Matematika, 1991, Jilid 7, no. 1, hlm 63-74,


# Perluasan Kaedah Zubov Kepada Sistem Skalar Berubah Masa

oleh

Malik Hj. Abu Hassan
Jabatan Matematik
Universiti Pertanian Malaysia
Serdang, Selangor

Kata Kunci : Zubov, kestabilan, domain tarikan, Liapunov, tak berautonomi.

## ABSTRAK

Kaedah Zubov diperluaskan kepada sistem skalar berubah masa dan fungsi Liapunov dibina. Domain tarikan bagi sistem tersebut dikaji dan didapati penumpuan tak seragam juga berlaku dalam sistem tak berautonomi.

## 1. PENGENALAN

Kajian dan analisis telatah asimptot, kestabilan dan domain tarikan sistem tak berautonomi merupakan bidang yang penting dalam teori kestabilan yang belum banyak menerima perhatian. Grujic [1] mempersembahkan analisis pengaruh data awal ke atas telatah dinamik dan sifat kestabilan bagi sistem tak pegun dan mendapatkan hubungan daripadanya. Ramai pengarang seperti Kalman [2], Mandal [3], Newman [4] dan Puri [5] mengkaji sistem berubah masa yang stabil secara asimptot seluruhnya dan justeru itu domain kestabilan merupakan ruang menyeluruh.

Kita tahu bahawa untuk sistem berautonomi peringkat kedua

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad (1.1)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

persamaan Zubovnya ialah

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}f(x,y) + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}g(x,y) = -\phi(x,y)(1-eV(x,y)) \qquad (1.2)$$

yang berperingkat satu dengan $V(x,y)$ fungsi Liapunov, $\phi(x,y)$ fungsi tentu positif dan 'decrescent' dan e mengambil nilai 0 atau 1. Jika $e = 1$, persamaan (1.2) dikenali sebagai persamaan sekata Zubov manakala $e = 0$ memberi persamaan Zubov terubahsuai.

Sistem skalar berubah masa

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (1.3)$$

pula akan memberi persamaan Zubov peringkat pertama berbentuk

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}f(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\phi(x,t)(1-eV(x,t)) \tag{1.4}$$

Fungsi V(x,t) mengikut Zubov [6] mesti mempunyai sifat tentu positif dan 'decrescent' dalam rantau kestabilan jika $\phi(x,t)$ tentu positif dan 'decrescent'.

Persamaan Zubov (1.2) boleh diselesaikan secara analisis atau dalam bentuk siri tetapi dalam kebanyakan kes penyelesaian analisis tidak mungkin boleh dicari. Dalam beberapa kertas [7,8,9] telah ditunjukkan bahawa penyelesaian siri terpangkas hanya memberi sempadan kestabilan hampiran dan sempadan ini tidak mendekati sempadan sebenar secara berekanada dengan penokokan nombor hasil tambah separa N. Dalam kertas ini persamaan Zubov (1.4) disiasat dan diselesaikan dengan menggunakan teknik penyelesaian siri.

## 2. PENYELESAIAN SIRI

Katalah sistem skalar berubah masa (1.3) ditulis sebagai

$$\dot{x} = \sum_{l=1}^{mf} a_l(t)x^l \tag{2.1}$$

atau

$$\dot{x} = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_{mf} \tag{2.2}$$

dengan $f_1$ fungsi bagi x dan t dan berdarjah i dalam x.

Jadi, bolehlah ditulis

$$f_r = a_r(t)x^r, \qquad r = 1,2,\ldots,mf \tag{2.3}$$

Katalah fungsi $\phi(x,t)$ dalam (1.4) ditulis sebagai

$$\phi(x,t) = \sum_{l=2}^{m\phi} c_l(t)x^l \tag{2.4}$$

dengan $c_l(t)$ dianggap sebagai fungsi terbatas,

atau

$$\phi = \phi_2 + \phi_3 + \ldots + \phi_{m\phi} \tag{2.5}$$

dengan $\phi_l$ fungsi bagi x dan t dan berdarjah i dalam x. Maka

$$\phi_u = c_u(t)x^u , \qquad u = 2,3,\ldots,m\phi \tag{2.6}$$

Sekarang bina fungsi Liapunov $V(x,t)$ berbentuk

$$V(x,t) = \sum_{l=2}^{mv} b_l(t)x^l \tag{2.7}$$

dengan $b_l(t)$ fungsi terbatas,

atau

$$V = V_2 + V_3 + V_4 + \ldots. + V_{mv} \tag{2.8}$$

dengan $V_l$ fungsi bagi x dan t dan berdarjah i dalam x.

