Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 49-61,
© Jabatan Matematik, UTM.

Satu teknik baru dalam pengendalian kekangan-kekangan mudah

Rio Hirowati Shariffudin.
Fakulti Sains.
Universiti Malaya.
59100 Kuala Lumpur.

Abstrak

Kewujudan kekangan dalam masalah pengoptimuman tidak linear menjadi masalah pengoptimuman lebih rumit lagi. Di antara bentuk-bentuk kekangan ialah pembatasan di atas dan di bawah bagi sesuatu pembolehubah itu. Dalam kertaskerja ini, satu teknik baru bagi pengendalian kekangan-kekangan mudah diberi, iaitu satu cara baru diperkatakan bagi menentukan kekangan - kekangan mudah mana yang aktif dan yang mana pasif. Satu masalah contoh disertakan untuk menunjukkan prestasi teknik ini dalam menentukan pembolehubah mana yang patut ditetapkan pada batas-batasnya apabila ia telah melampaui batasnya atau menjadi aktif.

1.Pengenalan

Masalah asas dalam pengoptimuman ialah untuk membuat keputusan sebaik mungkin dalam mana-mana suatu keadaan. Masalah ini biasanya dimodelkan dengan masalah matematik. Di sini, sesuatu kuantiti, biasanya fungsi banyak pembolehubah dimaksimumkan atau diminimumkan tertakluk kepada satu atau lebih kekangan. Kekangan ini pula berbentuk persamaan atau ketaksamaan.

Dalam bahasa matematik, masalah pengoptimuman dapat diberikan oleh yang berikut:

Minimumkan (atau maksimumkan)

$$z = f(\underline{x}) \qquad (1)$$

tertakluk kepada kekangan-kekangan

$$g_i(\underline{x}) \leq \ , = \text{ atau } \geq \ b_i . \qquad (2)$$

Fungsi z dalam (1) ialah fungsi objektif. Pada praktisnya, kita dapati bahawa di samping (2) sesuatu masalah pengoptimuman itu boleh mengandungi kekangan yang agak ringan dan berbentuk batasan ke atas pembolehubah. Oleh yan' demikian, kekangan ini lebih merupakan kekangan-kekangn mudah

$$l_j \leq x_j \leq u_j .$$

Kes masalah pengoptimuman yang paling mudah ialah pengoptimuman tanpa sebarang kekangan, iaitu masalah pengoptimuman hanya meminta fungsi objektif dioptimumkan untuk $\underline{x}$ yang tidak terbatas.

Jika $f(\underline{x})$ dan $g_i(\underline{x})$ kesemuanya linear dlam $\underline{x}$, maka masalah pengoptimuman itu menjadi masalah pengaturcaraan linear dan ianya telah menjadi model kepada beratus-ratus jenis masalah fizik. Untuk menyelesaikan masalah ini, kaedah yang acapkali digunakan ialah kaedah simpleks ciptaan Dantzig [1] dalam tahun 1947.

Kini, jika $f(\underline{x})$ atau satu atau lebih $g_i(\underline{x})$ tidak linear dalam mana-mana satu pembolehubah, masalah pengoptimuman menjadi masalah pengoptimuman tak linear. Masalah klasik jenis ini mengambil bentuk

Minimumkan (atau maksimumkan)

$$\left.\begin{array}{l} z = f(\underline{x}) \\ \text{tertakluk kepada} \\ g_i(\underline{x}) = b_i \end{array}\right\} \qquad \text{M1}$$

Bagi masalah M1 ini, dengan menggunakan pendarab Lagrange, ianya dapat dijadikan masalah pengoptimuman tidak berkekang. Syarat perlu dan cukup bagi penyelesaiannya telah pun maklum dari penggunaan kalkulus.

Seterusnya, apabila kekangan dalam bentuk ketaksamaan wujud, kita boleh bentukkan M1 dengan menambahkan pembolehubah lalaian atau pembolehubah lebihan atau kedua-duanya sekali.

Kuhn dan Tucker [2] dalam tahun 1951 telah dapat memperolehi beberapa maklumat tentang penyelesaian optimum bagi masalah pengoptimuman tak linear dan seterusnya membuka era baru dalam penciptaan alkhwarizmi yang lebih berkesan untuk menyelesaikan masalah pengoptimuman yang lebih praktis.

