{ selainnya.} \end{cases}$$

Sebarang cerapan dengan nilai sisihan yang besar akan diberi pemberat yang kecil melalui skim ini. Bagi cerapan seperti ini, pemberat yang diberikan adalah berkadaran songsang kepada punca kuasa dua bagi nilai sisihan yang besar dan akan menghampiri sifar apabila sisihan d_i semakin membesar. Jika d_i adalah kecil, iaitu apabila $d_i \leq c$ untuk semua cerapan, maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$ adalah setara.

Dengan mengubahsuai fungsi $\rho(\cdot)$, kita boleh menghasilkan beberapa penganggar alternatif kepada PKM. Ini termasuklah penganggar yang dikemukakan oleh Pregibon [9] dan Stefanski et al. [11] manakala Morgenthaler [6] pula mencadangkan kaedah Sisihan Mutlak Terkecil (SMT).

Sebagai lanjutan kepada kaedah Median Kuasadua Terkecil(MKT), Hamzah [3] mencadangkan kaedah Median Devians Terkecil (MDT) dalam MLT iaitu menganggar $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MDT}$ yang meminimumkan nilai maksima (minimaks) sisihan tertib ke-q iaitu,

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \; d_{(q)}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \tag{8}$$

di mana $q = [\frac{n-p+1}{2}] + (p+1)$ dan $[\cdot]$ mewakili nilai integer terbesar.

MDT adalah satu kes istimewa bagi satu penganggar yang lebih am yang dinamakan penganggar sisihan (deviance) kuantil terkecil (QDT). Oleh kerana penganggar QDT meminimumkan reja sisihan k yang terkecil ($k > p$) bagi satu set data, ia mestilah meminimumkan sisihan maksimum bagi k subset unsur data tersebut. Oleh itu penganggar QDT ke-k mestilah suatu penyuaian sisihan minimaks kepada k subset unsur itu. Pada prinsipnya, kesemua penganggar QDT bagi sebarang model boleh diperolehi dengan mencari secara habisan ke atas subset data bagi satu sampel saiz yang diberi dan menghitung (compute) penyelesaian minimaks bagi setiap subset bersaiz k. Apabila bilangan sampel saiz n dan bilangan parameter p meningkat, pengiraan yang perlu dijalankan adalah tak ketersauran (infeasible) kerana bilangan subset yang besar perlu dipertimbangkan. Secara praktis, hanya sebahagian peratusan dari kesemua subset yang mungkin (dipilih secara rawak) akan dilihat jika $\binom{n}{p+1}$ terlalu besar. Teori dan pembuktian MDT boleh dirujuk kepada Hamzah dan Green [4].

Perhatikan bahawa jika respons bertaburan Gaussian dengan min μ dan varians σ^2, maka PKM adalah Kuasa Dua Terkecil Klasikal (KDTK) dan MDT adalah Median Kuasadua Terkecil (MKT). Kajian kes ini boleh dirujuk dalam Rousseeuw [10] dan Stromberg [12].

3 Kajian Simulasi

Di sini kita akan menggunakan kaedah simulasi untuk mempelajari gelagat penganggar pekali yang diperolehi dengan menggunakan kaedah penyuaian minimaks QDT ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{QDT}$) yang berdasarkan subset sampel, kaedah penganggar klasikal PKM ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{PKM}$) dan kaedah penganggar-M ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{M}$) yang telah dikemukakan oleh Pregibon [9].

Pertimbangkan satu regresi mudah apabila respons mengambil nilai pasti positif dan dijanakan dari taburan Gamma yang diberikan oleh

$$f(y) = \frac{\alpha^s \; y^{s-1} \; e^{-\alpha y}}{\Gamma(s)}, \; y \geq 0$$

Untuk kajian simulasi ini, kita pertimbangkan kes dengan fungsi hubungan kanonik iaitu

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = \frac{s}{\eta_i},$$

dengan

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 \boldsymbol{x}_i.$$

Satu ratus set data bersaiz 15 dijanakan dengan menggunakan $(\beta_0\ ,\ \beta_1) = (2.0\ \ ,\ \ 0.1)$ dan $\mathrm{x}_i,\ i = 1, \ldots, 15$ mengambil nilai dalam selang $[0.5\ \ ,\ \ 7.5]$.

