MATEMATIKA, 2007, Volume 23, Number 1, 67–74


# Kestabilan Usikan dan Kestabilan Poincare bagi Penyelesaian Gelombang Kembara untuk Pertumbuhan Lojistik yang Beradveksi Tak Linear

# *(The Perturbative and Poincare Stability of the Travelling Wave Solution of the Logistic Growth with Non-Linear Advection)*

[1]**Khadizah Ghazali & [2]Shaharir Mohamad Zain**
[1]Jabatan Matematik denga Ekonomi, Universiti Malaysia Sabah
Beg Berkunci 2073, 88999 Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia
[2]Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi,
Mengabang Telipot, Kuala Terengganu, Malaysia
e-mail: [1]khadizah_7@yahoo.com, [2]shaharirzain@hotmail.com

**Abstrak** Kami peroleh bukti baru bagi kestabilan usikan penyelesaian gelombang kembara untuk model pertumbuhan lojistik beradveksi tak linear yang simpel. Kami juga menunjukkan bahawa penyelesaian dengan halaju negatif yang hampir dengan titik genting sifar adalah stabil, manakala penyelesaian yang hampir dengan satu lagi titik gentingnya hanya stabil jika halaju koordinat gelombang itu lebih besar daripada hasil darab had lengkung lojistik dan parameter sebutan adveksinya.

**Katakunci** Pertumbuhan lojistik beradveksi tak linear, penyelesaian gelombang kembara, kestabilan usikan, kestabilan Poincare.

***Abstract*** *We obtain a new proof for the perturbative stability of a travelling wave solution of the logistic growth model with a simple non-linear advection. We also show that a solution with a negative velocity near its zero critical point is stable, whereas a solution near the other critical point is stable if only the coordinate velocity of the wave is greater than the product of the limit of the logistic curve and the parameter of the advection term.*

***Keywords*** *Logistic non-linear advection growth, travelling wave solution, perturbtion stability, Poincare stability*

## 1 Pengenalan

Tabii atau kelakuan penyelesaian pertumbuhan lojistik beradveksi tak linear yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku\frac{\partial u}{\partial x} + ru(b-u), r > 0, b > 0 \tag{1.1}$$

masih belum dikaji dengan sepenuhnya walaupun kasus $k = -1, r = 1$ mula dikaji sejak 36 tahun yang lepas lagi oleh Murray [12] sebagai kasus pengehad bagi kesan olakan tak linear ke atas model resapan-tindakanbalas tak linear yang disorot di dalam buku teks Murray

[13] yang laris jualannya itu. Untuk memudahkan bicara, kami namai $k$ sebagai parameter adveksi sesuai dengan wujudnya pada sebutan adveksi itu, manakala $r$ dan $b$ adalah parameter tindakan balas atau reaksi, $t$ ialah koordinat masa dan $x$ ialah koordinat ruang. Minat kepada model ini mudah difahami kerana model lojistik tulen sahaja (i.i. apabila $u$ dalam (1.1) tidak bersandarkan koordinat ruang $x$ itu) pun membuktikan kegunaannya sejak model ini mula diutarakan pada akhir abad ke-19M lagi. Malah, dalam sedasawarsa yang lepas banyaklah makalah yang membicarakan dalil-dalil baru tentang kecocokan atau kegunaan model lojistik tulen dalam pelbagai fenomenon terutamanya dalam sains biopeubatan (seperti karya Yu dll. [18], Kobos dll. [6], dan Linacre & Thomson [9]) dan dalam sosioekonomi (seperti karya Trishler dll. [17], dan Foster & Wild [4]). Yang lainnya berminat pada (1.1) kerana semata-mata adanya cabaran yang muncul dalam penyelesaian berangkanya seperti yang dibicarakan oleh Kojouharov & Wilfert [7], Mickens [10], Rucker [14], Anguilov dll. [1], dan Toro & Titarev [15].