2. Teori Kuhn-Tucker

Dalam masalah am pengaturcaraan tak linear:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maksimumkan} & \\ \quad z = f(\underline{x}) & \\ \text{tertakluk kepada} & \\ \quad g_i(\underline{x}) \le b_i & (i = 1,2,\ldots\ldots,u) \\ \quad g_i(\underline{x}) \ge b_i & (i = u+1,\ldots\ldots,v) \\ \quad g_i(\underline{x}) = b_i & (i = v+1,\ldots\ldots\ldots,m) \\ \quad \underline{x} \ge 0\ . & \end{array}\right\} \qquad \text{M2}$$

sebarang vektor $\underline{x}$ yang memenuhi kekangan - kekangan dikatakan penyelesaian tersaur.

Katalah $f,\ g_i \in C_1$ dan takrifkan set indeks

$$I_a = \{i : g_i(\underline{x}^*) = b_i\}$$

$$I_p = \{i : g_i(\underline{x}^*) \neq b_i\}$$

$$J_a = \{j : x_j^* = 0\}$$

$$J_p = \{j : x_j^* > 0\}$$

Subskrip 'a' untuk I dan J menunjukkan bahawa kekangan dan kekangan mudahnya aktif manakala subskrip 'p' pula memberi rujukan kepada kekangan dan kekangan mudahnya yang pasif.

Kini, jika fungsi lanjut Lagrange ialah

$$F_e(\underline{x},\underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \sum_i \lambda_i [b_i - g_i(\underline{x})] - \sum_j \lambda_{m+j} x_j \qquad (3)$$

dengan pendarab Lagrange $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{m+n}$, maka kita akan dapat teorem 1 seperti berikut:

Teorem 1.

Untuk masalah M2, m pendarab Lagrange λ_i dalam (3) memenuhi

$$\frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \qquad (j \in J_a) \qquad (4)$$

$$= 0 \qquad (j \in J_p) \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_i^* & \geq 0 & (i = 1, 2, \ldots, u) \\ & \leq 0 & (i = u+1, \ldots, v) \\ & \text{bebas dalam tandaan} & (i = v+1, \ldots, m) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Dengan ini, kita boleh memperoleh syarat-syarat perlu Kuhn-Tucker:

1.Syarat I(K-T.1)

$$\nabla_x F(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = \nabla f(\underline{x}^*) - \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \qquad .7)$$

Tandaan kesamaan tegas benar untuk $j \in J_p$.

2. Syarat II(K-T.2)

$$[\nabla_x F(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)]^T \underline{x}^* = \sum_j \{ \frac{\partial f}{\partial x_j} (\underline{x}^*) - \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i (\underline{x}^*)}{\partial x_j} \} x_j^*$$

$$= 0$$

3. Syarat III(K-T.3)

u komponen pertama bagi vektor

$$\nabla_\lambda f(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = [b_1 - g_1(\underline{x}^*), \ldots, b_m - g_m(\underline{x}^*)]$$

tidak negatif, (v-u) komponen berikutnya tidak positif dan yang lainnya sifar.

4. Syarat IV(K-T.4)

$$[\nabla_\lambda F(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)]^T \underline{\lambda}^* = \sum_i [b_i - g_i(\underline{x}^*)] \lambda_i^* = 0$$

Seterusnya, untuk mendapatkan syarat cukup bagi penyelesaian masalah masalah M2 yang beroptimum sejagat, teorem 2 adalah memadai.

Teorem 2.

Untuk masalah M2, katalah $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$ memenuhi syarat-syarat perlu Kuhn-Tucker dan katalah $f(\underline{x})$ cekung dalam rantau tersaur. Katalah juga $g_i(\underline{x})$ untuk $\lambda_i^* > 0$ ialah fungsi-fungsi cembung dan untuk $\lambda_i^* < 0$, $g_i(\underline{x})$ cekung. Maka $f(\underline{x}^*)$ ialah maksimum sejagat bagi $f(\underline{x})$ tertakluk kepada kekangan dalam masalah M2.

