Matematika, 1992, Jilid 8, bil. 2, hlm. 125-131


# SET SEMITERBBUKA DAN SEMITERTUTUP KABUR

OLEH
ABU OSMAN BIN MD TAP
IZZAH BTE ABDULLAH
ABD. RAZAK BIN SALLEH

Jabatan Matematik
Fakulti Sains Matematik & Komputer
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE
Malaysia.

**Abstrak.** Sifat semiterbuka dan semitertutup kabur dikaji untuk mengisi kekosongan yang belum diliputi oleh pengaji lain setakat ini. Selanjutnya titik semitumpukan kabur ditakrifkan dan sifatnya dikaji.

**Abstract.** The properties of fuzzy semiopen and semiclose sets are studied to fill in the gaps not covered by other authors. Furthermore, the fuzzy semicluster point is defined and its properties are studied.

## 1. PENDAHULUAN

Konsep set semiterbuka telah diperkenalkan oleh Levine [4] dan diperluaskan untuk ruang topologi kabur oleh Azad [1]. Semenjak itu banyak kajian telah dilakukan termasuk oleh Ganguly & Saha [3], Yalvac [6] dan lain-lain. Kertas ini akan cuba mengisi kekosongan yang belum diliputi oleh pengaji-pengaji tersebut dan pengaji-pengaji lain. Selanjutnya kita akan mentakrifkan pula titik semitumpukan kabur bagi set kabur dan melihat sifat-sifatnya.

## 2. Preliminari

Misalkan $X$ suatu set biasa. *Set kabur* $A$ dalam $X$ ialah pemetaan dari $X$ ke dalam [0,1], $A : X \to [0,1]$, dengan $A(x)$ mewakili gred keahlian set kabur $A$. Justeru itu *titik kabur* $x_\lambda$ ialah set kabur di dalam $X$ yang diberikan oleh

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{untuk } y = x \\ 0, & \text{untuk } y \neq x \end{cases}$$

dengan $\lambda \in (0,1]$ dan $y \in X$. Di sini $x$ dinamakan *sokongan* bagi $x_\lambda$. Kita katakan $x_\lambda \in A$ jika dan hanya jika $x_\lambda(y) \leq A(y) \forall y \in X$.

Bagi tujuan kertas ini kita ambil $(X, \tau)$ *ruang topologi* Chang [**2**] yang seringkali ditulis sebagai $X$ sahaja. Unsur $\tau$ dinamakan *set terbuka kabur*. Set kabur $A$ dalam $X$ dinamakan *set tertutup kabur* jika pelengkapnya, $A^p$, merupakan set terbuka kabur. Kita takrifkan *tutupan kabur* dan *pendalaman kabur* masing-masingnya seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{ttp}(A) &= \cap\{P | P \text{ tertutup kabur dan} A \subseteq P\} \\ &= \inf\{P | P \text{ tertutup kabur dan} A \subseteq P\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pdl}(A) &= \cup\{Q | Q \text{ terbuka kabur dan} Q \subseteq A\} \\ &= \sup\{Q | Q \text{ terbuka kabur dan} Q \subseteq A\} \end{aligned}$$

Perhatikan yang ttp$(A)$ merupakan set tertutup kabur terkecil yang mengandungi $A$ dan pdl$(A)$ merupakan set terbuka kabur terbesar yang terkandung dalam $A$.

## 3. Semiterbuka Dan Semitertutup Kabur

Konsep semiterbuka dan semitertutup kabur telah ditakrifkan dengan masing-masingnya menggunakan konsep tutupan kabur dan pedalaman kabur seperti berikut:

**3.1 TAKRIF.** Set kabur $A$ di dalam $X$ dinamakan

(1) *set semiterbuka kabur* jika wujud $B \in \tau$ dengan $B \subseteq A \subseteq \text{ttp}(B)$;

(2) *set semitertutup kabur* jika wujud set tertutup kabur $V$ dengan $\mathrm{pdl}(V) \subseteq A \subseteq V$.

