

PENGGUNAAN FUNGSI SPLINE SEBAGAI
SATU KAEDAH PENDEKATAN DALAM GEODESI •

Abd. Majid bin A. Kadir
Jabatan Geodesi dan Astronomi
Fakulti Ukur
Universiti Teknologi Malaysia

ABSTRAK

Latar belakang ringkas fungsi spline kubik dijelaskan dan disusuli dengan beberapa penggunaannya dalam bidang geodesi. Antaranya, penggunaan fungsi spline kubik dalam interpolasi, penyelesaian formula kamilan geodetik dan prediksi graviti diberikan.

1. Fungsi Spline

Perbincangan di bawah hanya ditumpukan kepada fungsi spline kubik. Ini adalah sebab-sebab berikut:-

- (a) Spline kuadratik yang mana selang di mana-mana bersama dengan terbitan pertamanya mempunyai beberapa ciri-ciri matematik dan numerikal yang kurang memuaskan. Antaranya, ia hanya ujud untuk satu bilangan titik data ganjil dan ianya tidak simetrik terhadap kedua titik penghujung x_0 dan x_n .
- (b) Spline peringkat tinggi, darjah > 3 , adalah didapati kurang licin untuk digunakan sebagai fungsi penghampiran. {Perbincangan tentang spline kubik di bawah rujukan dibuat dari MORITZ (1978) dan AHLBERG et al (1967)}.

• Disediakan untuk Kolokium Matematik, Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia, 23hb. Jun 1983.

Spline kubik adalah terdiri dari 'polinomial kubik cebis demi cebis' dengan keselanjaran sehingga dan termasuk terbitan peringkat kedua.

Pertimbangan kes titik-titik nodal berjarak, sama $x_j = jh$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$). Dengan penukaran sekil iaitu dengan membuat $h = 1$, bermakna

$$x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n \quad (1)$$

Ordinat-ordinat yang berhubungan dinyatakan sebagai berikut:-

$$f_0, f_1, \dots, f_n \quad (2)$$

supaya

$$f_j = f(x_j) \quad (3)$$

Nilai-nilai dalam fungsi (3) adalah diberikan. Fungsi spline yang hampir kepada fungsi $f(x)$ dinyatakan sebagai $S(x)$.

Terbitan peringkat kedua dari $S(x)$ pada titik-titik nodal dipanggil momen M_j :-

$$M_j = S''(x_j) \quad (4)$$

Disebabkan spline $S(x)$ adalah satu polinomial kuasa tiga dalam setiap selang $\{x_{j-1}, x_j\}$ terbitan peringkat keduanya adalah linear dalam setiap selang. Oleh itu, dalam selang $\{x_{j-1}, x_j\}$ $S''(x)$ akan mengambil bentuk

$$S''(x) = M_{j-1}(x_j - x) + M_j(x - x_{j-1}) \quad (5)$$

Ini adalah supaya persamaan (5) memenuhi kedua-dua pada x_j dan x_{j-1} . Jarak selang $\{x_{j-1}, x_j\}$ adalah satu, $x_j - x_{j-1} = 1$.

Dengan mengkamilkan persamaan (5) dua kali didapati:-

$$S'(x) = -\frac{1}{2} M_{j-1} (x_j - x)^2 + \frac{1}{2} M_j (x - x_{j-1})^2 + A,$$

$$S(x) = \frac{1}{6} M_{j-1} (x_j - x)^3 + \frac{1}{6} M_j (x - x_{j-1})^3 + Ax + B,$$

di mana A dan B adalah kuantiti tetap daripada pengkamilan. Kuantiti tetap A dan B di atas ditentukan mengikut syarat-syarat berikut:-

$$f_{j-1} = S(x_{j-1}) = \frac{1}{6} M_{j-1} + Ax_{j-1} + B,$$

$$f_j = S(x_j) = \frac{1}{6} M_j + Ax_j + B$$

dan didapati

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{6} M_{j-1} (x_j - x)^3 + \frac{1}{6} M_j (x - x_{j-1})^3 \\ &+ (f_{j-1} - \frac{1}{6} M_{j-1}) (x_j - x) \\ &+ (f_j - \frac{1}{6} M_j) (x - x_{j-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