Bagi mendapatkan t% titik-titik terpencil dalam respons, kita akan pilih sebanyak t% data asal dan tambahkan dengan suatu pemalar bernilai 100 kepada data tersebut.

Tiga prosedur penganggaran dijalankan iaitu minimaks MDT, PKM dan M. Di sini minimaks MDT tidak boleh dihitung secara tepat seperti dalam model regresi mudah.

Hasil kajian simulasi ini dipaparkan dalam Jadual 1–4. Perhatikan bahawa bagi anggaran $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, Min Kuasadua Ralat (MKR) bagi PKM adalah kecil apabila data tidak tercemar berbanding dengan penghampiran MDT dengan nilai varians yang kecil. Hasil seperti ini telah dijangkakan selaras dengan teori klasik. Seterusnya perhatikan bahawa nilai varians bagi PKM masih kecil walaupun MKR bertambah apabila data tercemar (lihat Jadual 2–4).

Oleh itu, boleh dikatakan bahawa nilai penganggar PKM menjadi pincang apabila wujudnya titik-titik terpencil dalam arah y. Contohnya yang ketara berlaku ke atas $\hat{\beta}_1$ iaitu ia berubah dari 0.099 (tiada data terpencil) kepada 0.066 dan 0.042 apabila wujud titik-titik terpencil di dalam set data sebanyak 13.3% dan 20% masing-masing. Keadaan yang hampir sama berlaku ke atas penganggar-M. Berbeza dari keadaan ini, didapati penganggar penghampiran MDT menunjukkan purata anggaran yang agak baik ($\hat{\beta}_0 = 2.011$ dan $\hat{\beta}_1 = 0.092$) walaupun wujud sebanyak 33.3% titik-titik terpencil dalam set data. Penyumbang terbesar bagi MKR untuk MDT ialah varians yang memberikan maklumat bahawa anggaran MDT berubah-ubah dari satu set data kepada set yang lain.

Gambaran keadaan ini boleh dilihat dari plot ketumpatan dalam Rajah 1–2.

4 Kajian Kes

Tujuan kajian kes ini hanyalah untuk menunjukkan perbezaan di antara penganggar di bawah kaedah PKM, M dan MDT apabila berlaku pencemaran ke atas set data.

Jadual 5 memberikan masa darah membeku (y) dalam saat, untuk plasma normal yang dilarutkan kepada sembilan peratusan kepekatan yang berbeza (x) dengan plasma bebas prothrombin (McCullagh dan Nelder [5]. Pembekuan dibuat oleh dua lot thromboplastin. Bliss [1] memuatkan model hyperbolic kepada lot 1, dengan menggunakan transformasi songsang kepada set data tersebut, dan data asal untuk kedua-dua lot. McCullagh dan Nelder menganalisa kedua-dua lot dengan menggunakan hubungan songsang dengan ralat gamma. Di sini prosedur MDT digunakan keatas kedua-dua lot seperti McCullagh dan Nelder dengan memuatkan penganggar pintasan dan kecerunan yang berlainan. Hasil yang diperolehi adalah seperti berikut.

Lot 1

Terdapat hanya sepuluh set penyelesaian yang memenuhi rangkuman yang diperlukan bagi penyuaian minimaks. Set penyelesaian terletak dalam dua kawasan yang berasingan yang ditandakan dengan A and B dalam Rajah 3(a) yang mewakili penjelasan data secara kontradik.