Kita gunakan $\mathrm{SBK}(\tau)$ untuk melambangi pungutan semua set semiterbuka kabur bagi $X$ dan $\mathrm{STK}(\tau)$ untuk pungutan semua set tertutup kabur bagi $X$.

Perhatikan bahawa langsung daripada takrif, kita dapat hasil berikut (Azad 1981):

**3.2 TEOREM.**

(1) *Pelengkap bagi set semiterbuka kabur adalah set semitertutup kabur dan sebaliknya.*
(2) *Setiap set terbuka (tertutup) kabur adalah set semiterbuka (semitertutup) kabur.*
(3) *Kesatuan set semiterbuka kabur adalah juga semiterbuka kabur.*
(4) *Persilangan set semitertutup kabur adalah juga semitertutup kabur.*
(5) *Tutupan set terbuka kabur adalah set semiterbuka kabur.*
(6) *Pedalaman set tertutup kabur adalah set semitertutup kabur*

Sekarang kita lihat sifat berikut:

**3.3 TEOREM.** *Jika $A$ set semiterbuka kabur dan $B$ suatu set kabur dengan sifat $A \subseteq B \subseteq ttp(A)$, maka $B$ juga adalah set semiterbuka kabur.*

**Bukti.** Misalkan $A$ set semiterbuka kabur, maka wujud set terbuka kabur $U$ sehingga $U \subseteq A \subseteq \mathrm{ttp}(U)$. Oleh kerana $A \subseteq B \subseteq \mathrm{ttp}(A)$, maka $U \subseteq B$. Tetapi $\mathrm{ttp}(A) \subseteq \mathrm{ttp}(U)$ kerana $A \subseteq \mathrm{ttp}(U)$ dan $\mathrm{ttp}(U)$ merupakan set tertutup kabur. Jadi $B \subseteq \mathrm{ttp}(U)$. Oleh itu, kita dapat $U \subseteq B \subseteq \mathrm{ttp}(U)$, dan dengan itu $B$ adalah set semiterbuka kabur.

Dengan cara yang serupa, sebagai dualnya kita dapat hasil berikut:

**3.4 TEOREM.** *Jika $A$ set semitertutup kabur dan $B$ suatu set kabur dengan sifat pdl($A$) $\subseteq B \subseteq A$, maka $B$ juga adalah set semitertutup kabur.*

**3.5 TEOREM.** *Misalkan $A$ suatu set kabur dalam $X$. Maka yang berikut adalah setara:*

(1) *$A$ semiterbuka kabur.*
(2) *$A \subseteq ttp(pdl(A))$.*
(3) *$ttp(A) = ttp(pdl(A))$.*

**Bukti.** **(i) $\Rightarrow$ (ii).** Misalkan $A$ set semiterbuka kabur. Maka wujud set terbuka kabur $U \in \tau$ sehingga $U \subseteq A \subseteq \mathrm{ttp}(U)$. Oleh kerana $U$ terbuka kabur, maka $U \subseteq \mathrm{pdl}(A)$. Jadi $A \subseteq \mathrm{ttp}(U) \subseteq \mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$.
**(ii) $\Rightarrow$ (iii).** Misalkan $A \subseteq \mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$. Oleh kerana $\mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$ merupakan set tertutup kabur, maka $\mathrm{ttp}(A) \subseteq \mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$. Sebaliknya $\mathrm{tp}(\mathrm{pdl}(A)) \subseteq \mathrm{ttp}(A)$ kerana $\mathrm{pdl}(A) \subseteq A$. Jadi $\mathrm{ttp}(A) = \mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$.
**(iii) $\Rightarrow$ (i).** Misalkan (iii) berlaku. Perhatikan bahawa $\mathrm{pdl}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{ttp}(A) = \mathrm{ttp}(\mathrm{pdl}(A))$ dan $\mathrm{pdl}(A)$ merupakan set terbuka kabur. Dengan takrif, maka $A$ merupakan set semiterbuka kabur.