Berhubung dengan penyelesaian analisis masalah ini, kami dapati yang terawalnya dibicarakan oleh Mickens [10] apabila beliau memperoleh penyelesaian tepat bagi persamaan lojistik dengan adveksi, tetapi sebutan/suku adveksi itu linear sahaja; dan begitu juga dengan Murray [13]. Yang lainnya, selepas mereka ini, mengkaji penyelesaian analisis bagi persamaan pertumbuhan dengan sebutan adveksi yang am (terbitan suatu fluks). Mereka itu ialah Toro & Titarov [15] yang mengkaji penyelesaian bagi masalah Rieman teritlak (digeneralisasi) yang muncul daripada model itu, Chaidron & Chinesta [3] yang mengkaji penyelesaian keadaan mantap, Wang dll. [20] mengkaji model daripada perspektif kaedah mekanik analisis atau mekanika analitis, dan van der Houwen [19] tentang pengamiran masa.

Namun, sejak 1988, ada hanya dua buah makalah yang sebenarnya membicarakan penyelesaian analisis yang hampir persis persamaan (1.1). Satu daripadanya, Bartsch [2] membicarakan model tersebut untuk sejenis ikan yang diminatinya, manakala yang satu lagi, Lika & Hallam [8] membincangkan penyelesaian gelombang kembara bagi masalah (1.1) dengan $k = r = b = 1$. Makalah Lika & Hallam itulah yang paling kami minati, khususnya berkenaan dengan bukti mereka tentang kestabilan usikan penyelesaian gelombang kembara untuk masalah itu. Kami dapati kaedahnya panjang berliku sehingga kadang-kadang ada hujahnya yang kurang meyakinkan.

Selain daripada isu kestabilan usikan itu, kami juga mendapati isu kestabilan Poincare bagi penyelesaian (1.1) itu belumlah dibicarakan oleh sesiapa lagi. Oleh itu kami membentang kajian kami tentang perkara ini di sini. Kami juga menunjukkan bahawa model yang lebih am yang diperihal oleh (1.1) bukannya satu perluasan yang remeh bagi masalah $k = r = b = 1$. Oleh yang demikian, tujuan kami di sini ialah untuk mempertimbangkan satu model yang lebih am daripada yang biasa itu dengan tujuan untuk mendapat lebih kelihan dalaman (atau penglihatan dalaman) lagi terhadap masalah itu dan untuk memberi bukti yang lebih baik terhadap kestabilan penyelesaian gelombang kembara itu. Kami juga memeriksa tabii atau kelakuan penyelesaian gelombang kembara bagi persamaan (1.1) pada titik-titik pegun bagi persamaan (2.2) di bawah ini, sebagaimana yang perinciannya dilaporkan di dalam tesis Khadizah [5].

## 2 Kewujudan Penyelesaian Gelombang Kembara

Memanglah terkenal sekali bahawa penyelesaian gelombang kembara diberikan oleh

$$u(x,t) = W(x + ct), \tag{2.1}$$

dengan $c$ ialah pemalar nombor nyata tidak sifar dan oleh yang demikian $W$ secara tabiinya memenuhi persamaan

$$(c - kW)W' = rW(b - W) \tag{2.2}$$

yang prima itu melambangkan terbitan terhadap $z = x+ct$. Mudahlah sahaja untuk menunjukkan bahawa $W$ wujud sekiranya $kW - c \neq 0$, waima menggunakan teorem yang terkenal tentang kewujudan penyelesaian persamaan terbitan biasa, atau dengan mudahnya menyelesaikan (2.2) menerusi kaedah pemisahan pemboleh ubah atau perubah, dan pengamiran menerusi teknik pecahan separa. Lebih daripada itu lagi, ada dua penyelesaian remeh, iaitu

$$W = 0, \tag{2.3}$$

dan

$$W = b, \tag{2.4}$$

Dalam kasus $c - kW = 0, c \neq 0$, jelaslah $W$ yang demikian itu ialah penyelesaiannya, iaitu $W = b$, asalkan $c = bk$. Ini menunjukkan penyelesaian tidak remeh itu wujud hanya bagi kasus $c \neq bk$ sahaja. Dalam kasus $c = bk$, persamaan (2.2) memberikan

