Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 11-29,

Kaedah Ekstrapolasi Bagi Persamaan Pembezaan Biasa Peringkat Tinggi

Fudziah bt. Ismail, Mohamed b. Suleiman dan Bachok b. Taib.

Jabatan Matematik,

Universiti Pertanian Malaysia.

43400 UPM Serdang, Selangor

Abstrak

Masalah umum $y^{(d)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(d-1)})$ diselesaikan dengan menggunakan kaedah ekstrapolasi. Rumus bagi kaedah ini diterbitkan dan beberapa keputusan berangka diberikan.

1. Pengenalan

Untuk menyelesaikan sistem persamaan pembezaan biasa (PPB) peringkat tinggi, selalunya persamaan tersebut diturunkan ke sistem PPB peringkat pertama, kemudian diselesaikan menggunakan kaedah-kaedah seperti Runge-Kutta, multi-langkah, ekstrapolasi dan lain-lain lagi. Cara ini amatlah memuaskan hinggakan penyelidikan terhadap kaedah bagi penyelesaian PPB peringkat tinggi secara terus tidak diberi perhatian yang sewajarnya.

Usaha awal terhadap penyelidikan secara terus ini terdapat dalam Collatz [1], Fehlberg [2], Krogh [4] dan Suleiman [5,6]. Di dalam [6], Suleiman telah meneliti kaedah ekstrapolasi bagi penyelesaian PPB peringkat kedua secara terus.

Berikut merupakan kajian awal terhadap penyelesaian PPB peringkat tinggi menggunakan kaedah ekstrapolasi secara terus. Diterbitkan juga rumus bagi PPB peringkat *d*, dan pembuktian bahawa rumus dengan kombinasi linear dengan pekali-pekali binomial memberikan peringkat yang optimum. Seterusnya keputusan untuk PPB peringkat keempat dengan kembangan h dan h^2 diberikan di dalam lampiran.

2. Kaedah Bagi PPB peringkat *d*

Teori asas bagi penggunaan kaedah ekstrapolasi kepada masalah PPB peringkat pertama,

$$y' = f(x,y), \qquad y(a) = \eta_0$$

telah dikaji oleh Gragg [3]. Beliau telah membuktikan bahawa kembangan h^2 wujud bagi kaedah titik tengah terubahsuai yang ditakrifkan seperti berikut,

$$\left.\begin{aligned}
&h_1 = H/N_1, \qquad N_1 \text{ genap},\\
&y_0 = y(x_0), \qquad \text{nilai hampiran di } x_0,\\
&y_1 = y_0 + h_1 f(x_0, y_0),\\
&y_{m+2} = y_m + 2h_1 f(x_{m+1}, y_{m+1}), \quad m = 0,1, \quad N_1 - 1,\\
&y(x_0 + H, h_1) = \tfrac{1}{4}y_{N_1 - 1} + \tfrac{1}{2}y_{N_1} + \tfrac{1}{4}y_{N_1 + 1}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kaedah titik tengah terubahsuai bagi PPB peringkat kedua,

$$y'' = f(x,y,y'), \quad y(a) = \eta_0, \quad y'(a) = \eta_0',$$

diterbitkan oleh Suleiman [6], bagi pengiraan y(x,h). Rumusnya ditakrifkan seperti berikut,

$$
\left.\begin{aligned}
&h_1 = H/N_1\ ,\ N_1 \text{ genap},\\
&y_0 = y(x_0)\ ,\ \text{nilai hampiran } y \text{ di } x_0,\\
&y_1 = y_0 + h_1 y_0' + (h_1^2/2) f(x_0, y_0, y_0'),\\
&y_{m+2} = 2y_{m+1} - y_m + h_1^2\, f(x_{m+1}, y_{m+1}, y_{m+1}'),\\
&\qquad\qquad m = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,\\
&y(x_0 + H, h_1) = \tfrac{1}{4} y_{N_1 - 1} + \tfrac{1}{2} y_{N_1} + \tfrac{1}{4} y_{N_1 + 1}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

Bagi pengiraan $y'(x,h)$, rumus (1) digunakan dengan menggantikan y dengan y'.

