Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 39-47,

Analog-q bagi Transformasi Linear terhadap Polinomial R_n

oleh

Ali Hassan Mohamed Murid
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
Karung Berkunci 791
80990 Johor Bahru, Johor

Abstrak:

Dalam kertas ini, analog-q yang kedua untuk polinomial R_n dalam dua pembolehubah diperkenalkan. Analog-q kedua ini didapati setara dengan analog-q pertama bagi R_n yang telah dibincangkan dalam satu kertas kerja yang lepas. Kasus khas daripada hubungan kesetaraan ini ialah transformasi linear terhadap polinomial R_n.

Abstract:

In this paper, a second q-analogue for the R_n polynomial in two variables is given. This second q-analogue is found to be equivalent with the first q-analogue of R_n discussed in a previous work. A special case of this equivalence relation is the linear transformation of the R_n polynomial.

1. Pengenalan

Polinomial $R_n(b,b';x,y)$ ialah suatu polinomial hipergeometri yang ditakrifkan sebagai (lihat Carlson[2],hal.130)

$$R_n(b,b';x,y) = \frac{n!}{(c,n)} \sum_{m=0}^{n} \frac{(b,m)(b',n-m)}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m}, \tag{1.1}$$

dengan $n\in\mathbb{N}$, $b,b',x,y\in\mathbb{C}$, $c=b+b'$ dan $(c,n)\neq 0$. Ungkapan (a,m) ialah simbol Appell yang diberi takrif

$$(a,m) = a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1),\ (a,0) = 1. \tag{1.2}$$

Polinomial R_n ini boleh ditulis dalam sebutan polinomial hipergeometri ${}_2F_1$ dalam berbagai cara. Satu daripadanya ialah (lihat Carlson[2],hal.179)

$$R_n(b,b';x,y) = \frac{(b',n)}{(c,n)} y^n \,{}_2F_1(-n,b;1-b'-n;\tfrac{x}{y}). \tag{1.3}$$

Dalam [1], satu analog-q bagi polinomial $R_n(b,b';x,y)$ telah diberikan. Analog-q tersebut yang ditandakan dengan $R_n(b,b';q,x,y)$, atau ringkasnya $R_n(q)$, ditakrifkan sebagai

$$R_n(b,b';q,x,y) = \frac{(q;q)_n}{(d;q)_n} \sum_{m=0}^{n} \frac{(b;q)_m (b';q)_{n-m}}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}} x^m y^{n-m}, \tag{1.4}$$

dengan $d=bb'$ dan $(a;q)_n=a(1-aq)(1-aq^2)\ldots(1-aq^{n-1})$, $(a,q)_0=1$. Dalam [1], beberapa perkara berikut, yang penting dalam kertas ini, telah dibuktikan :

$$\operatorname*{had}_{q\to 1} R_n(q^b,q^{b'};q,x,y) = R_n(b,b';x,y) \tag{1.5}$$

$$R_n(b,b';q,x,y) = R_n(b',b;q,y,x) \tag{1.6}$$

$$R_n(b,b';q,\lambda x,\lambda y) = \lambda^n R_n(b,b';q,x,y) \tag{1.7}$$

$$R_n(b,b';q,x,y) = y^n \frac{(b';q)_n}{(d;q)_n} \,{}_2\phi_1(q^{-n},b;q^{1-n}/b';q,(qx)/(b'y)) \tag{1.8}$$

Fungsi ${}_2\phi_1$ dalam (1.8) ialah analog-q bagi fungsi hipergeometri ${}_2F_1$ (lihat Slater[5],Bab 3). Persamaan (1.8) juga setara dengan

$$
{}_2\phi_1(q^{-n},\beta;\gamma;q,\zeta) = \frac{(\gamma/\beta;q)_n\beta^n}{(\gamma;q)_n} R_n(\beta,q^{1-n}/\gamma;q,\gamma^{-1}q^{-n}\zeta,1). \qquad (1.9)
$$

Dalam kertas ini kita akan cuba dapatkan analog-q bagi transformasi linear terhadap $R_n(b,b';x,y)$, iaitu (lihat Carlson[2],hal.141)

$$
(c,n)R_n(b,b';x,y) = (b,n)\ R_n(b',1-c-n;x-y,x) \qquad (1.10)
$$

$$
= (b',n)\ R_n(b,1-c-n;y-x,y), \qquad (1.11)
$$

dengan $n\in\mathbb{N}$, $b,b',x,y\in\mathbb{C}$, $c=b+b'$. Dalam usaha ini, satu lagi analog-q bagi (1.1) terpaksa diperkenalkan. Analog-q kedua ini kita tandakan sebagai $R_n^{\bullet}(b,b';q,x,y)$ atau ringkasnya $R_n^{\bullet}(q)$. Permasalahan dan takrifan $R_n^{\bullet}(q)$ akan diberi dalam seksyen 3. Bagaimanapun $R_n(q)$ dan $R_n^{\bullet}(q)$ adalah setara. Daripada kesetaraan inilah transformasi (1.10) dan (1.11) muncul sebagai kasus khas. Kesemua ini akan dibuktikan dalam seksyen 4.