Maka

$$V_s = b_s(t)x^s \quad , \qquad s = 2,3,\ldots.,mv \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = sb_s(t)x^{s-1}, \qquad s = 2,3,\ldots.,mv \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} = \dot{b}_s(t)x^s \quad , \qquad s = 2,3,\ldots.,mv \tag{2.11}$$

dengan $\dot{b}_s(t) = \frac{db_s(t)}{dt}$ (2.12)

Gantikan (2.2), (2,5) dan (2.8) ke dalam (1.4) menjadi

$$\frac{\partial(V_2 + \ldots + V_{mv})}{\partial x}(f_1 + \ldots + f_{mf}) + \frac{\partial(V_2 + \ldots + V_{mv})}{\partial t}$$

$$= -(\phi_2 + \ldots + \phi_{m\phi})(1 - V_2 - \ldots - V_{mv}) \quad (2.13)$$

$$= -(\phi_2 + \ldots + \phi_{m\phi}) \quad (2.14)$$

dengan (2.13) persamaan sekata dan (2.14) persamaan terubahsuai.

Menyamakan sebutan berdarjah sama dalam x, diperoleh (untuk (2.14))

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t} = -\phi_2 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V_3}{\partial t} = -\phi_3 - \frac{\partial V_2}{\partial x} f_2 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V_4}{\partial t} = -\phi_4 - \frac{\partial V_2}{\partial x} f_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x} f_2 \quad (2.17)$$

dan seterusnya.

Justeru itu, umumnya

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t} &= -\phi_2 \\ \frac{\partial V_n}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V_n}{\partial t} &= -\phi_n - \sum_{l=2}^{n-1} f_l \frac{\partial V_{n-l+1}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (2.18)$$

untuk $n \geq 3$.

Daripada persamaan-persamaan di atas pekali $b_1(t)$ bagi fungsi Liapunov boleh dicari apabila $\phi$ diketahui. Jadi daripada (2.15), $b_2(t)$ dan bahagian kuadratik $V_2$ boleh dicari. Gantian $V_2$ ke dalam (2.16) membenarkan supaya $b_3(t)$ ditentukan dan dengan demikian $V_3$ diperoleh. Dengan menyambung proses ini sebutan darjah tertinggi $V_{mv}$ boleh diperoleh. Ini membolehkan kita membina fungsi Liapunov dengan kaedah siri dan justeru itu domain tarikan yang tepat boleh ditentukan jika penyelesaian bentuk tertutup diterbitkan daripadanya.

## 3. MASALAH YOSHIZAWA [10]

i) Pertimbangkan sistem skalar berubah masa

$$\dot{x} = -x + 2e^{-t}x^2 \qquad (3.1)$$

yang mempunyai kembangan siri kuasa menumpu dan keseimbangan bahagian linear sistem ini stabil secara asimptot dan justeru itu sistem (3.1) stabil secara asimptot. Sistem ini mempunyai penyelesaian

$$x(t,x_o,t_o) = \frac{1}{e^{-t} + \left(x_o^{-1} e^{-t_o} - e^{-2t_o}\right) e^{t}}$$

untuk $x_o$, $t_o$ yang diberi.

Penyelesaian ini mendekati sifar apabila $t \to +\infty$ dan ia tak terhingga pada

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{x_o e^{t_o}}{x_o e^{-t_o} - 1}$$

Domain tarikan bagi keseimbangan ialah

$$D_{t_o} : -\infty < x_o < e^{t_o}$$

Sekarang pilih $\phi = x^2$.