Rumus (1) dan (2) diterbitkan dengan menggunakan pengembangan Taylor. Dengan cara yang sama boleh diterbitkan rumus untuk PPB peringkat yang lebih tinggi.

Perhatikan pengembangan Taylor bagi y_{m+5}, y_{m+4}, y_{m+3}, y_{m+2} dan y_{m+1} disekitar (x_m, y_m).

$$
y_{m+5} = y_m + 5hy_m' + (25/2)h^2 y_m'' + (125/6)h^3 y_m''' + (625/24)h^4 y_m^{(iv)} + (3125/120)h^5 y_m^{(v)} + O(h^6). \quad (2.1)
$$

$$
y_{m+4} = y_m + 4hy_m' + (16/2)h^2 y_m'' + (64/6)h^3 y_m''' + (256/24)h^4 y_m^{(iv)} + (256/30)h^5 y_m^{(v)} + O(h^6). \quad (2.2)
$$

$$
y_{m+3} = y_m + 3hy_m' + (9/2)h^2 y_m'' + (27/6)h^3 y_m''' + (27/8)h^4 y_m^{(iv)} + (81/40)h^5 y_m^{(v)} + O(h^6). \quad (2.3)
$$

$$y_{m+2} = y_m + 2hy_m' + 2h^2 y_m'' + (8/6)h^3 y_m''' + (16/24)h^4 y_m^{(iv)}$$

$$+ (32/120)h^5 y_m^{(v)} + O(h^6). \tag{2.4}$$

$$y_{m+1} = y_m + hy_m' + (h^2/2)y_m'' + (h^3/6)y_m''' + (h^4/24)y_m^{(iv)}$$

$$+ (h^5/120)y_m^{(v)} + O(h^6). \tag{2.5}$$

Kembangan Taylor untuk $y_{m+2}''' = f_{m+2}$ disekitar (x_m, y_m) ialah

$$y_{m+2}''' = f_{m+2} = y_m''' + 2hy_m^{(iv)} + 2h^2 y_m^{(v)} + \frac{8h^3}{6} y_m^{(vi)} + O(h^4) \tag{2.6}$$

Bagi masalah $y''' = f(x, y, y', y'')$

$$y(a) = \eta_0, \quad y'(a) = \eta_0' \quad y''(a) = \eta_0'',$$

Dengan menggunakan kombinasi linear yang sesuai bagi persamaan (2.3) - (2.6), boleh dihapuskan sebutan di sebelah kanan ke peringkat h yang optimum.

Umpamanya kombinasi linear

$$y_{m+3} - y_{m+2} + y_{m+1} - y_m - h^3 f_{m+2} \tag{2.7}$$

menghapuskan sebutan hingga ke peringkat h sahaja, sementara kombinasi linear,

$$y_{m+3} - 3y_{m+2} + 3y_{m+1} - y_m - h^3 f_{m+2} \tag{2.8}$$

menghapuskan sebutan hingga ke peringkat h^4 dan kombinasi linear,

$$y_{m+3} - 3y_{m+2} + 3y_{m+1} - y_m - 2h^3 f_{m+2} \tag{2.9}$$

menghapuskan sebutan hingga ke peringkat h^3.

Oleh itu kombinasi linear dalam (2.8) adalah pilihan yang paling sesuai, dan didapati pilihan ini mempunyai pekali-pekali binomial dengan