Pembezaan dari persamaan (6) menghasilkan

$$\begin{aligned} S'(x) &= -\frac{1}{2} M_{j-1} (x_j - x)^2 + \frac{1}{2} M_j (x - x_{j-1})^2 \\ &+ f_j - f_{j-1} - \frac{1}{6} (M_j - M_{j-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

Untuk selang berikutnya, $\{x_j, x_{j+1}\}$, persamaan (7) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S'(x) &= -\frac{1}{2} M_j (x_{j+1} - x)^2 + \frac{1}{2} M_{j+1} (x - x_j)^2 \\ &+ f_{j+1} - f_j - \frac{1}{6} (M_{j+1} - M_j) \end{aligned} \tag{8}$$

Disebabkan oleh keselanjaran dari terbitan pertama $S'(x)$, nilai-nilai $S'(x)$ yang didapati dari persamaan-persamaan (7) dan (8) mestilah sama. Dengan menggantikan $x = x_j$ dalam persamaan (7) dan (8) syarat berikut dapat diperolehi:-

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_j + f_j - f_{j-1} - \frac{1}{6} (M_j - M_{j-1}) &= -\frac{1}{2} M_j + f_{j+1} \\ &- f_j - \frac{1}{6} (M_{j+1} - M_j) \end{aligned}$$

atau

$$M_{j-1} + 4M_j + M_{j+1} = 6(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) \quad (9)$$

Persamaan-persamaan dalam persamaan (9) menghasilkan $n + 1 - 2 = n - 1$ syarat untuk $n + 1$ momen M_j yang tidak diketahui. Supaya dapat ditentukan momen ini dengan sepenuhnya, dua lagi persamaan ditambahkan:-

$$4M_0 + M_1 = d_0$$

$$M_{n-1} + 4M_n = d_n \quad (10)$$

Sistem persamaan (9) dan (10) dapat ditulis sebagai berikut:-

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ - \\ - \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ - \\ - \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

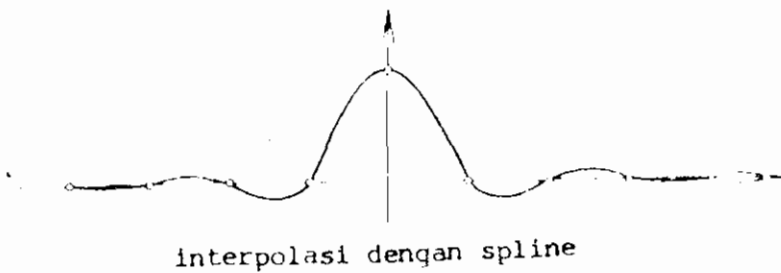
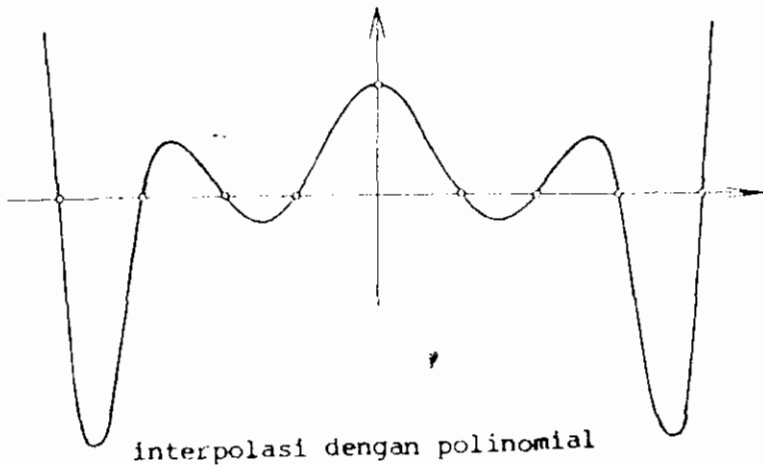
d_1, d_2, \dots, d_{n-1} menggantikan sebutan disebelah kanan persamaan (9). Kuantiti tetap d_0 dan d_n adalah bebas dan dipilih dengan sesuai.