Konsep tutupan kabur dan pedalaman kabur boleh diperluaskan kepada semitutupan kabur dan semipedalaman kabur dengan menggunakan set semitertutup kabur dan set semiterbuka kabur seperti berikut (Ganguly & Saha 1986; Yalvac 1988);

**3.6 TAKRIF.** *Semitutupan kabur* bagi set kabur $B$ dalam $X$ ialah

$$\begin{aligned}\mathrm{sttp}(B) &= \cap\{P \mid P \,\text{set semitertutup kabur}, B \subseteq P\}\\ &= \inf\{P \mid P \,\text{set semitertutup kabur}, B \subseteq P\};\end{aligned}$$

dan

*semipedalaman kabur* bagi set kabur $B$ dalam $X$ ialah

$$\begin{aligned}\mathrm{spdl}(B) &= \cup\{Q \mid Q \,\text{set semiterbuka kabur}, Q \subseteq B\}\\ &= \sup\{Q \mid Q \,\text{set semiterbuka kabur}, Q \subseteq B\};\end{aligned}$$

Langsung daripada takrif di atas, kita dapat hasil berikut (Yalvac [**6**]);

**3.7 TEOREM.**

(1) *sttp(A)[spdl(A)] adalah set semitertutup [semiterbuka] kabur terkecil yang mengandungi [terbesar yang terkandung dalam] set A.*
(2) *set kabur A adalah set semiterbuka [semitertutup] kabur jika A=spdl(A) [A=sttp((A)].*
(3) $sttp[sttp(A)] = sttp(A)$.
(4) $A \subseteq B \Rightarrow sttp(A) \subseteq sttp(B)$.
(5) $A \subseteq B \Rightarrow spdl(A) \subseteq spdl(B)$.

Selanjutnya kita ingat dahulu takrif jiranan kabur.

**3.8 TAKRIF.** Set kabur $M$ dinamakan *jiranan kabur* bagi titik kabur $x_\beta$ jika wujud set terbuka kabur $A$ dengan $x_\beta \in A \subseteq M$.

Sekarang jika set terbuka digantikan dengan set semiterbuka, kita dapat pula konsep semijiranan kabur.

**3.9 TAKRIF.** Set kabur $N$ dinamakan *semijiranan kabur* bagi $x_\beta$ jika wujud set semiterbuka kabur $B$ dengan $x_\beta \in B \subseteq N$.

Perhatikan yang *setiap jiranan kabur adalah semijiranan kabur.*

Kita lihat yang set semiterbuka kabur boleh dicirikan dengan konsep semijiranan kabur.

**3.10 TEOREM.** *Jika $x_\beta \in sttp(A)$, maka setiap semijiranan kabur bagi $x_\beta$ mempunyai persilangan tak kosong dengan A.*

**Bukti:.** Misalkan $x_\beta \in \mathrm{sttp}(A)$ dan wujud semijiranan kabur $N$ bagi $x_\beta$ dengan $N \cap A = \phi$. Misalkan $B_X$ set semiterbuka kabur dengan sifat $x_\beta \in B_X \subseteq N$. Maka $B_X \cap A = \phi$. Jadi $A \subseteq (X \setminus B_X)$. Oleh kerana $X \setminus B_X$ merupakan set semitertutup kabur, maka $\mathrm{sttp}(A) \subseteq (X \setminus B_X)$. Ini tidak mungkin kerana $x_\beta \in \mathrm{sttp}(A)$ dan $x_\beta \in B_X$. Dengan itu setiap semijiranan kabur $N$ bagi $x_\beta$ mempunyai sifat $N \cap A \neq \phi$.

**3.11 TEOREM.** *A semiterbuka kabur jika dan hanya jika A adalah semijiranan kabur bagi setiap $x_\beta \in A$.*

**Bukti.** Misalkan $A$ semiterbuka kabur dan $x_\beta \in A$. Maka $A$ sendiri adalah semijiranan kabur bagi $x_\beta$. Sebaliknya misalkan $A$ adalah semijiranan kabur bagi setiap $x_\beta \in A$. Maka untuk $x_\beta$, wujud set semiterbuka kabur $B_X$ dengan $x_\beta \in B_X \subseteq A$. Oleh itu $A = \bigcup_{X \in A} x_\beta \subseteq \bigcup_{X \in A} B_X \subseteq A$. Jadi $A = \bigcup_{X \in A} B_X$ semiterbuka kabur.