Lengkungan dalam Rajah 3(b) sepadan dengan

$$\text{PKM} : \mu_i^{-1} = -0.01656 + 0.01534\ log(x)$$

dan

Jadual 1: Respons Gamma dengan fungsi
hubungan songsang: 0% respons tercemar

$\hat{\beta}_0$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT$\star$	1.9861	0.0103	0.0101	-0.0139
PKM	2.0001	0.0026	0.0026	0.0001
penganggar-M	1.9979	0.0028	0.0028	-0.0022
$\hat{\beta}_1$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT$\star$	0.1020	0.0004	0.0004	0.0020
PKM	0.0988	0.0001	0.0001	-0.0012
penganggar-M	0.0991	0.0001	0.0001	-0.0008

$\star$ berdasarkan kepada 25% dari kesemua subset yang mungkin

Jadual 2: Respons Gamma dengan fungsi
hubungan songsang: 13.3% respons tercemar

$\hat{\beta}_0$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT$\star$	1.9913	0.0066	0.0065	-0.0087
PKM	1.9801	0.0027	0.0023	-0.0199
penganggar-M	1.9850	0.0028	0.0026	-0.0150
$\hat{\beta}_1$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT$\star$	0.0990	0.0003	2.7483	-0.0010
PKM	0.0659	0.0013	0.9489	-0.0341
penganggar-M	0.0728	0.0009	1.7463	-0.0272

$\star$ berdasarkan kepada 25% dari kesemua subset yang mungkin

Jadual 3: Respons Gamma dengan fungsi
hubungan songsang: 20% respons tercemar

$\hat{\beta}_0$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT⋆	1.9763	0.0080	0.0074	-0.0237
PKM	2.0060	0.0022	0.0022	0.0060
penganggar-M	2.0073	0.0024	0.0022	0.0073
$\hat{\beta}_1$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT⋆	0.1012	0.0005	4.7862	0.0012
PKM	0.0419	0.0035	0.8585	-0.0581
penganggar-M	0.0449	0.0031	1.0802	-0.0551

⋆ berdasarkan kepada 25% dari kesemua subset yang mungkin

Jadual 4: Respons Gamma dengan fungsi
hubungan songsang: 33.3% respons tercemar

$\hat{\beta}_0$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT⋆	2.0107	0.0064	0.0062	0.0107
PKM	2.1165	0.0163	0.0022	0.1185
penganggar-M	2.1363	0.0217	0.0031	0.1363
$\hat{\beta}_1$	purata	MKR	varians	pincang(bias)
penghampiran MDT⋆	0.0923	0.0018	17.616	-0.0077
PKM	-0.0166	0.0137	0.7404	-0.1166
penganggar-M	-0.0230	0.0153	1.7884	-0.1230

⋆ berdasarkan kepada 25% dari kesemua subset yang mungkin

Jadual 5: Set data bagi masa darah membeku

log(%conc)	*thromboplastin.1*	*thromboplastin.2*
1.609438	118	69
2.302585	58	35
2.708050	42	26
2.995732	35	21
3.401197	27	18
3.688879	21	13
4.094345	21	13
4.382027	19	12
4.605170	18	12

$$\text{Penganggar} - \text{M} : \mu_1^{-1} = -0.01655 + 0.01535\ log(x)$$

Penghampiran MDT di berikan oleh

$$\text{MDT} : \mu_1^{-1} = -0.02177 + 0.01688\ log(x)$$

dan ini di dapati berbeza dari kedua-dua penganggar di atas. Bagaimanapun, keputusan ini adalah sepadan dengan McCullagh dan Nelder [5] apabila cerapan 1 disingkirkan dari penyuaian . Rajah 4(b) memaparkan plot reja devians dari penghampiran MDT dan didapati cerapan pertama sememangnya tersisih dari cerapan-cerapan yang lain.

Kajian ini juga menunjukkan bahawa kesemua set penyelesaian yang terletak di kawasan B dalam Rajah 3(a) mengandungi cerapan 1 dalam 'sampel setengah' masing-masing. Ini jelas menunjukkan bahawa set penyelesaian di kawasan B dan PKM serta penganggar-M menempatkan (dan dipengaruhi oleh) cerapan 1 dan seterusnya menyebabkan cerapan 2 tersisir dari cerapan yang lain. Fenomena ini boleh dilihat dari plot reja dalam Rajah 4(a) dan 4(c).