$$k(b - W)W' = rW(b - W)$$

atau

$$kW' = rW$$

kerana dalam kasus ini $W \neq b$. Oleh itu

$$W(z) = A\,\text{eksp}\,(rz/k)$$

penyelesaian yang stabil apabila $r/k < 0$. Dengan ini diperoleh satu penyelesaian kembara yang stabil yang diberikan oleh

$$u(x,t) = A\,\text{eksp}\,(r(x+ct)/k), \;\; c = bk, r/k < 0.$$

Oleh itu kajian yang lebih menarik lagi ialah kasus $c \neq bk$ itu dan inilah yang dilakukan di bawah ini.

## 3 Kestabilan Usikan bagi Penyelesaian Gelombang Kembara

Memanglah diketahui umum bahawa penyelesaian gelombang kembara bagi (1.1) diistilahkan sebagai stabil secara usikan jika

$$u(x,t) = W(z) + v(z,t) \tag{3.1}$$

dengan $W$ ialah penyelesaian (2.2) yang diketahui dan $v$ suatu fungsi yang kecil (terhadap suatu norma yang tidak perlu dinyatakan di sini), dinamai sebutan usikan, yang $v(z,s) = 0$ bagi $z$ dalam selang $(-\infty, a)$ untuk suatu $a$, dan $v(z,\infty) = 0$, serta sebutan $v$ yang tak linear boleh diabaikan. Oleh itu secara tabiinya $v$ pun memenuhi persamaan

$$\frac{\partial v}{\partial t} + [c - kW]\,\frac{\partial v}{\partial z} + [2rW - rb - kW']\;\, v = 0 \tag{3.2}$$

selepas diabaikan sebutan $v$ yang tidak linear dan menggunakan persamaan (2.2). Oleh itu, jika

$$v(z,t) = \text{eksp}(-\lambda t) g(z) \tag{3.3}$$

maka $g$ memenuhi persamaan masalah nilai eigen atau vektor eigen ,

$$(c - kW(z))g'(z) + [2rW(z) - rb - kW'(z)]g(z) = \lambda g(z). \tag{3.4}$$

Jika selanjutnya diandaikan $g$ itu terbatas dalam $[a,\infty)$ bagi suatu nilai $\lambda > 0$, maka jelaslah $v$ menuju kepada sifar apabila $t$ menuju kepada ketakterhinggaan, dan oleh yang demikian penyelesaian (1.1) dalam bentuk gelombang kembara itu adalah stabil, yang boleh dirujuki sebagai penyelesaian yang stabil secara usikan. Lika & Hallam [8] mengkaji syarat-syarat kewujudan $g$ yang dikehendaki ini dan dalam kajian itu mereka berhadapan dengan masalah membuktikan

$$-\int_a^z \left(\frac{2rW(y) - rb - \lambda}{c - kW(y)}\right) dy$$

terbatas bagi semua $z$ dalam $[a,\infty)$ untuk suatu batas $\lambda$ sehingga terbitnya sebuah Lema pentingnya yang bolehlah dirujuk sebagai Lema Lika & Hallam. Kami dapati pembuktiaan keterbatasan kamiran di atas boleh dipermudahkan lagi dan sekaligus tidak memerlukan andaian yang menyekat yang diutarakan oleh Lika & Hallam itu. Oleh itu kami peroleh lema berikut yang lebih baik daripada lema di dalam Lika & Hallam [8] itu.

**Lema Lika-Hallman Teritlak**

*Setelah diketahui penyelesaian tidak remeh $W$ bagi (2.2), yang memerlukan syarat $c \neq bk$, maka penyelesaian $g$ bagi (3.4):*

$$(c - kW(z))g'(z) + [2rW(z) - rb - kW'(z)]g(z) = \lambda g(z), g(a) \neq 0, \ \textit{a ialah nyata,}$$