$$y_{m+3} - 3y_{m+2} + 3y_{m+1} - y_m - h^3 f_{m+2} + O(h^4).$$

Penyelesaian bagi PPB peringkat ketiga, $y(x,h)$ diberikan oleh rumus berikut

$$\left.\begin{aligned}
&h_1 = H/N_1 \quad , \quad N_1 \text{ genap},\\
&y_0 = y(x_0) \text{ , nilai hampiran } y \text{ di } x_0 \text{ ,}\\
&y_1 = y_0 + h_1 y_0' + (h_1^2/2) y_0'' + (h_1^3/6) f_0,\\
&y_2 = y_0 + 2h_1 y_0' + 2h_1^2 y_0'' + (4/3) h_1^3 f_0 ,\\
&y_{m+3} = 3y_{m+2} - 3y_{m+1} + y_m + h_1^3 f_{m+2} ,\\
&\qquad\qquad m = 0,1,\ldots,N_1-2 ,\\
&y(x_0 + H, h_1) = \tfrac{1}{4} y_{N_1-1} + \tfrac{1}{2} y_{N_1} + \tfrac{1}{4} y_{N_1+1} .
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sementara $y'(x,h)$ diberikan oleh rumus titik tengah (2) dengan y digantikan oleh y', dan $y''(x,h)$ diberikan oleh rumus (1) dengan menggantikan y dengan y''.

Pengembangan Taylor bagi $y_{m+2}^{(iv)} = f_{m+2}$ di sekitar (x_m, y_m) ialah

$$y_{m+2}^{(iv)} = f_{m+2} = y_m^{(iv)} + h y_m^{(v)} + (h^2/2) y_m^{(vi)} + (h^3/6) y_m^{(vii)} + O(h^4)$$

Bagi masalah $y^{(iv)} = f(x,y,y',y'',y''')$

$$y(a) = \eta_0 \;,\; y'(a) = \eta_0' \;,\; y''(a) = \eta_0'' \;,\; y'''(a) = \eta_0'''$$

kombinasi linear yang paling sesuai sekali adalah

$$y_{m+4} - 4y_{m+3} + 6y_{m+2} - 4y_{m+1} + y_m - h^4 f_{m+2} + O(h^5),$$

dan penyelesaian bagi PPB peringkat keempat, $y(x,h)$ diberi oleh rumus berikut.

$$\left.\begin{array}{l}
h_1 = H/N_1 , \quad N_1 \text{ genap}, \\
y_0 = y(x_0) , \quad \text{nilai hampiran } y \text{ di } x_0 , \\
y_1 = y_0 + h_1 y_0' + (h_1^2/2) y_0'' + (h_1^3/6) y_0''' + (h_1^4/24) f_0 , \\
y_2 = y_0 + (2h_1) y_0' + (2h_1^2) y_0'' + (8/6) h_1^3 y_0''' + (16/24) h_1^4 f_0 \\
y_3 = y_0 + (3h_1) y_0' + (9/2) h_1^2 y_0'' + (27/6) h_1^3 y_0''' + (81/24) h_1^4 f_0 \\
y_{m+4} = 4y_{m+3} - 6y_{m+2} + 4y_{m+1} - y_m + h_1^4 f_{m+2} , \\
\qquad m = 0, 1, \ldots, N_1 - 3 , \\
y(x_0 + H, h_1) = \frac{1}{4} y_{N_1 - 1} + \frac{1}{2} y_{N_1} + \frac{1}{4} y_{N_1 + 1}
\end{array}\right\} \quad (4)$$

dengan $y'(x,h)$ diberikan oleh rumus (3), $y''(x,h)$ diberikan oleh rumus (2), $y'''(x,h)$ diberikan oleh rumus (1), dengan y dalam rumus tersebut digantikan masing-masing dengan y', y'' dan y'''.

Begitulah seterusnya jika kita mempunyai masalah PPB peringkat ke d,

$$y^{(d)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(d-1)}) ,$$

$$y(a) = \eta_0 , \; y'(a) = \eta_0' , \; y''(a) = \eta_0'' , \ldots, \; y^{(d-1)}(a) = \eta_0^{(d-1)},$$