Bersama-sama sifat-sifat titik pelana bagi fungsi Lagrange dan teorem 2 itu, kita memperoleh teorem asas Kuhn-Tucker.

Teorem Kuhn-Tucker.

Katalah $f(\underline{x})$ dan $g_i(\underline{x})$ dalam masalah M2 memenuhi kecekungan dan kecembungan seperti ternyata dalam teorem 2. Maka, $\underline{x}^*$ ialah penyelesaian optimum bagi masalah M2 jika dan hanya jika wujud $\underline{\lambda}^*$ supaya fungsi Lagrange

$$F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \sum_i \lambda_i [b_i - g_i(\underline{x})]$$

mempunyai titik pelana sejagat pada titik $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$, iaitu dalam kejiranan $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$

$$F(\underline{x}, \underline{\lambda}^*) \leq F(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) \leq F(\underline{x}^*, \underline{\lambda}) \quad ; \quad \underline{x} \geq 0$$

dan syarat-syarat dalam (6).

Bagi memastikan kewujudan $\underline{\lambda}^*$ yang memenuhi syarat-syarat perlu Kuhn-Tucker, kita perhatikan bahawa kekangan dan batasan mudah pasif tetap pasif dalam kejiranan $\underline{\lambda}^*$. Maka, dengan mengabaikan kekangan-kekangan, termasuk kekangan - kekangan mudah yang pasif itu, kita dapati bahawa titik optimum $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$, λ_i dan λ_{m+j} memenuhi

$$\frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = \sum_{i \in I_a} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{x}^*)}{\partial x_j} - \lambda_{m+j}^* \qquad j \in J_a)$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i \in I_a} \lambda_i^* \frac{\partial g(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j \in J_p)$$

Juga,

$$\begin{array}{ll} \lambda_i^* \geq 0 & (i = 1,2,\ldots\ldots,u) \\ \quad \leq 0 & (i = u+1,\ldots\ldots,v) \\ \quad \text{bebas dalam tandaan} & (i = v+1,\ldots\ldots,m) \end{array}$$

dan

$$\lambda_{m+j}^* \leq 0$$

Dalam artikata lain, vektor $\nabla f(\underline{x}^*)$ mestilah terletak pada atau dalam kon cembung yang dijanakan oleh vektor-vektor $\nabla g_i(\underline{x}^*)$ untuk $(i = 1,2,\ldots\ldots,u;\ i \in I_a)$, $-\nabla g_i(\underline{x}^*)$ untuk $(i = u+1,\ldots\ldots,v;\ i \in I_a)$ dan $-\underline{e}_j$ untuk $j \in J_a$.

3. Pengendalian kekangan

Pada praktisnya, kita ketemu masalah-masalah dengan kekangan-kekangan yang terbatas diatas dan juga dibawah. Kerapkali juga, kekangan - kekangan mudah merupakan kekangan yang terbatas di atas dan di bawah.

Untuk membolehkan kita menyelesaikan masalah seperti itu, kita boleh menukarkan masalah asal kepada masalah M2 dan gunakan teorem Kuhn-Tucker untuk mendapatkan selesaian baginya. Tetapi, dengan berbuat demikian, bilangan kekangan akan bertambah.

Satu cara alternatif ialah mengendalikan kekangan - kekangan mudah secara berasingan. Di sini, cara klasik baginya ialah dengan menetapkan pembolehubah - pembolehubah yang telah melampaui batasnya pada batas-batasnya tanpa memikir panjang lagi.

Dalam pada kita berpuas hati dengan cara ini, baru-baru ini kita dapati bahawa penyelesaian yang kita perolehi dalam beberapa masalah uji tidak memberi optimum yang sejagat. Cara klasik itu hanya sekadar memberi satu angka sahaja. Maka, untuk membolehkan kita mendapatkan penyelesaian optimum dan bukan sekadar penyelesaian sahaja, kita menjumlahkan pendarab-pendarab Lagrange yang tertentu dan membuat keputusan tentang kepasifan atau keaktifan kekangan-kekangan itu.

Misalnya, jika penjumlahan mutlak pendarab Lagrange bagi pembolehubah yang mengambil nilai batas atasnya adalah lebih dari penjumlahan mutlak pendarab Lagrange bagi pembolehubah yang mengambil nilai batas bawahnya, maka kita perlu hanya menetapkan pembolehubah pada nilai batas atasnya sahaja (sila rujuk [3] untuk keterangan lanjut serta pembuktian bagi teori ini).