*adalah terbatas dalam $[a,\infty)$ untuk $\lambda > 0$. Tetapi dalam kasus dua penyelesaian remeh, $W = b, 0$ bagi (2.2), maka $g$ sedemikian itu sah berlaku untuk suatu $\lambda > 0$ dan $c$ yang masing-masingnya memenuhi*

$$\frac{\lambda - 3rb}{c - kb} = 0, \ \textit{jika } c \neq kb; \ \textit{atau } c = kb, \ \lambda = 3rb,$$

*dan*

$$\frac{\lambda - rb}{c} = 0, \quad c \neq 0; \ \textit{atau } c = 0, \lambda = rb.$$

**Bukti:**

Bagi kasus penyelesaian tidak remeh $W$, setelah mengikut strategi Lika & Hallam [8], dengan menggantikan $g$ dengan $f$ diperoleh $f = (c - kW)g$. Oleh sebab $c - kW \neq 0$, maka

$$f' + Ff = 0, \text{ dengan } F = \frac{2rW - rb - \lambda}{c - kW} \tag{L1}$$

Oleh itu

$$g(z) = \left(\frac{c - kW(a)}{c - kW(z)}\right) g(a) \text{ eksp} \left(-\int_a^z \left(\frac{2rW(y) - rb - \lambda}{c - kW(y)}\right) dy\right) \cdots \tag{L2}$$

Tidak seperti Lika & Hallam [8], kami membuktikan keterhinggaan ungkapan

$$N(z) = -\int\limits_a^z \left(\frac{2rW(y) - rb - \lambda}{c - kW(y)}\right) dy, z \in [-L, \infty)(L3) \tag{L3}$$

dengan cara yang jauh lebih mudah lagi. Kita ada

$$\begin{aligned}
&-\int_{-L}^{z} \left(\frac{2rW(y) - rb - \lambda}{c - kW(y)}\right) dy \\
&\quad = \int_{-L}^{z} \frac{2\left(\left(c - kW(y)\right) W'(y) / \left(b - W(y)\right)\right) - rb - \lambda}{\left(c - kW(y)\right)} dy, \ W \neq b \\
&\quad = \int_{-L}^{z} \left[\frac{2kW'(y)}{(b - W(y))} - \frac{rb + \lambda}{(c - kW(y))}\right] dy, \ W \neq b \\
&\quad = \int_{-L}^{z} \left[\frac{2kW'(y)}{(b - W(y))}\right] dy - \int\limits_{-L}^{z} \left[\frac{(rb + \lambda)}{(c - kW(y))}\right] dy, \ W \neq b
\end{aligned} \tag{L4}$$

Tetapi sebutan pertama daripada SKn (L4) ialah, kerana $0 \leq W < b$,

$$\int_{-L}^{z} \left[\frac{2kW'(y)}{(b - W(y))}\right] dy = -2k \ln\left|\frac{(b - W(z))}{(b - W(-L))}\right| < \infty \cdots \tag{L5}$$

Begitulah juga, sebutan kedua daripada SKn (L4) ialah

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{z} \left[\frac{(rb + \lambda)}{(c - kW(y))}\right] dy = (rb + \lambda) \int_{-L}^{z} \frac{W'(y)}{rW(y)\left(b - W(y)\right)} dy, \ W \neq 0, b \\
&= \frac{(rb + \lambda)}{rb} \left[\int_{-L}^{z} \frac{W'(y)}{W(y)} dy + \int_{-L}^{z} \frac{W'(y)}{(b - W(y))} dy\right] \\
&= \frac{(rb + \lambda)}{rb} \left[\ln\left|\frac{W(z)}{W(-L)}\right| - \ln\left|\frac{(b - W(z))}{(b - W(-L))}\right|\right] < \infty, \text{ sebab } 0 < W < b
\end{aligned} \tag{L6}$$

Oleh sebab itu, $N$ dalam (L3) itu terhingga bagi semua $z$, yang seterusnya menunjukkan $g$ itu terbatas, bagi semua $z$ sehingga $W(z) \neq 0, b$. Ini tidak kira apa pun nilai $\lambda$ dan $c \neq bk$, oleh yang demikian khususnya benarlah yang bagi nilai $\lambda > 0$ seperti yang diperlukan oleh lema itu.