dengan penyelesaiannya diberikan oleh rumus berikut,

$$
\left.
\begin{aligned}
h_1 &= H/N_1 , \quad N_1 \text{ genap},\\
y_0 &= y(x_0) , \text{ nilai hampiran } y \text{ di } x_0,\\
y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^{d-1} h_1^j\, y_0^{(j)}/j! + (h_1^d/d!)f_0 ,\\
y_2 &= y_0 + \sum_{j=1}^{d-1} (2h_1)^j\, y_0^{(j)}/j! + [(2h_1)^d/d!]f_0 ,\\
&\;\vdots\\
y_{d-1} &= y_0 + \sum_{j=1}^{d-1} [(d-1)h_1]^j y_0^{(j)}/j! + ([(d-1)h_1]^d/d!)f_0 ,\\
y_{m+d} &= \sum_{j=1}^{d} (-1)^{(j+1)}\, {}^dC_j\, y_{m+d-j} + h_1^d f_{m+d/2} ,\\
& \qquad m = 0,1,2, \ldots ,N_1-(d-1) ,\\
y(x_0+H,h_1) &= \frac{1}{4}y_{N_1-1} + \frac{1}{2}y_{N_1} + \frac{1}{4}y_{N_1+1}
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

jika d genap. Jika d ganjil maka y_{m+d} dalam (5) akan digantikan dengan,

$$y_{m+d} = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{(j+1)}\, {}^dC_j\, y_{m+d-j} + h_1^d f_{m+(d+1)/2} ,$$

dengan ${}^dC_r = n!/((n-r)!r!)$.

Rumus (5) ini memberikan ralat pangkasan setempat $O(h^{d+1})$. Teorem berikut menunjukkan bagaimana kombinasi linear dengan pekali-pekali binomial dalam rumus di atas adalah pilihan yang paling sesuai sekali.

Teorem. Kombinasi linear dengan pekali-pekali binomial dalam rumus (5),

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, {}^dC_j \, y_{m+d-j} - (h_1^d/d!)\, f_{m+d/2} \qquad \text{jika d genap} \qquad (5.1)$$

dan

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, {}^dC_j \, y_{m+d-j} - (h_1^d/d!)\, f_{m+(d+1)/2} \qquad \text{jika d ganjil} \qquad (5.2)$$

memberikan ralat pangkasan setempat $O(h^{d+1})$ dan adalah kombinasi linear yang optimum ,bagi $m,d,j \in I$.

Bukti.

Misalkan wujud kombinasi linear lain yang juga memberikan $O(h^{d+1})$, katakan ianya

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, k_j^* \, y_{m+d-j} - h_1^d f_{m+d/2} \qquad \text{jika d genap} \qquad (5.3)$$

dan

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, k_j^* \, y_{m+d-j} - h_1^d f_{m+(d+1)/2} \qquad \text{jika d ganjil} \qquad (5.4)$$

dengan $k_j^* \in \mathbb{R}$ dan k_j^* dinyatakan sebagai

$$k_j^* = {}^dC_j + k_j, \qquad k_j \in \mathbb{R}.$$

Perhatikan bahawa kombinasi linear bagi d genap dan d ganjil adalah sama kecuali pekali bagi h_1^d. Oleh itu di sini hanya di tumpukan kepada d genap sahaja kerana pembuktiannya adalah sama untuk d ganjil.

Kombinasi linear dalam (5.3) boleh ditulis sebagai,

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j ({}^dC_j + k_j) y_{m+d-j} - h^d l f_{m+d/2} \tag{5.5}$$

Dengan menggunakan kembangan Taylor bagi $y_{m+d}, y_{m+d-1}, y_{m+d-2}, \ldots,$

$y_{m+d-j}, \ldots, y_m$ dan $f_{m+d/2}$

dengan

$$y_{m+d-j} = y_m + [(d-j)h]y_m' + ([(d-j)h]^2/2!)y_m'' + ([(d-j)h]^3/3!)y_m'''$$
$$+ ([(d-j)h]^4/4!)y_m^{(iv)} \ldots$$

dan

$$f_{m+d/2} = y_{m+d/2} = y_m^{(d)} + (d/2)hy_m^{(d+1)} + ([(d/2)h]^2/2!)y_m^{(d+2)} + \ldots$$

didapati sebutan pemalar dan pekali-pekali bagi $h, h^2, h^3, \ldots, h^d$ bagi kombinasi linear (5.5) adalah sifar, iaitu