Dengan menyelesaikan matrik (11) momen M_j dapat ditentukan. Dengan itu, persamaan spline kubik yang diberikan oleh persamaan (6) dapat ditentukan sepenuhnya.

2. Contoh Penggunaan

2.1 Interpolasi

Spline kubik merangkumi keupayaan analitik dari satu polinomial berserta dengan kelicinan dan kestabilan dari satu penggambaran. Dalam rajah 1 ditunjukkan 9 titik data yang mana 8 daripada titik-titik tersebut terletak di atas paksi x. Sebagaimana yang dapat dilihat, interpolasi dengan polinomial menghasilkan satu ayunan besar dan hanya berguna sebagai fungsi interpolasi di bahagian tengah sahaja. Fungsi spline sebaliknya menunjukkan satu penggambaran yang stabil dan bebas daripada ayunan-ayunan palsu.



rajah 1

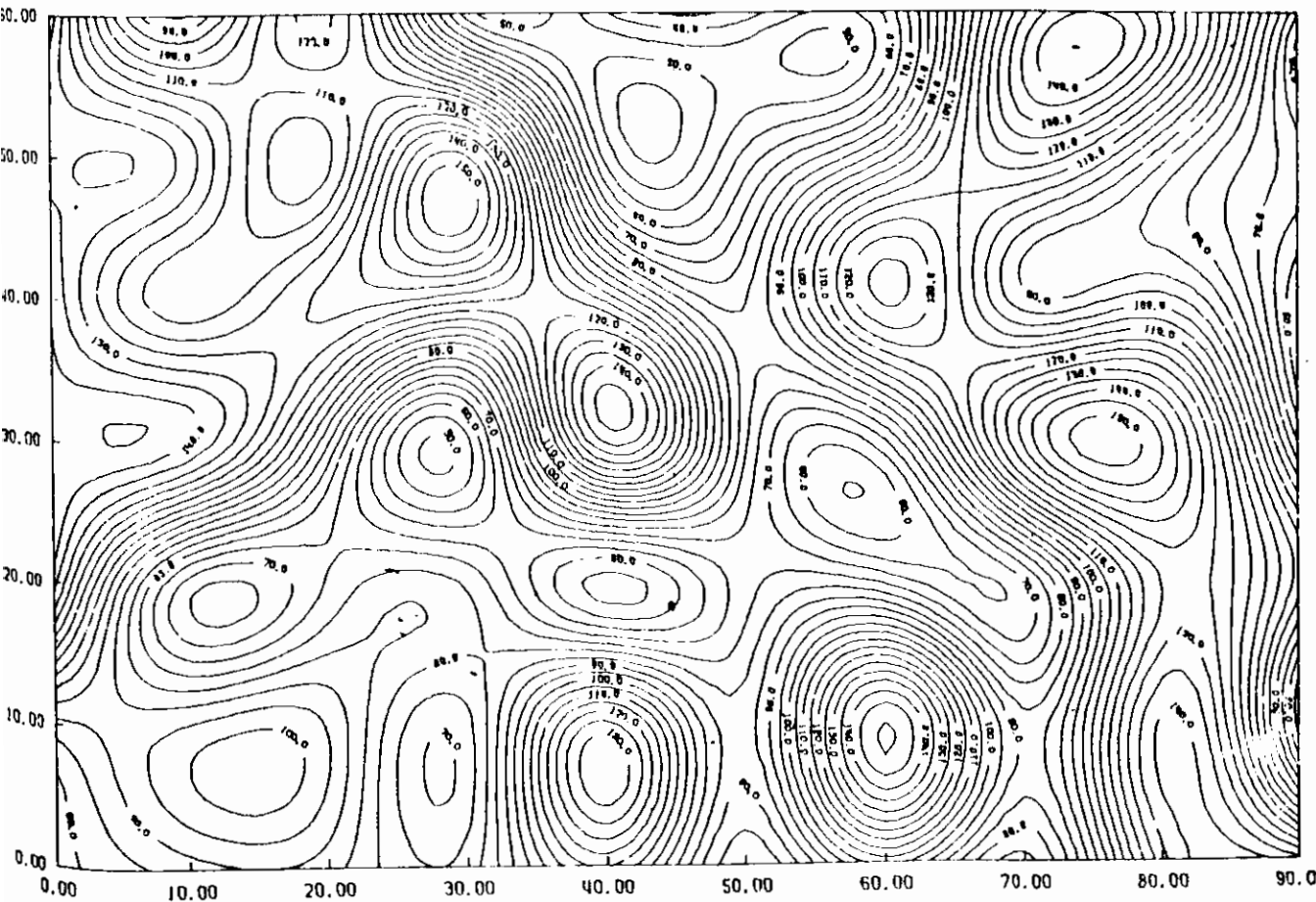
Jadual 1

90	139.67	116.91	113.98	146.94	121.70	89.65	132.02	66.89	93.50	64.70
80	73.02	143.77	65.65	100.59	142.19	63.02	66.27	126.64	137.91	123.87
70	146.79	73.55	88.14	67.99	115.97	125.90	109.40	84.59	72.29	147.06

60	138.91	84.83	121.80	53.78	59.05	62.93	60.16	127.99	128.88	65.55
50	133.28	128.15	102.77	146.31	54.36	60.40	86.52	120.01	92.75	67.02
40	139.29	111.19	126.27	121.52	108.75	78.91	126.49	91.07	96.34	55.63
30	142.60	140.17	91.16	53.11	141.26	82.30	70.12	136.54	145.23	68.44