Dalam kasus $W = b$, kita perlu mempertimbangkan (oleh sebab dalam kasus ini ($W' = 0$, daripada (2.2))

$$(c - kb)g' + 3rbg = \lambda g, \text{ daripada pernyataan Lema itu,}$$

yang menunjukkan $g$ itu terbatas asalkan

$$\frac{\lambda - 3rb}{c - kb} \leq 0, \text{ jika } c \neq kb; \text{ atau } \lambda = 3rb, c = kb$$

Oleh itu, dalam kedua-dua kasus, untuk tujuan kami, kami pilih

$$0 < \lambda < 3rb, c > kb > 0; \text{ atau } \lambda > 3rb > 0, 0 < c < kb; \text{ atau } \lambda = 3rb > 0, c = kb > 0$$

yang memenuhi keperluan lema ini.

Dalam kasus $W = 0$ (dan oleh yang demikian $W' = 0$, daripada (2.2)), kita perlu mempertimbangkan

$$cg' + rbg = \lambda g$$

yang menunjukkan $g$ terbatas asalkan

$$\frac{\lambda - rb}{c} \leq 0, c \text{ bukannya sifar; atau } \lambda = rb, c = 0$$

yang untuk tujuan di sini, bolehlah dipilih ,

$$0 < \lambda < rb, c > 0; \text{ atau } \lambda > rb > 0, c < 0; \text{ atau } \lambda = rb > 0, c = 0.$$

Ini lengkaplah bukti lema ini.

Kami menyimpulkan hujah di atas dengan teorem yang berikut.

**Teorem 1**

*Penyelesaian gelombang kembara bagi (1.1) wujud dan sentiasa stabil secara usikan.*

## 4 Kestabilan Poincare

Sepanjang pengetahuan kami, tabii atau kelakuan penyelesaian gelombang kembara bagi (1.1) pada penyelesaian gentingnya bagi (2.2) masih belum dikaji. Titik-titik genting berkenaan ialah $W = 0$ dan $W = b$.

Mengikut teori kaedah Poincare yang sudah terkenal itu bagi tujuan memahami tabii titik-titik genting, dalam kasus kami, kami perlu melinearkan (kerana (2.2))

$$F(y) = \frac{ry(b - y)}{c - ky} \tag{4.1}$$

masing-masingnya pada $y = 0$ dan $y = b$.

Pada titik genting $p$ bagi $F$, bahagian afin bagi $F$ diberikan oleh

$$A_F(p, y) = F(p) + F'(p)(y - p) \tag{4.2}$$

yang

$$F'(y) = r(b - 2y)/(c - ky) + rky(b - y)/(c - ky)^2 \tag{4.3}$$

Oleh itu pada $W = 0$, kita perlu mengkaji tabii kualitatif penyelesaian untuk

$$W' = (rb/c)W \tag{4.4}$$

yang menunjukkan $W$ bertelatah sebagai satu eksponen/eksponensial dengan indeks $(rb/c)$ dan oleh yang demikian menuju kepada sifar jika $c < 0$, kerana $r$ dan $b$ semuanya nombor nyata positif. Ini menunjukkan $W$ stabil hampir dengan $W = 0$, atau penyelesaian gelombang kembara $u$ bagi (1.1) adalah stabil hampir dengan $u = 0$, asalkan halaju penyelesaian gelombang kembara itu negatif

Pada $W = b$, kita perlu mengkaji tabii kualitatif penyelesaian bagi

$$W' = -[rb/(c - kb)](W - b) \tag{4.5}$$

yang menunjukkan bahawa $W$ bertelatah sebagai fungsi eksponen dengan indeks negatif hanya jika halaju kembara $c > kb$. Oleh yang demikian, $W$ itu stabil hampir dengan $W = b$, atau penyelesaian gelombang kembara u bagi (1.1) akhirnya tinggal sekitar jiranan $u = b$ asalkan $c > kb$.

Oleh itu kami telah membuktikan teorem yang berikut.