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{d} (-1)^j [{}^dC_j + k_j] y_m = 0 \\
&\sum_{j=0}^{d} (-1)^j (d-j) [{}^dC_j + k_j] y_m' = 0 \\
&\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^2 [{}^dC_j + k_j] y_m'' = 0 \\
&\quad\vdots \\
&\frac{1}{(d-1)!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^{(d-1)} [{}^dC_j + k_j] y_m^{(d-1)} = 0 \\
&\frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^d [{}^dC_j + k_j] y_m^{(d)} - d!\, y_m^{(d)} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diketahui bahawa kombinasi linear (5.1) memberikan $O(h^{d+1})$, bermaksud pemalar dan pekali-pekali bagi $h, h^2, h^3, \ldots, h^d$ bagi kombinasi linear tersebut adalah sifar, iaitu

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, {}^dC_j y_m = 0 \\
&\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j) \, {}^dC_j y_m' = 0 \\
&\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^2 \, {}^dC_j y_m'' = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{1}{(d-1)!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^{(d-1)} \, {}^dC_j y_m^{(d-1)} = 0 \\
&\frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^d \, {}^dC_j y_m^{(d)} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Persamaan (6) dan (7) menunjukkan kombinasi linear (5.5) mempunyai $O(h^{d+1})$, jika sistem persamaan berikut dipenuhi.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{d} (-1)^j k_j y_m = 0 \\
&\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j) k_j y_m' = 0 \\
&\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^2 k_j y_m'' = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{1}{(d-1)!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^{(d-1)} k_j y_m^{(d-1)} = 0 \\
&\frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j (d-j)^d k_j y_m^{(d)} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Seterusnya memberikan sistem persamaan berikut,

$$\left.\begin{array}{l} k_0 - k_1 + k_2 - \ldots(-1)^d k_d = 0 \\ (d)k_0 - (d-1)k_1 + (d-2)k_2 - \ldots(-1)^{d-1}k_{d-1} = 0 \\ (d)^2k_0 - (d-1)^2k_1 + (d-2)^2k_2 - \ldots(-1)^{d-1}k_{d-1} = 0 \\ . \\ . \\ . \\ (d)^{d-1}k_0 - (d-1)^{d-1}k_1 + (d-2)^{d-1}k_2 - \ldots(-1)^{d-1}k_{d-1} = 0 \\ (d)^d k_0 - (d-1)^d k_1 + (d-2)^d k_2 - \ldots\ (-1)^{d-1}k_{d-1} = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Sistem persamaan di atas adalah sistem persamaan homogen dengan (d+1) anu dan (d+1) persamaan, oleh itu ia hanya mempunyai satu penyelesaian sahaja iaitu penyelesaian remeh,

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_d = 0.$$

Misalkan wujud kombinasi linear lain katalah

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j c_j^{*}\, y_{m+d-j} - h^d f_{m+d/2}\,,$$

yang memberikan ralat $O(h^{d+i})$ dengan $i > 1$. Maka kita akan dapati satu sistem persamaan seperti dalam (9) yang mempunyai (d+1) anu dan (d+i) persamaan, yang mana ini juga akan memberikan penyelesaian remeh $c_0^{*} = c_1^{*} = c_2^{*} = \ldots = c_d^{*} = 0$.

Oleh itu telah terbukti bahawa hanya satu kombinasi linear bagi PPB peringkat *d* yang memberikan ralat $O(h^{d+1})$, iaitu kombinasi linear yang pekali-pekalinya mempunyai kembangan binomial seperti dalam (5).

Pengiraan bagi $y'(x,h)$ boleh didapati dengan menggunakan rumus (5) untuk d-1 dan menggantikan y dengan y', *sementara pengiraan* bagi $y''(x,h)$ didapati dengan menggunakan rumus (5) untuk d-2 dan y digantikan dengan y''. Begitulah seterusnya untuk mendapatkan pengiraan $y'''(x,h)$, $y^{(iv)}(x,h)$ sehinggalah $y^{(d-2)}(x,h)$. Pengiraan bagi $y^{(d-1)}(x,h)$ pula didapati dari rumus (1) dengan menggantikan y dengan $y^{(d-1)}$.

