Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 31-37,

SET TERTIBAN SEPARA BAK-POKOK

Abu Osman bin Md. Tap
Jabatan Matematik
Pusat Pengajian Kuantitatif
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM, Bangi, Selangor Darul Ehsan
Malaysia.

ABSTRAK

Syarat cukup dan perlu bagi set tertiban separa yang lengkap menjadi bak-pokok diberikan.

ABSTRACT

The necessary and sufficient conditions for the complete partially ordered set to be tree-like is given.

PENGENALAN

Kumpulan yang bertindak ke atas set tertiban separa bak-pokok telah dikaji oleh Hoare [3]. Masalah ini timbul daripada kajian pra-kumpulan oleh Stallings [6] dan selanjutnya oleh Rimlinger [5] dan Hoare [2].

Kertas ini akan melaporkan beberapa hasil sampingan yang memberikan syarat cukup dan perlu set tertiban separa yang lengkap menjadi bak-pokok sebagai cetusan di dalam penelitian kertas Hoare [3].

BAK-POKOK

Misalkan $\{P, \leq\}$ set tertiban separa. P dikatakan **bak-pokok** jikka apabila $b \leq a$ dan $c \leq a$, maka sama ada $b \leq c$ atau $c \leq b$. P dikatakan **lengkap** jikka setiap subset bagi P mempunyai batas atas terkecil.

Misalkan a sebarang unsur di dalam P. Untuk selanjutnya di dalam kertas ini, $\tilde{a}$ melambangkan set $\{p \in P: p \leq a\}$. Hoare [3] telah membuktikan sifat berikut.

USULAN 2.1

Untuk sebarang a, b dan c di dalam P, dua daripada set $\tilde{a} \cap \tilde{b}$, $\tilde{b} \cap \tilde{c}$ dan $\tilde{c} \cap \tilde{a}$ adalah sama dan yang ketiga mengandunginya.

□

Oleh kerana set $\tilde{a} \cap \tilde{b}$, $\tilde{b} \cap \tilde{c}$ dan $\tilde{c} \cap \tilde{a}$ boleh dibandingkan, maka minimum dua set bermaksud set yang terkecil. Seperti yang dibincangkan oleh Lyndon [4] dan Hoare [1], kita catatkan di sini sifat kesetaraannya.

USULAN 2.2

Usulan 2.1, di atas setara dengan sifat bahawa untuk sebarang a, b dan c di dalam P,

$$\min\left(\tilde{a} \cap \tilde{c},\ \tilde{b} \cap \tilde{c}\right) \subseteq \left(\tilde{a} \cap \tilde{b}\right)$$

□

Sekarang kita tunjukkan sifat berikut.

USULAN 2.3

Set tertiban separa yang lengkap adalah bak-pokok jika dan hanya jika ia memenuhi Usulan 2.1.

Bukti:

($\Rightarrow$) Usulan 2.1.

($\Leftarrow$) Misalkan Usulan 2.1 dipenuhi oleh $\{P, \subseteq\}$, set tertiban separa yang lengkap. Misalkan $b \leq a$ dan $c \leq a$. Maka $\tilde{b} \subset \tilde{a}$ dan $\tilde{c} \subset \tilde{a}$ sehinggakan $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \tilde{b}$ dan $\tilde{c} \cap \tilde{a} = \tilde{c}$. Dengan Usulan 2.1, dua daripada set

$$\tilde{a} \cap \tilde{b} = \tilde{b},\ \tilde{c} \cap \tilde{a} = \tilde{c} \text{ dan } \tilde{b} \cap \tilde{c}$$

adalah sama dan yang ketiga mengandunginya.

Jika $\tilde{b} = \tilde{a} \cap \tilde{b} = \tilde{b} \cap \tilde{c}$, maka $\tilde{b} \subset \tilde{c}$ dan $b \leq c$.

Jika $\tilde{b} = \tilde{a} \cap \tilde{b} = \tilde{c} \cap \tilde{a} = \tilde{c}$, maka $b = c$.

Jika $\tilde{b} \cap \tilde{c} = \tilde{c} \cap \tilde{a} = \tilde{c}$, maka $\tilde{c} \subset \tilde{b}$ dan $c \leq b$.

Oleh itu, $\{P, \leq\}$ adalah bak-pokok.

□

Seterusnya kita dapat tunjukkan sifat empat unsur.

USULAN 2.4

Untuk sebarang a, b, c dan d di dalam P, dua daripada set $(\tilde{a} \cap \tilde{b}) \cup (\tilde{c} \cap \tilde{d})$, $(\tilde{a} \cap \tilde{c}) \cup (\tilde{b} \cap \tilde{d})$, $(\tilde{b} \cap \tilde{c}) \cup (\tilde{a} \cap \tilde{d})$ adalah sama dan yang ketiga mengandunginya.