Lot 2

Untuk lot kedua, terdapat hanya sembilan set penyelesaian yang memenuhi syarat penyuaian minimaks. Di sini juga, cerapan 1 adalah tidak konsisten dengan kebanyakan data seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 3(d) dan 4(e). Cerapan 1 jelas mempengaruhi PMK dan penganggar-M kerana reja sepadan adalah amat kecil. Ini menghasikan penyuaian lengkungan

$$\text{PKM} : \mu_2^{-1} = -0.02391 + 0.02360\ log(x)$$

dan

$$\text{penganggar} - \text{M} : \mu_2^{-1} = -0.02390 + 0.02360\ log(x)$$

Tanpa cerapan 1, PKM dan penghampiran MDT menghasilkan keputusan yang hampir serupa (lihat McCullagh dan Nelder [5]) dengan penyuaian lengkungan yang diberikan oleh

$$\text{penghampiran MDT} : \mu_2^{-1} = -0.02888 + 0.02517\; log(x)$$

5 Kesimpulan

Daripada hasil kajian simulasi yang dijalankan, didapati bahawa penganggar kukuh dalam MLT seperti QDT iaitu lanjutan kepada MKT dalam model linear, adalah agak stabil walaupun wujudnya pencemaran yang agak tinggi dalam set data. Kajian simulasi, khususnya, dengan respons yang bertaburan Gamma dan peramal linear menunjukkan bahawa PKM dan penganggar-M menjadi pincang apabila wujudnya titik-titik terpencil di dalam set data. Fenomena ini jelas dari nilai varians yang kecil walaupun nilai MKR bertambah apabila data tercemar. Pada keseluruhannya penganggar MDT (iaitu satu kes istimewa QDT) masih menunjukkan anggaran yang baik walaupun set data tercemar adalah agak tinggi. Kecekapan serta kajian tentang titik musnah prosedur ini akan dibincangkan dalam kertas kerja yang lain. Bagaimanapun setakat ini kajian hanya tertumpu kepada set data dengan pembolehubah penentu yang selajar.

Penghargaan

Penulis berterima kasih kepada Professor Peter Green dari Universiti Bristol, England di atas komen beliau sewaktu penyelidikan ini dijalankan. Penulis juga berterima kasih kepada penilai di atas komen beliau terhadap deraf asal kertas ini.

Rujukan

[1] C.I.Bliss, *Statistics in Biology, vol II*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[2] S.J. Haberman, *Maximum Likelihood Estimates in Exponential Response Models*, The Annals of Statistics, **5**(1977), 815–841.

[3] N.A. Hamzah, *Robust Regression Estimation in Generalized Linear Models,* Ph.D. thesis, School of Mathematics, University of Bristol, United Kingdom, 1995.

[4] N.A. Hamzah & D. Green, *A Note on Least Median of Deviance Estimates in Generalized Linear Models,* J. Statsci, diterima untuk penerbitan, 1997.

[5] P. McCullagh & J.A. Nelder, *Generalized Linear Models,* Chapman and Hall, 1983.

[6] S. Morgenthaler, *Least-absolute-deviations Fits for Generalized Linear Models*, Biometrika, **79**(1992), 747–754.

[7] J.A.Nelder & R.W.M.Wedderburn, *Generalized Linear Models*, Journal of Royal Statistical Society A, **135**(1972), 370–384.

[8] D. Pregibon, *Data Analytic Methods for Generalized Linear Models,* Ph.D. thesis, University of Toronto, 1990.

[9] D. Pregibon, *Resistant Fits for Some Commonly Used Logistic Models with Medical Applications,* Biometrics, **38**(1982) ,485–498.

[10] P.J. Rousseeuw, *Least Median of Squares Regression,* Journal of the American Statistical Association, **79**(1984) ,871–880.

[11] L.A. Stefanski, R.J. Carroll & D. Ruppert, *Optimally Bounded Score Functions for Generalized Linear Models with Applications to Logistic Regression,* Biometrika, **73**(1986), 413–424.

[12] A.J. Stromberg, *Computing the Exact Least Median of Squares Estimate and Stability Diagnostics in Multiple Linear Regression,* SIAM J.Sci.Comput., **14**(1993), 1289–1299

[13] R.W.M. Wedderburn, *On the Existence and Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimates for Certain Generalized Linear Models,* Biometrika, **63**(1976), 27–32.