2. <u>Penyusunan siri dan rumus berkaitan dengan $(a;q)_n$</u>

Satu rumus yang akan digunakan dalam kerja kita nanti ialah penyusunan semula sebutan dalam siri. Satu jenis yang akan diperlukan ialah

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} B(k,m) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,m+k). \qquad (2.1)
$$

Untuk pembuktiannya, sila lihat Rainville[4],hal.57.

Rumus yang berkaitan dengan $(a;q)_n$ juga kerapkali digunakan dalam penulisan semula siri-q. Kesemua fakta berikut ada dibuktikan dalam Slater[5],Bab 3, yang mana pembaca boleh merujuk untuk sebarang bahan yang tidak dilazimi:

$$
(aq^{-n};q)_n = (-a)^n q^{-n(n+1)/2}(q/a;q)_n \qquad (2.2)
$$

$$(a;q)_{-n} = \frac{(-a)^n q^{n(n+1)/2}}{(q/a;q)_n} \tag{2.3}$$

$$(a;q)_{m-n} = \frac{(a;q)_m q^{n(n+1)/2}}{(q^{1-m}/a;q)_n (-a)^n q^{mn}} \tag{2.4}$$

$$_2\phi_1(q^{-n},a;b;q,q) = \frac{a^n(b/a;q)_n}{(b;q)_n} . \tag{2.5}$$

Persamaan terakhir ini juga dikenali sebagai analog-q teorem Vandermonde.

3. Analog-q yang kedua untuk polinomial R_n

Ungkapan (1.3) dalam bentuk siri ialah

$$R_n(b,b';x,y) = y^n \frac{(b',n)}{(c,n)} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-n,m)(b,m)}{(1-b'-n,m)m!} (x/y)^m. \tag{3.1}$$

Dengan menggunakan teorem binomial, sebutan $(x/y)^m$ kita tulis semula sebagai

$$(x/y)^m = (1-(1-(x/y)))^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m,k)}{k!} (1-(x/y))^k = {}_1F_0(-m;1-(x/y)). \tag{3.2}$$

Menggantikan, kita peroleh

$$R_n(b,b';x,y) = y^n \frac{(b',n)}{(c,n)} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m,k)\ (-n,m)(b,m)}{(1-b'-n,m)m!k!} (1-(x/y))^k. \tag{3.3}$$

Seterusnya dengan menggunakan beberapa hubungan simbol Appell, (2.1) dan teorem Vandermonde, maka transformasi (1.10) dan (1.11) dapat dibuktikan.

Sekarang kita cuba guna jalan kerja di atas untuk $R_n(q)$ pula. Kita mulai dengan (1.8) dalam bentuk siri, iaitu

$$R_n(b,b';q,x,y) = y^n \frac{(b';q)_n}{(d;q)_n} \sum_{m=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_m (b;q)_m}{(q^{1-n}/b';q)_m (q;q)_m} ((qx)/(b'y))^m. \tag{3.4}$$

Jika kita tulis $((qx)/(b'y))^m=(1-(1-(qx)/(b'y)))^m$ dan guna teorem binomial, maka masalah yang timbul ialah terdapatnya campuran simbol Appell (a,n) dengan simbol $(a;q)_n$. Untuk usaha seterusnya kita pertimbangkan teorem binomial-q (lihat Slater[5],hal.92), iaitu

$$(1-zq^{-m})(1-zq^{1-m})\ldots(1-zq^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(q^{-m};q)_k}{(q;q)_k} z^k = {}_1\phi_0(q^{-m};q,z) \tag{3.5}$$

atau, dengan menggantikan z dengan (1-z), maka

$$(1-(1-z)q^{-m})(1-(1-z)q^{1-m})\ldots(1-(1-z)q^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(q^{-m};q)_k}{(q;q)_k} (1-z)^k = {}_1\phi_0(q^{-m};q,1-z). \tag{3.6}$$

Perhatikan bahawa, jika $z=x/y$ dan diambil had $q\to 1$, maka (3.6) menjadi (3.2). Perhatikan juga bahawa dalam mendapatkan (3.3), kita telah gantikan $(x/y)^m$ dalam (3.1) dengan ${}_1F_0(-m;1-(x/y))$. Tetapi untuk analog-q, kita tidak boleh menggantikan $((qx)/(b'y))^m$ dalam (3.4) dengan

$${}_1\phi_0(q^{-m};q,1-((qx)/(b'y))$$

kerana mereka tidak bersamaan.