**Teorem 2**

*Penyelesaian gelombang kembara bagi (1.1) hampir dengan dua titik genting dalam ruang* $(w, z)$, *dengan* $z = x + ct$ *dan* $w = W(z)$ *bagi (2.2) sentiasa stabil asalkan koordinat halaju gelombang c negatif hampir dengan titik genting, atau lebih besar daripada kb hampir dengan titik genting yang satu lagi.*

## Rujukan


[1] R. Anguilov, J.M.S. Lubuma & S.K. Mahudu, *Finite difference scheme for advection-reaction equations*, J. Comp. & Maths. 158(1)(2003),19-30.

[2] J. Bartsch, *Modelling the temperature mediation of growth in larval fish,* Fisheries Oceanography 11(5)(2002), 310-314.

[3] G. Chaidron & F. Chinesta, *On the steady solution of non-linear advection equation in steady recirculating flows,* Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering 191(11)(2002), 1159-1172.

[4] J. Foster & P. Wild, *Econometric modeling in the presence of evolutionary change,* Camb. J. Economics 23(1999), 749-770.

[5] Khadizah Ghani, *Kajian Kestabilan Tindakbalas-Adveksi dengan Model Pertumbuhan Gompertz,* Tesis Sarjana di Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Kebangsaan Malaysia, Malaysia, 2004 (Tidak terbit).

[6] P.H. Kobos, J.D. Erickson & T.E. Drennen, *Scenario analysis of Chinese passenger vehicle growth,* Contemporary Economics Policy 21(2003 ), 200-217

[7] H.V. Kojouharov & B.D. Wilfert, *A new numerical approach for the solution of non-linear advection-reaction equation,* Jour. Of Applied Sc. & Computation 8(2)(2001), 119-126.

[8] K. Lika & T.G. Hallam, *Travelling wave solution of a non-linear reaction-advection equation,* J. math. Biology 38(1999) 346-358.

[9] N.A. Linacre, & C.J. Thompson, *Dynamics of insect resistenace in Bt-Corn. Ecological Modelling*, 171(3)(2004), 271-278.

[10] R.E. Mickens, *Exact solution to finite difference of a nonlinear reaction-advection equation, Implications for numerical analysis,* J. Difference Eqns. and Its Applications 9(11)(2003), 995-1006.

[11] ———————- *Exact solution for a population model: the logistic equation with advection,* SIAM Rev. 30(4)(1988), 629-633.

[12] J.D. Murray, *Perturbative effects on the decay of discontinuous solutions of nonlinear first order wave equations,* SIAM J. Appl. Math. 19(1970) 273-298.

[13] J.D. Murray, *Mathematical Biology,* 3rd ed. Springer Verlag, Berlin, 2001.

[14] S. Rucker, *Exact finite difference scheme for an advection-reaction equation,* J. Difference Eqns. & Applications 9(11)(2003), 1007-1013.

[15] T.F. Toro & V.A. Titarev, *Solution of the generalized Riemann problem for advection-reaction equations,* Proc. Math. Phys. & Engineering Sc. (The Royal Soc.) 458 (2018)(2002), 271-281.

[16] ———————-, *ADER schemes for scalar hyperbolic conservation laws as three space dimension,* http:// www.newton.cam.ac.uk/preprints/N10363.pdf, 24 Jun 2004

[17] A. Trishler, R. Ventura & J. Watters, *Cellular telephones in the Israel market: the demand, the choice of provider and potential revenues,* Applied Economics 33(11)(2001), 1479-92.

[18] K.N. Yu, S.Y. Mao & E.C.M. Young, . Assessment of the transfer of 137C in the three types of vegetables consumed in Hong Kong. Applied Radiation & Isotopes 49(12)(1998), 1695-1700.

[19] P.J. van der Houwen *Note on the time integration of three dimensional advection-reaction equations,* J. Computational & Applied Maths. 116(2)(2000), 257-278.

[20] H. Wang, R.E. Ewing, G. Qin, S.L. Kyons, M. al-Lawatia, & S. Man, *A family of Euler-lagrangian localized adjoiont methods for multi-dimensional advection-reaction equations,* J. Computational Phys. 152(1)(1999), 120-163.