4. Hasil berangka

Masalah contoh yang akan kita selesaikan ialah:

minimumkan

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_3^2 + x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

tertakluk kepada

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$1 \le x_1 \le 4$$
$$1 \le x_2 \le 3$$
$$1 \le x_3 \le 4 .$$

Dengan pengendalian klasik bagi kekangan (yang mudah buat sementara), kita dapat satu penyelesaian $\underline{x}^* = (4,1,3)$ dengan $f(\underline{x}^*) = 39.5$ manakala dengan pengendalian kita itu, kita dapati penyelesaian sejagat $\underline{x}^* = [4,2,2)$ dengan $f(\underline{x}^*) = 38.0$. Jika kita menggunakan graf, kita akan dapati penyelesaian bagi masalah contoh itu tidak bercanggah dengan optimum yang kita perolehi dari kaedah baru kita itu (sila lihat lakaran 1 yang telah kita perturunkan).

5. Penutup

Cara pengendalian kekangan - kekangan yang bukan persamaan secara berasingan lebih digemari kerana bilangan kekangan hanya tertumpu kepada kekangan dalam bentuk persamaan. Cara pengendalian kekangan mudah secara klasik amat mudah tetapi ianya mungkin tidak memberi optimum. Dengan cara pengendalian baru, seperti telah ditunjukkan dalam bahagian 4, kita dapat optimum dan bukan sekadar jawapan. Oleh kerana cara untuk memastikan kekangan mana yang aktif dan kekangan mana yang pasif hanya berdasarkan pendarab Lagrange, kita mungkin boleh lanjutkan penggunaan kaedah ini kepada kekangan yang tidak terhad kepada yang mudah sahaja.

6. Ucapan terima kasih

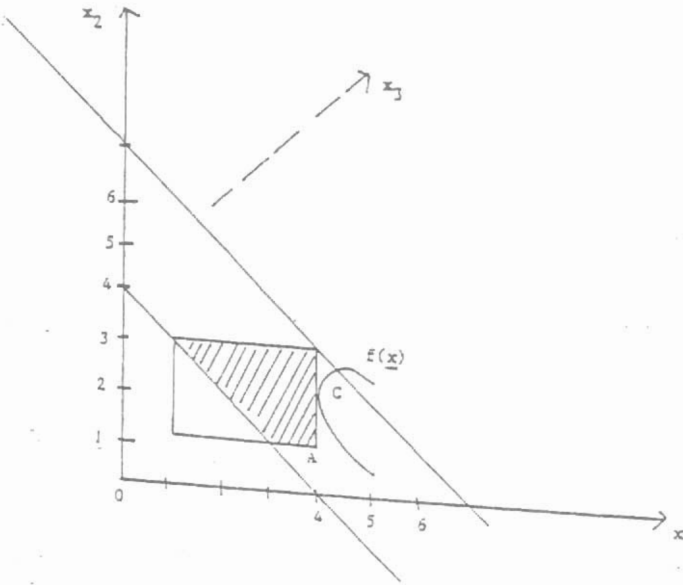
Saya ingin ucapkan syukur alhamdulillah ke hadrat Illahi kerana dengan limpah rahmatnya, saya disampaikan ilham ini sebaik saja saya memohon doa agar saya diberi ilham yang baik untuk kemajuan Matematik.

7. Rujukan

[1]G.B. Dantzig, Linear programming and extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[2]H.W. Kuhn and A.W. Tucker, *Nonlinear programming*, in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (ed. J. Neyman), University of California Press, Berkeley, 1951, pp481-492.

[3]H.S.Rio, *A new solution algorithm to economic dispatch with generation constraints*. Res. Rep. 6/89 Jabatan Matematik, Universiti Malaya.



Titik A: Optimum untuk masalah contoh dengan pengendalian klasik.

Titik C: Optimum yang diperolehi dengan graf dan juga dengan kaedah baru.

LAKARAN 1: PENYELESAIAN MASALAH CONTOH DENGAN GRAF