Menggunakan (2.9), (2.10), (2.11) dan (2.18), $b_2(t)$, $b_3(t),\ldots,b_{mv}(t)$ boleh dicari dan justeru itu $V_2$, $V_3,\ldots V_{mv}$ diperoleh. Sebutan V yang diperoleh ialah

$$V_2 = \frac{x^2}{2}$$

$$V_3 = \frac{1}{2} e^{-t} x^3$$

$$V_4 = \frac{1}{2} e^{-2t} x^4$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{1}{2} e^{-(n-2)t} x^n$$

Oleh yang demikian fungsi Liapunov menjadi

$$V = V_2 + V_3 + \ldots..$$

$$= \frac{x^2}{2} \left(1 + e^{-t}x + e^{-2t}x^2 + e^{-3t}x^3 + \ldots..\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-t}x\right)^n = \frac{x^2}{2}\left(1 - xe^{-t}\right)^{-1}$$

Jadi penyelesaian bentuk tertutup bagi persamaan Zubov diperoleh dan domain kestabilan asimptot atau domain tarikan diperoleh secara automatik sebagai $-\infty < x < e^t$, iaitu domain tarikan sebenar.

Penumpuan bagi penyelesaian siri ini dikaji mengikut hasiltambah separanya yang genap dan ganjil. Mula-mula pertimbangkan hasiltambah separanya yang genap dengan mengambil fungsi Liapunov berdarjah dua

$$V = V_2 = \frac{x^2}{2}$$

dengan $\dot{V} = -x^2 (1 - 2xe^{-t})$.

$\dot{V}$ tentu negatif untuk $-\infty < x < \frac{1}{2} e^t$.

Maka rantau kestabilan asimptot (RKA) $-\infty < x < \frac{1}{2}e^t$ terletak di dalam domain tarikan, D : $-\infty < x < e^t$. Dengan mengambil hasiltambah separa sebagai

$$V = V_2 + V_3 + V_4 = \frac{x^2}{2}\left(1 + xe^{-t} + x^2e^{-2t}\right).$$

diperoleh

$$\dot{V} = -x^2\left(1 - 4x^3e^{-3t}\right)$$

RKA nya $-\infty < x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} e^t$ lebih besar daripada

$-\infty < x < \frac{1}{2} e^t$ tetapi kecil daripada domain tarikan D.

Nyata apabila hasiltambah separanya yang genap ditokok, RKA akan membesar. Sempadan RKA akan menumpu kepada sempadan sebenar $x = e^t$ apabila n mendekati ketakterhinggaan.

Pertimbangkan pula hasiltambah separanya yang ganjil dengan mengambil

$$V = V_2 + V_3 = \frac{x^2}{2}\left(1 + xe^{-t}\right)$$

dan diperoleh

$$\dot{V} = -x^2\left(1 - 3x^2e^{-2t}\right)$$

dan $\dot{V}$ tentu negatif untuk $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} e^t$

Jadi RKA adalah $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} e^t$ yang terletak di dalam $|x| < e^t$.

Dengan menokok hasiltambah separanya kepada fungsi Liapunov berdarjah lima

$$V = V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = \frac{x^2}{2}\left(1 + xe^{-t} + x^2e^{-2t} + x^3e^{-3t}\right)$$

diperoleh

$$\dot{V} = -x^2\left(1 - 5x^4e^{-4t}\right)$$

RKA $|x| < \frac{1}{\sqrt[4]{5}} e^t$ lebih besar daripada $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} e^t$ dan terkandung dalam $|x| < e^t$.