3. Algoritma dan keputusan berangka

Kaedah ekstrapolasi dan kaedah yang diterbitkan dalam bahagian 2 telah digunakan untuk menyelesaikan PPB peringkat keempat,

$$y^{(iv)} = f(x,y,y',y'',y''').$$

Dalam menyelesaikan masalah di atas kamiran dilakukan dari titik x_{m-1} ke x_m menggunakan panjang langkah H/N_i, $N_i = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$. *Ini* memberikan penyelesaian hampiran y_m, y'_m, y''_m dan y'''_m yang masing-masing dinyatakan dengan $a^{(0)}_{i,j,0}$ $a^{(0)}_{i,j,1}$, $a^{(0)}_{i,j,2}$, dan $a^{(0)}_{i,j,3}$ .Nilai-nilai ini diekstrapolasikan supaya nilai hampiran yang lebih baik diperolehi. Akhir sekali $a^{(j)}_{i,0,0}$,$a^{(j)}_{i,0,1}$, $a^{(j)}_{i,0,2}$, dan $a^{(j)}_{i,0,3}$ diambil sebagai nilai hampiran yang terbaik bagi y_m, y'_m, y''_m dan y'''_m. Di titik x_m, panjang langkah yang baru dikira supaya penyelesaian hampiran bagi y, y',y'' ,y''' memenuhi kejituan yang diperlukan.

Berikut ialah algoritma asas bagi penyelesaian PPB peringkat keempat. Panjang langkah awal H_0 dipilih seperti dalam Shampine dan Gordon [7] , dengan mengandaikan panjang langkah bagi kaedah peringkat sifar.

Algoritma

Langkah 1 : Tetapkan $x_0 = a$, $p = 5$, $h = H_0$,

Langkah 2 : Jika $x_0 > b$ berhentikan perkiraan ,

Langkah 3 : $x = x_0 + H$,

Langkah 4 : Letakkan $j = 0$,

Langkah 5 : Dengan $N_j = 2^{j+1}$ dan $h_j = H/N_j$,

Nilaikan $a^{(0)}_{i,j,0}$, $a^{(0)}_{i,j,1}$, $a^{(0)}_{i,j,2}$, $a^{(0)}_{i,j,3}$,

$i = 1,2,\ldots,s$,

Langkah 6 : Jika $j = 0$, letakkan $j = 1$,pergi ke langkah 5 ,

Langkah 7 : Ekstrapolasikan sehingga mendapat ,

$a^{(j)}_{i,0,0}$, $a^{(j)}_{i,0,1}$, $a^{(j)}_{i,0,2}$, $a^{(j)}_{i,0,3}$,

$i = 1,2,\ldots,s$,

Langkah 8 : Jika $j \le 2$ pergi ke langkah 5 ,

Langkah 9 : Letakkan ε_i = maks $[\,|a^{(j)}_{i,0,0} - a^{(j-1)}_{i,0,0}|$,

$|a^{(j)}_{i,0,1} - a^{(j-1)}_{i,0,1}|$, $|a^{(j)}_{i,0,2} - a^{(j-1)}_{i,0,2}|$,

$|a^{(j)}_{i,0,3} - a^{(j-1)}_{i,0,3}|\,]$.

Jika $\varepsilon_i \le$ toleran pergi ke langkah 11 $i = 1,2,\ldots,s$

Langkah 10 : Jika $j \le p$, $j = j+1$, pergi ke langkah 5.

Langkah 11 : Letakkan $H = H/2$ pergi ke langkah 3.

Langkah 12 : Letakkan $y_i(x) = a^{(j)}_{i,0,0}$, $y_i'(x) = a^{(j)}_{i,0,1}$,

$y_i''(x) = a^{(j)}_{i,0,2}$, $y_i'''(x) = a^{(j)}_{i,0,3}$, $i = 1,2,\ldots,s$

Langkah 13 : Letakkan $H_i = (\,\mathrm{Tol}/\varepsilon_i)^{1/2j}$.