20	137.17	67.49	75.65	78.92	52.71	72.78	72.78	70.65	125.17	98.10
10	88.53	95.66	94.42	73.63	126.40	82.34	149.74	86.62	140.36	71.72
0	78.34	87.42	86.82	77.63	110.18	70.42	101.87	73.09	133.02	136.03

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90

rajah 2 .



SUNKEL (1977) menggunakan fungsi spline bikubik sebagai unsur interpolasi diantara titik-titik data bersama dengan paraboloid hiperbolik untuk menghitung kontor dari 'garis nilai sama'. (Hasil darab satu spline kubik dalam x dan satu dalam y memberikan spline bikubik dalam (x, y)). Satu contoh yang dibuat oleh SUNKEL (1977) ditunjukkan dalam rajah 2. Jadual 1 menunjukkan data input yang digunakan. Satu rancangan komputer untuk melaksanakan tujuan ini boleh didapati dalam SUNKEL (1977). Kaedah ini sangat berguna dalam bidang geodesi di mana kebanyakan hasil hitungan digambarkan secara kontor 'garis nilai sama'.

2.2 Formula Kamilan Geodetik

Dalam penentuan medan graviti bumi dari hasil cerapan graviti perlu diselesaikan dua jenis kamilan permukaan konvolusi (VANICEK et al, 1982, p. 535):

$$\iint_{\mathcal{L}} f(\bar{r}) S(\psi(\bar{r}_A, \bar{r})) dv \tag{12}$$

$$\iint_{\mathcal{L}} f(\bar{r}) \begin{pmatrix} \cos \alpha(\bar{r}_A, \bar{r}) \\ \sin \alpha(\bar{r}_A, \bar{r}) \end{pmatrix} \frac{dS(\psi)}{d\psi} dv \tag{13}$$