Bukti:

Tanpa kehilangan pengitlakan, kita misalkan $\tilde{a} \cap \tilde{d}$ minimum dan $\tilde{c} \cap \tilde{d}$ maksimum daripada enam set $\{\tilde{a} \cap \tilde{b}, \tilde{a} \cap \tilde{c}, \tilde{a} \cap \tilde{d}, \tilde{b} \cap \tilde{c}, \tilde{b} \cap \tilde{d}, \tilde{c} \cap \tilde{d}\}$. Oleh itu $(\tilde{a} \cap \tilde{d}) \subset (\tilde{c} \cap \tilde{d})$. Maka dengan Usulan 2.1, $\tilde{a} \cap \tilde{d} = \tilde{a} \cap \tilde{c}$. Sekarang pertimbangkan $\tilde{c} \cap \tilde{d}$, $\tilde{b} \cap \tilde{c}$ dan $\tilde{b} \cap \tilde{d}$. Sekali lagi dengan Usulan 2.1., $\tilde{b} \cap \tilde{c} = \tilde{b} \cap \tilde{d}$ kerana $\tilde{c} \cap \tilde{d}$, maksimum.

Oleh itu $(\tilde{a} \cap \tilde{c}) \cup (\tilde{b} \cap \tilde{d}) = (\tilde{b} \cap \tilde{c}) \cup (\tilde{a} \cap \tilde{d})$. Tambahan pula $(\tilde{a} \cap \tilde{b}) \cup (\tilde{c} \cap \tilde{d})$ mengandungi kedua-dua set tadi kerana $\tilde{c} \cap \tilde{d}$ maksimum.

□

Misalkan a dan b unsur P. **Selang** [a,b] adalah set semua x di dalam P sehinggakan

(i) $x \leq a$ atau $x \leq b$

dan (ii) jika $y \leq a$ dan $y \leq b$, maka $y \leq x$.

□

Hoare [3] juga telah menunjukkan sifat berikut.

USULAN 2.5

Dua daripada set $[a,b] \cup \tilde{c}$, $[b,c] \cup \tilde{a}$ dan $[c,a] \cup \tilde{b}$ adalah sama dan yang ketiga terkandung di dalamnya.

□

Sekarang kita tunjukkan yang sifat berikut pula dipenuhi.

USULAN 2.6

Set tertiban separa yang lengkap adalah bak-pokok jika dan hanya jika ia memenuhi Usulan 2.5.

Bukti:

($\Rightarrow$) Usulan 2.5

($\Leftarrow$) Misalkan Usulan 2.5 dipenuhi oleh $\{P,\leq\}$, set tertiban separa yang lengkap. Misalkan $b \leq a$ dan $c \leq a$ sehinggakan $\tilde{b} \subset \tilde{a}$ dan $\tilde{c} \subset \tilde{a}$. Tanpa kehilangan pengitlakan, kita misalkan

$$[a,b] \cup \tilde{c} = [b,c] \cup \tilde{a} \supset [c,a] \cup \tilde{b}.$$

Maka wujud $y \in [b,c] \cup \tilde{a} = [a,b] \cup \tilde{c}$ yang $y \notin [c,a] \cup \tilde{b}$. Ini bermakna $y \notin [c,a]$, $y \notin \tilde{b}$. Oleh itu wujud $z \in P$ sehingga $y < z \leq c \leq a$. Sekarang $\tilde{b} \subset \tilde{a}$ dan $y \notin \tilde{b}$ mengimplikasikan $b < y$. Jadi kita dapat $b < y < z \leq c \leq a$. Oleh itu $b < c$.

Dengan cara yang serupa, menukar gantikan b dengan c,

$$[a,c] \cup \tilde{b} = [b,c] \cup \tilde{a} \supset [a,b] \cup \tilde{c}.$$

akan memberikan $c < b$.

Sekarang jika $[a,b] \cup \tilde{c} = [a,c] \cup \tilde{b} \supset [b,c] \cup \tilde{a}$, maka oleh kerana $b \leq a$, $c \leq a$, $[b,c] \cup \tilde{a} = \tilde{a}$, kita dapati

$$[a,b] \cup \tilde{c} = [a,c] \cup \tilde{b} = [b,c] \cup \tilde{a} = \tilde{a} ,$$

sedangkan $[a,b] \cup \tilde{c} = [a,c] \cup \tilde{b}$ akan mengimplikasikan $b = c$.

Oleh itu kita dapati $b \le c$ atau $c \le b$, dan $\{P,\le\}$ menjadi bak-pokok.

□

Sebagai natijahnya kita lihat kesetaraan berikut.

USULAN 2.7

Bagi set tertiban separa yang lengkap, Usulan 2.1. setara dengan Usulan 2.5.

□

CATATAN 2.8. Kita perhatikan di sini yang Usulan 2.3. dan 2.6. adalah analog bagi masalah pokok yang dibincangkan oleh Wilken [7].

□

Penulis ingin merakam ucapan terima kasih kepada Universiti Kebangsaan Malaysia yang telah membenarkan cuti sabatikal.

RUJUKAN

[1] Hoare, A.H.M. Nielsen Method in Groups with Length Function, Math. Scand. 48 (1981), 153-164.

[2] Hoare, A.H.M. Pregroups and Length Function. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 104 (1988), 21-30.

[3] Hoare, A.H.M. Groups Acting on Tree-Like Partially Ordered Sets - Pracetak 1990.

[4] Lyndon, R.C. Length Function in Groups. Math. Scand. 12 (1963), 209-234.

[5] Rimlinger, F.S. Pregroups and Bass-Serre Theory. Mem. Amer. Math. Soc. 361., 1987.

[6] Stallings, J.R. Group Theory and Three Dimensional Manifolds. Yale Univ. Press (1971).

[7] Wilkens, D.L. Group Actions on Trees and Length Functions. Mich. Math. J. 35 (1988) 141-150.