Langkah 14 : Pilih $H = \min_i H_i$.

Langkah 15 : Letakkan $x_0 = x$, kemudian $x = x_0 + H$, pergi ke langkah 2.

Kaedah di atas digunakan dengan mengandaikan $y(x,h)$, $y'(x,h)$, $y''(x,h)$ dan $y'''(x,h)$ mempunyai kembangan h^2 berbentuk

$$y(x) = y(x,h) + A_1h^2 + A_2h^4 + A_3h^6 + \ldots + A_Nh^{2N} + R_N(h),$$

dengan $R_N(h) = O(h^{2N+2})$.

Sebagai perbandingan, masalah yang sama diselesaikan dengan kaedah yang sama dengan $y(x,h)$, $y'(x,h)$, $y''(x,h)$ dan $y'''(x,h)$ mempunyai kembangan h sahaja,

$$y(x) = y(x,h) + C_1h + C_2h^2 + C_3h^3 + \ldots + C_Nh^N + K_N(h),$$

dengan $K_N(h) = O(h^{N+1})$.

Masalah berikut diselesaikan dan keputusannya diberikan di dalam lampiran.

Masalah 1

$$y^{(iv)} = y \;, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$
$$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1 \;,$$
$$0 \le x \le \pi.$$

Penyelesaian

$$y = \sin x.$$

Masalah 2

$$y^{(iv)} = y \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$
$$y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 1,$$
$$0 \le x \le 5.0 \;.$$

Penyelesaian

$$y = e^x \;.$$

4. Kesimpulan

Dalam membincangkan keputusan dalam jadual 1 dan 2 yang terdapat di lampiran, wajar dinyatakan di sini norma penilaian yang digunakan oleh sebilangan ahli analisis berangka. Bagi sesuatu kaedah yang ralat pangkasan setempatnya $O(h^p)$, boleh dibuktikan bahawa ralat sejagatnya ialah $O(h^{p-1})$, lihat umpamanya Shampine dan Gordon [7]. Kesimpulannya, jika seorang pengguna memerlukan toleransi 10^{-p} pada ralat pangkasan setempat maka ralat sejagat $O(10^{-p+1})$ dan $O(10^{-p+2})$ adalah merupakan ralat yang masih terkandung dalam batasan toleransi yang dikehendaki.

Perhatikan juga keputusan dua belas masalah yang diselesaikan oleh Shampine dan Gordon [7] menggunakan kod mereka bagi menyelesaikan sistem persamaan pembezaan biasa. Kod dalam [7] adalah suatu kod kaedah multilangkah berubah peringkat dan panjang langkah yang cekap. Oleh itu jika seorang pengguna memerlukan toleransi 10^{-p} dan mendapat kaedah yang memberikan penyelesaian dengan ralat sejagat 10^{-p-5} tetapi dengan bilangan langkah dan penilaian fungsi yang banyak, maka kebanyakan ahli analisis berangka beranggapan bahawa penyelesaian tersebut kurang cekap berbanding dengan suatu kaedah lain yang memberikan penyelesaian dengan ralat sejagatnya dalam batasan toleransi $O(10^{-p+1})$ atau $O(10^{-p+2})$ dengan bilangan langkah dan penilaian fungsi yang sedikit. Kaedah kedua memberikan pulangan yang lebih baik kerana ia menjimatkan masa dan kos, tambahan pula pengguna tidak memerlukan kejituan yang lebih dari yang diperlukan.

Dari jadual 1 dan 2, didapati bagi toleransi 10^{-2}, kaedah A2 yang menggunakan kembangan h mempunyai penyelesaian yang lebih jitu dari kaedah A1 yang mengandaikan kewujudan kembangan h^2 dengan jumlah panjang langkah dan jumlah penilaian fungsi yang sama. Dengan itu bagi toleransi tersebut, kaedah A2 lebih baik dari A1.