di mana $f(\bar{r})$ adalah satu fungsi terhingga dinyatakan di atas satu permukaan matematik \mathcal{L} . Dalam kes ini, fungsi $f(\bar{r})$ (iaitu graviti anomali, δg) perlu dinyatakan dalam bentuk matematik supaya sesuai untuk kamilan. Dalam perhitungan digital, permukaan bumi dibahagikan kepada blok-blok (contohnya, $5^\circ \times 5^\circ$, $1^\circ \times 1^\circ$, $10' \times 10'$ dan seterusnya) dibendung oleh meridian dan garis lintang. Biasanya adalah mencukupi dengan hanya menggantikan fungsi tersebut dengan nilai puratanya dalam blok yang berkenaan. Dalam zon dalam, di mana hasil kamilan menjadi singular, satu penggambaran yang lebih detail oleh satu fungsi licin diperlukan. Polinomial adalah sesuai untuk tujuan ini. Satu anggaran yang selanjar boleh didapati dengan menggunakan fungsi linear cebis demi cebis; fungsi ini selanjar tetapi tidak dapat dibezakan pada titik-titik nodal x diantara dua 'unsur terhingga' (misalnya blok $10' \times 10'$) yang berturutan. Spline kubik yang mana selanjar bersama dengan terbitan pertama

dan kedua menunjukkan ciri-ciri yang sesuai untuk tujuan tersebut di atas. SUNKEL (1976) telah menggunakan spline bikubik dalam menyelesaikan formula-formula kamilan Stokes dan Vening-Meinesz dalam geodesi fizikal.

2.3 Prediksi Graviti

Dalam melaksanakan kamilan dari persamaan 12 dan 13 yang dibincangkan dalam seksyen 2.2, anggapan dibuat tentang terdapatnya satu liputan data graviti yang homogen di muka bumi ini. Dalam keadaan sebenar, masalah utama yang dihadapi dengan 'global gravity files' adalah tidak kehomogenan liputan data. Keadaan ini terutamanya berlaku di lautan dan kawasan-kawasan pendalaman yang tidak diduduki. Untuk memenuhi kehendak dalam melaksanakan kamilan persamaan 12 dan 13, prediksi dari graviti-titik atau graviti-purata terpaksa dibuat dalam kawasan-kawasan yang mana cerapan graviti tidak dapat dibuat.

Terdapat beberapa kaedah dalam prediksi graviti. Dua kaedah yang popular disebutkan di sini iaitu kaedah 'prediksi kuasa dua terkecil' (model I) dan kaedah 'kolokasi kuasa dua terkecil' (model II). Model I dan model II masing-masing dapat diberikan sebagai berikut (MORITZ, 1980):

Model I

$$\delta \bar{g}_p = [C_{p1}, C_{p2}, C_{p3}, \dots, C_{pn}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta g_1 \\ \delta g_2 \\ \delta g_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta g_n \end{bmatrix}$$

di mana:

$\delta \bar{g}_p$ hasil dari prediksi graviti-anomali pada titik P

$\delta g_1 \dots \delta g_n$ graviti-anomali pada titik-titik yang diketahui

Model II:

$$\delta \bar{g}_p = \begin{bmatrix} C_{p1}, C_{p2}, C_{p3}, \dots, C_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}$$

di mana matrik Z dalam model II didapati dari

$$Z = (\delta g_{\text{cerapan}} - AX); \text{ A adalah 'design matrix' dan}$$

$$X = (A^T C_{xx}^{-1} A)^{-1} A^T C_{xx}^{-1} \delta g$$

Bukanlah tujuan saya untuk memberikan satu tinjauan detail tentang model I dan II, tetapi untuk membawa perbincangan berikut ini kepada fungsi yang paling mustahak dalam model-model di atas iaitu fungsi kovarian, C. Perbincangan lengkap tentang model-model di atas boleh didapati dari MORITZ (1980).

Fungsi kovarian C mencirikan korelasi statistik dari graviti anomali diantara dua titik δg_p dan δg_Q , yang mana dapat menunjukkan kecenderongan graviti anomali pada titik-titik tersebut untuk mencapai saiz dan tanda yang sama. Untuk karakter global, fungsi kovarian selalunya diberikan sebagai,

$$C(P,Q) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n (\cos \psi)$$

di mana:

c_n adalah "anomaly degree variances", $P_n (\cos \psi)$ adalah polinomial Legendre Konvensional, ψ jarak ruang antara P dan Q.