Kegagalan usaha di atas ini membawa kesimpulan baha'a analog-q yang kedua bagi (1.1) perlu diperkenalkan. Kata.ah analog-q kedua ini kita beri tatatanda $R_n^*(b,b';q,x,y)$ atau ringkasnya $R_n^*(q)$. Setelah beberapa percubaan, $R_n^*(q)$ yang ,esuai dengan matlamat kita ialah

$$R_n^*(b,b';q,x,y) = D\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(b;q)_m(b';q)_{n-m}(q^{-m};q)_k}{(q;q)_m(q;q)_{n-m}(q;q)_k}w^kS^mT, \qquad (3.7)$$

dengan $D=\dfrac{(q;q)_n}{(d;q)_n}y^n$, $w=(1-(x/y))$, $S=b'/q$, dan $T=\dfrac{q^{(k+1)(m-k)}}{(bq^k)^{n-k}}$.

Sebagaimana $R_n(q)$, $R_n^*(q)$ juga bersifat homogen, iaitu

$$R_n^*(b,b';q,\lambda x,\lambda y) = \lambda^n R_n^*(b,b';q,x,y). \qquad (3.8)$$

Jika digantikan b,b' dengan q^b, $q^{b'}$ dan ambil had $q\to 1$, maka boleh ditunjukkan bahawa

$$\operatorname*{had}_{q\to 1} R_n^*(q^b,q^{b'};q,x,y) = R_n(b,b';,x,y). \qquad (3.9)$$

Jadi $R_n^*(q)$ juga merupakan analog-q bagi R_n. Apa yang lebih menarik ialah $R_n^*(q)$ dan $R_n(q)$ adalah setara, iaitu setiap satu boleh ditulis dalam sebutan yang lain. Hal ini akan dibuktikan dalam seksyen berikutnya.

4. Kesetaraan antara $R_n^*(q)$ dan $R_n(q)$

Daripada persamaan (3.7), penggunaan hubungan (2.4) terhadap $(b';q)_{n-m}$ dan $(q;q)_{n-m}$ menghasilkan

$$R_n^*(q) = E\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(b;q)_m(q^{-n};q)_m(q^{-m};q)_k}{(q^{1-n}/b';q)_m(q;q)_k(q;q)_m}w^kT, \qquad (4.1)$$

dengan $E=y^n(b';q)_n/(d;q)_n$. Penggunaan rumus (2.4) sekali lagi terhadap $(q;q)_{m-k}$, kita dapat

$$\frac{(q^{-m};q)_k}{(q;q)_m} = \frac{(-1)^k}{(q;q)_{m-k}}q^{-k(1+2m-k)/2}. \qquad (4.2)$$

Menggantikan, maka (4.1) menjadi

$$R_n^{\bullet}(q) = E\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \frac{(b;q)_m (q^{-n};q)_m (-w)^k T}{(q^{1-n}/b';q)_m (q;q)_k (q;q)_{m-k}} q^{-k(1+2m-k)/2}. \tag{4.3}$$

Memandangkan $(q^{-n};q)_m=0$ jika $m>n$, maka penghasiltambah $\sum_{m=0}^{n}$ di atas boleh digantikan dengan $\sum_{m=0}^{\infty}$. Seterusnya dengan menggunakan rumus (2.1), persamaan (4.3) dapat ditulis semula dalam sebutan polinomial ${}_2\phi_1$, iaitu

$$R_n^{\bullet}(q) = E\sum_{k=0}^{n} \frac{(b;q)_k (q^{-n};q)_k (-w)^k q^{-k(k+1)/2}}{(q^{1-n}/b';q)_k (q;q)_k (bq^k)^{n-k}} {}_2\phi_1(q), \tag{4.4}$$

dengan

$${}_2\phi_1(q) = {}_2\phi_1(q^{-n+k}, bq^k; q^{1-n+k}/b'; q, q). \tag{4.5}$$

Dengan menggunakan analog-q teorem Vandermonde (2.5), maka boleh ditunjukkan bahawa

$${}_2\phi_1(q) = \frac{(q^{1-n}/d;q)_{n-k}}{(q^{1-n+k}/b';q)_{n-k}} (bq^k)^{n-k}. \tag{4.6}$$