Apabila hasiltambah separanya yang ganjil ditokok RKA akan menumpu kepada $|x| < e^t$ . Justeru itu daripada analisis di atas, RKA selalunya terkandung di dalam domain tarikan untuk sebarang hasiltambah separa. Jadi daripada penyelesaian siri, hasiltambah separa yang genap menumpu kepada domain kestabilan asimptot $-\infty < x < e^t$ dan hasiltambah separa yang ganjil menumpu kepada rantau penumpuan, $|x| < e^t$. Jelas tatacara siri ini juga mempunyai masalah penumpuan tak seragam bagi rantau kestabilan asimptot kepada domain tarikan seperti yang berlaku dalam sistem berautonomi.

ii) Sekarang pertimbangkan pula sistem yang mempunyai rantau kestabilan yang dibatasi oleh $|x| < e^{t}$. Sistem berubah masa

$$\dot{x} = -x + 2x^{3}e^{-2t} \tag{3.1}$$

yang mempunyai penyelesaian

$$x^{2}\left(t,x_{o},t_{o}\right) = \frac{1}{e^{-2t} + e^{2t}\left(x_{o}^{-2}e^{-2t_{o}} - e^{-4t_{o}}\right)}$$

untuk $x_{o},t_{o}$ sembarangan.

Penyelesaian ini mendekati sifar apabila $t \to +\infty$ dan ia tak terhingga pada

$$t = \frac{1}{4}\ln\frac{x_{o}^{2}\,e^{2t_{o}}}{x_{o}^{2}\,e^{-2t_{o}} - 1}$$

Domain tarikan bagi keseimbangan ialah $-e^{t_{o}} < x_{o} < e^{t_{o}}$ yang bersandar ke atas $t_{o}$. Penyelesaian siri yang diperoleh dengan menggunakan $\phi = x^{4}$ ialah

$$V = \frac{x^{4}}{4}\left(1 + e^{-2t}x^{2} + e^{-4t}\,x^{4} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{x^{4}}{4\left(1 - x^{2}e^{-2t}\right)}$$

Satu bentuk tertutup penyelesaian persamaan Zubov diperoleh dengan $|x| < e^{t}$ sebagai domain tarikan iaitu domain tarikan sebenar.

Dengan menggunakan $\phi = x^2\left(1 - x^2e^{-2t}\right)^{-1}$ penyelesaian siri Zubov diperoleh sebagai

$$V = \frac{x^2}{2}\left(1 + x^2e^{-2t} + x^4e^{-4t} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{x^2}{2\left(1 - x^2e^{-2t}\right)}$$

dan penyelesaian ini juga memberikan domain tarikan $|x| < e^t$.

## 4. KESIMPULAN

Teknik penyelesaian siri Zubov diperluaskan kepada sistem skalar berubah masa dan didapati bahawa masalah penumpuan tak seragam yang berlaku dalam sistem berautonomi juga berlaku kepada sistem tak berautonomi. Dengan menggunakan fungsi $\phi$ yang berlainan, domain tarikan yang sama juga boleh diperoleh. Daripada analisis di atas bolehlah disimpulkan bahawa RKA untuk sebarang hasiltambah separa selalunya terkandung dalam domain tarikan.

## RUJUKAN

[1] Lj. T. Grujic, Novel development of Liapunov stability of motion, I.J.C. No. 4, Vol. 22.(1975), 525-549.

[2] R.E. Kalman dan J.E. Bertram, Control system analysis and design via the second method of Liapunov, J. of Basic Eng.(1960), 371-393.

[3] A.K. Mandal, Liapunov function for a time-varying nonlinear system, I.E.E.E. Trans., AC-17(1972), 570-571.

[4] A.K. Newman, New Liapunov function for nonlinear time-varying systems, J. of Basic Eng.(1968), 208-212.

[5] N.N. Puri, On the global stability of a class of nonlinear time-varying systems, J. of Basic Eng.(1966), 399-407.

[6] V.I. Zubov, Methods of A.M. Liapunov and their application, Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1969.

[7] S.G. Margolis dan W.G. Vogt, Control Engineering Applications of V.I. Zubov's Construction Procedure for Liapunov functions, I.E.E.E. Trans., AC-8 (1963), 104-113.

[8] Y.N. Yu dan K. Vongsuriya, Nonlinear power system stability study by Liapunov function and Zubov's Method, I.E.E.E. Trans., PAS-86 (1967), 1480-1484.

[9] J.J. Rodden, Numerical application of Liapunov stability theory, J.A.C.C., Session IX, paper 2, Stanford University, California, 1964.

[10] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov Second Method, Mathematical Society of Japan, 1966.