Pada permulaannya kesongsangan dari satu matrix yang besar yang mana menyebabkan banyak masa komputer menjadi satu perbincangan yang penting apabila kaedah-kaedah 'prediksi kuasa dua terkecil' dan 'kolokasi kuasa dua terkecil' mula diperkenalkan dalam bidang geodesi fizikal. Perhatian tidak dibuat terhadap masa yang diperlukan untuk menghitung fungsian linear dari fungsi kovarian oleh kerana untuk masalah-masalah mudah masa komputer sudah tentulah lebih cepat dari kesongsangan dari satu matrix. Keadaan ini berubah dengan cepat apabila masalah yang dihadapi melibatkan perhitungan kovarian yang banyak dan/atau sukar. Walaupun satu ungkapan tertutup dari fungsi kovarian telah berjaya dihasilkan (lihat RAPP dan TSCHERNING, 1974), ungkapan tertutup ini masih mengandungi fungsi seperti fungsi logaritma dan fungsi trigonometrik, yang mana mahal dalam ertikata masa komputer.

Inilah antara sebab-sebab timbulnya persoalan samada berkemungkinan untuk mendapatkan satu anggaran yang hampir kepada fungsi kovarian yang sebenar. Fungsi anggaran ini hendaklah mudah, senang digunakan, tepat dan memerlukan unit stor komputer sedikit yang boleh. Berdasarkan kepada persoalan di atas, SUNKEL (1978) membuat kajian ke atas tiga jenis fungsi anggaran yang berbeza:

- 1) Fungsi langkah
- 2) Fungsi linear cebis demi cebis, dan
- 3) Fungsi kubik-spline

SUNKEL (ibid.) membuat kesimpulan bahawa disebabkan oleh kelicinan dan ciri-ciri anggaran yang baik dari satu fungsi spline, penggambaran fungsi kovarian oleh fungsi spline menghasilkan keputusan yang memuaskan jika dibandingkan dengan fungsi-fungsi (1) dan (2) di atas.

3. Kesimpulan

Berdasarkan kepada keistimewaan fungsi spline terhadap penyelesaian dan penggunaan lanjutannya dengan menggunakan komputer, penggunaan luas

fungsi spline dalam bidang geodesi sebagai satu kaedah pendekatan dapat diharapkan. Penggunaan fungsi spline kubik dalam kaedah interpolasi, penyelesaian kamilan geodetik dan kaedah prediksi graviti dijelaskan dengan ringkas. Dengan ini diharap satu kajian lanjutan dapat dibuat supaya pemahaman yang lebih mendalam tentang potensi dari fungsi spline dan hubungannya dalam perkembangan bidang geodesi numerik dapat diperoleh.

Rujukan

1. AHLBERG, J.H., NILSON, E.N. and WALSH, J.L. :
"THE THEORY OF SPLINES AND THEIR APPLICATIONS".
Academic Press, New York, 1967.
2. FREEDEN, W.: "On Approximation by Harmonic Splines", Manuscripta
Geodetica, Vol. 6, No.2, Oct. 1981.
3. MORITZ, H.: "Introduction to Interpolation and Approximation",
Approximation Methods in Geodesy, Herbert Wichmann Verlag
Karlsruhe, 1978.
4. MORITZ, H.: "ADVANCED PHYSICAL GEODESY", Herbert Wichmann Verlag
Karlsruhe, 1980.
5. SUNKEL, H.: "On Evaluation of Stokes and Vening Meinesz Integrals
by Spline Functions", Dissertation, Technical University of Graz,
Graz, Austria, 1976.
6. SUNKEL H.: " A Fortran IV Program to Calculate and Plot Isolines",
Publication of the Geodetic Institute, Technical University Graz,
No. 26, Graz 1977.
7. SUNKEL, H.: "Approximation of Covariance Functions by Non-Positive
Functions", Report No. 271, Department of Geodetic Science, The
Ohio State University, Columbus, 1978.
8. TSCHERNING, C.C and RAPP, R.H.: "Closed Covariance Expression for
Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of the
Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models", Report
No. 208, Department of Geodetic Science, The Ohio State
University, Columbus, 1974,
9. VANICEK, P. and KRAKIWSKY, E.: "GEODESY: THE CONCEPTS", North-
Holland Publishing Company, 1982.