Penggunaan rumus-rumus (2.2), (2.3) dan (2.4), membolehkan (4.6) ditulis semula sebagai

$${}_2\phi_1(q) = \frac{(-dq^k)^k (d;q)_n (q^{1-n}/b';q)_k}{(d;q)_k (b';q)_n b^n q^{k(k+1)/2}}. \tag{4.7}$$

Penggantian ini ke dalam (4.4), menghasilkan

$$R_n^{\bullet}(q) = y^n b^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(b;q)_k (q^{-n};q)_k}{(d;q)_k (q;q)_k} (dw/q)^k \tag{4.8}$$

$$= y^n b^{-n} {}_2\phi_1(q^{-n}, b; d; dw/q) \tag{4.9}$$

$$= y^n \frac{(b';q)_n}{(d;q)_n} R_n(b, q^{1-n}/d; q, wq^{-1-n}, 1), \tag{4.10}$$

atau

$$R_n^{\bullet}(b,b';q,x,y) = \frac{(b';q)_n}{(d;q)_n} R_n(b, q^{1-n}/d; q, (y-x)q^{-1-n}, y). \tag{4.11}$$

Persamaan (4.10) diperolehi dari penggunaan rumus (1.9), manakala

(4.11) didapati dari penggunaan rumus (1.7) dan mengambil kira $w=1-(x/y)$. Jika b,b' digantikan dengan $q^b,q^{b'}$ dan ambil had $q\rightarrow 1$, maka (4.9) menjadi

$$R_n(b,b';x,y) = y^n{}_2F_1(-n,b;c;1-(x/y)),\ c=b+b'. \qquad (4.12)$$

Persamaan ini juga terdapat dalam Carlson[2],hal.179. Oleh yang demikian, persamaan (4.9) merupakan analog-q bagi (4.12).

Dalam persamaan (4.11), jika kita gantikan $(y-x)q^{-1-n}$ dengan x dan q^{1-n}/d dengan b', dan juga guna hubungan (2.3) serta (1.6), maka persamaan (4.11) didapati setara dengan

$$(d;q)_nR_n(b,b';q,x,y) = b^n(b';q)_nR^*_n(b,q^{1-n}/d;q,y-q^{1+n}x,y) \qquad (4.13)$$

$$= (b')^n(b;q)_nR^*_n(b',q^{1-n}/d;q,x-q^{1+n}y,x). \qquad (4.14)$$

Hubungan (4.11), (4.13) dan (4.14) menunjukkan $R^*_n(q)$ dan $R_n(q)$ adalah setara. Hubungan (4.13) dan (4.14) juga sebenarnya ialah analog-q bagi transformasi linear (1.10) dan (1.11). Ini boleh dibuktikan dengan menggantikan b,b' dengan $q^b.q^{b'}$ dan ambil had $q\rightarrow 1$.

5. <u>Kesimpulan</u>

Dalam kertas ini kita telah memperkenalkan analog-q yang kedua bagi $R_n(b,b';x,y)$ yang ditandakan sebagai $R^*_n(b,b';q,x,y)$. $R^*_n(q)$ ini didapati setara dengan analog-q yang pertama iaitu $R_n(b,b';q,x,y)$. Kasus khas daripada kesetaraan ini ialah transformasi linear untuk $R_n(b,b';x,y)$. Dalam teori fungsi-q, adalah tidak aneh jika terdapat beberapa analog-q yang berlainan untuk fungsi yang sama. Perkara yang serupa telah diperlakukan oleh Jackson[3], di mana beliau telah mentakrifkan dua siri-q yang berlainan untuk ungkapan eksponen e^x.

Penghargaan : Penulis berterima kasih kepada pihak Perpustakaan UTM atas usaha untuk mendapatkan makalah [3].

Rujukan

[1] Ali Hassan Mohd. Murid, Masalah Analog-q bagi Fungsi-R Carlson, Matematika 5(1989) 149-158.

[2] B.C.Carlson, Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1977.

[3] F.H.Jackson, Transformation of q-Series, Mess. Math. 39(1910) 145-151.

[4] E.D.Rainville, Special Functions, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[5] L.J.Slater, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, London, 1966.