Bagi toleransi 10^{-4}, 10^{-6} dan 10^{-8} walaupun kaedah A2 lebih jitu dari kaedah A1, tetapi ralat sejagat bagi kaedah A1 masih dalam batasan toleransi yang dikehendaki dengan kiraan jumlah langkah dan jumlah penilaian fungsi yang kurang jika dibandingkan dengan kaedah A2. Perbezaan jumlah penilaian fungsi ini lebih ketara lagi bagi toleransi 10^{-6} dan 10^{-8}. Berdasarkan keputusan ini dan norma yang telah dibincangkan, kaedah A1 dianggap lebih baik dari kaedah A2 bagi toleransi tersebut.

Dengan itu pada keseluruhannya bolehlah disimpulkan bahawa kaedah A1 adalah lebih baik kalau tidakpun sekurang-kurangnya sama baik dengan kaedah A2. Namum demikian sebelum sesuatu kesimpulan yang muktamat dapat dibuat adalah wajar dibuktikan kewujudan kembangan h^2 bagi PPB peringkat ke d. Kajian selanjutnya perlulah dilakukan ke atas PPB peringkat yang lebih tinggi lagi.

Rujukan

[1] Collatz.L., (1966), *The numerical treatment of differential equations*. Springer-Verlag, N. York.

[2] Fehlberg, E. (1964), New high order Runge-Kutta formulae with stepsize control for systems of first and second order differential equations. *ZAMM* 44, 17-29.

[3] Gragg, W.B., (1965), *On Extrapolation Algorithm for Ordinary Initial Value Problem*, SIAM J. Numerical Anal., 2, 384-403.

[4] Krogh, F.T. (1969), A variable step variable order multistep method for the numerical solution of ordinary differential equation. *Information Processing* 68. *North Holland Publishing Company, Amsterdam* 149-199..

[5] Mohamed b. Suleiman, Jalil b. Abd. Ghani, Mohri b. Idris (1987) , A Runge-Kutta method for solving second order ODE's directly. *Pertanika* 10(20), 209-217.

[6] Mohamed b. Suleiman (1986), Kaedah penentu luar untuk persamaan pembezaan biasa peringkat kedua. Simposium Kebangsaan Matematik ke 2, 336-350.

[7] Shampine, L.F., and Gordon M.K. (1975), *Computer solution of ordinary differential equations*, Freeman .

Lampiran

Keputusan berikut didapati dengan menggunakan komputer UNISYS 1100/60. Tatatanda yang digunakan dalam jadual membawa maksud berikut

TOL ~ Toleransi yang dipilih.

KSTEP ~ Bilangan langkah.

KFN ~ Bilangan penilaian fungsi.

KFA ~ Bilangan langkah yang gagal.

EMAX ~ Ralat maksimum $| y(x_n) - y_n |$, dengan $y(x_n)$ adalah penyelesaian tepat dan y_n penyelesaian hampiran.

Kaedah

A1 : Penyelesaian yang mengandaikan kembangan h^2 wujud.

A2 : Penyelesaian yang mempunyai kembangan h sahaja.

Jadual 1 : Keputusan berangka bagi masalah 1.

$\log_{10}$tol	Kaedah	KSTEP	KFN	KFA	EMAX
-2	A1	13	403	0	1.98×10^{-3}
	A2	13	403	0	1.23×10^{-4}
-4	A1	21	651	0	1.38×10^{-4}
	A2	22	682	0	7.91×10^{-6}
-6	A1	41	1271	0	7.69×10^{-6}
	A2	46	1426	0	4.32×10^{-7}
-8	A1	102	3162	0	3.45×10^{-7}
	A2	117	3627	0	1.59×10^{-8}

Jadual 2: Keputusan berangka bagi masalah 2.

$\log_{10}$tol	Kaedah	KSTEP	KFN	KFA	EMAX
-2	A1	18	558	0	6.59×10^{-2}
	A2	18	558	0	5.33×10^{-3}
-4	A1	42	1302	0	3.48×10^{-3}
	A2	46	1426	0	2.00×10^{-4}
-6	A1	112	3472	0	1.37×10^{-4}
	A2	128	3968	0	6.80×10^{-6}
-8	A1	> 200			
	A2	> 200			