Saha [5] telah mentakrifkan titik tumpuan kabur sebagai berikut:

**3.12 TAKRIF.** Suatu titik kabur $x_\beta$ dalam $X$ adalah *titik tumpukan kabur* bagi set kabur $A$ jika setiap jiranan kabur yang mengandungi titik kabur dengan sokongan yang sama seperti $x_\beta$ mempunyai persilangan tak kosong dengan $A$.

Sekarang kita akan takrifkan pula titik semitumpukan kabur

**3.13 TAKRIF.** Titik kabur $x_\beta$ dalam $X$ adalah *titik semitum-pukan kabur* bagi set kabur $A$ jika setiap semijiranan kabur yang mengandungi titik kabur dengan sokongan yang sama seperti $x_\beta$ mempunyai persilangan tak kosong dengan $A$.

Perhatikan yang setiap titik tumpukan kabur bagi set kabur $A$ adalah juga titik semitumpukan kabur bagi $A$.

**3.14 TEOREM.** *Set kabur $A$ adalah semitertutup jika dan hanya jika $A$ mengandungi semua titik semitumpukan kabur.*

**Bukti:.** Perhatikan yang $A$ semitertutup kabur jika $X \setminus A$ semiterbuka kabur. Mengikut teorem 3.11, ini setara dengan menyatakan yang setiap titik kabur bagi $X \setminus A$ mempunyai semijiranan kabur yang terkandung dalam $X \setminus A$. Ini pula setara dengan pernyataan bahawa tidak ada titik kabur dalam $X \setminus A$ yang merupakan titik semitumpukan kabur bagi $A$. Ini bermaksud bahawa $A$ mengandungi semua titik semitumpukan kabur.

**3.15 TAKRIF.** Set semua titik semitumpukan kabur bagi set kabur $A$ dinamakan sebagai *set semiditerbitkan* bagi $A$ dan dilambangkan dengan $A'_S$.

**3.16 TEOREM.** *Misalkan $A$ set kabur dalam $X$. Maka $sttp(A) = A \cup A'_S$.*

**Bukti.** Jelas dengan takrif bahawa $A \subseteq \mathrm{sttp}(A)$. Oleh kerana $\mathrm{sttp}(A)$ adalah set semitertutup kabur, maka mengikut Teorem 3.14 kita dapat $A'_S \subseteq \mathrm{sttp}(A)$. Oleh itu $(A \cup A'_S) \subseteq \mathrm{sttp}(A)$.

Sebaliknya misalkan $x_\beta \in \mathrm{sttp}(A)$. Maka menurut Teorem 3.10 sama ada $x_\beta \in A$ atau setiap jiranan kabur bagi titik kabur dengan sokongan yang sama seperti $x_\beta$ mempunyai titik persilangan tak kosong dengan $A$. Oleh itu $x_\beta \in A'_S$. Jadi, $\mathrm{sttp}(A) \subseteq (A \cup A'_S)$.

Sebagai natijah kepada Teorem 3.16 kita dapat hasil berikut:

**3.17 KOROLARI.** *Jika $A$ semitertutup kabur, maka $stp(A) = A$.*

**Bukti.** *Langsung daripada Teorem 3.14 dan Teorem 3.16.*

## RUJUKAN


[1]. K. K. Azad, *On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity*, J. Math. Anal. Appl. **82** (1981), 14-32.

[2]. C. L. Chang, *Fuzzy topological spaces*, J. Math. Anal. Appl. **24** (1968), 182-190.

[3]. S. Ganguly & S. Saha, *A note on semiopen sets in fuzzy topological spaces*, Fuzzy sets & systems **18** (1986), 83-96.

[4]. N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 36-41.

[5]. S. Saha, *Fuzzy $\delta$-continuity mapping*, J. Math. Anal. Appl. **126** (1987), 130-142.

[6]. T. H. Yalvac, *Semi-interior and semi-closure of a fuzzy set*, J. Math. Anal. Appl. **132** (1988), 356-364.