Matematika, 1993, Jilid 9, bil.1, hlm. 9-17

PERMUKAAN RIEMANN : S^2

OLEH
TAHIR BIN AHMAD

Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
Kampus Sekudai
Karung Berkunci 791
80990 Johor Bahru
Malaysia.

Abstrak. Kertas ini akan membuktikan bahawa sfera yang berjejari 1 unit dalam 3 matra merupakan sebuah permukaan Riemann.Pembuktian-pembuktian ini dirangka khas supaya mudah dengan penggunaan beberapa teorem yang asas dari Analisis Kompleks, Geometri Kerbezaan, Topologi dan juga koordinat sfera dan silinder. Pembuktian secara pembinaan dan percanggahan digunakan dalam makalah ini.

1. PENGENALAN

Secara amnya, suatu permukaan ialah merupakan suatu ruang topologi; suatu set yang biasa dengan topologi yang ditakrifkan. Walau bagaimanapun, permukaan Riemann ialah suatu permukaan yang memenuhi syarat-syarat berikut.

1.1 TAKRIF. Suatu permukaan Riemann S ialah suatu ruang topologi dengan famili fungsi $A = \{ \gamma_i : i \in I \}$ serta memenuhi syarat-syarat berikut:

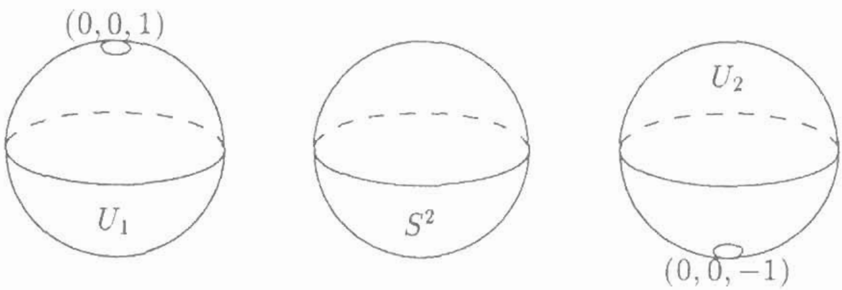
(1) S ialah ruang topologi Hausdorff yang terkait.
(2) Setiap γ_i ialah homeomorfisma dari domain U_i ke subset terbuka D_i pada C (satah kompleks).
(3) $\{ U_i : i \in I \}$ ialah tudung terbuka untuk S.
(4) Setiap fungsi transisi yang ditakrifkan adalah holomorfi.

2. Pembuktian Permukaan Riemann

Kita akan menggunakan takrif 1.1 untuk membuktikan S^2 ialah permukaan Riemann.

2.1 TEOREM. *$S^2 = \{ (x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ ialah permukaan Riemann.*

Bukti. Pertimbangkan $U_1 = S^2 - \{(0,0,1)\}$ dan $U_2 = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ serta dua fungsi yakni, $\gamma_1(x, y, z) = \dfrac{x+iy}{1-z}$ untuk U_1 dan $\gamma_2(x, y, z) = \dfrac{x-iy}{1+z}$ untuk U_2. Takrifkan set terbuka ν pada S^2 dalam bentuk $\nu = \theta \cap S^2$ dengan θ ialah set terbuka dalam $\Re^3$.



Rajah 1

Sekarang kita sudah bersedia untuk menunjukkan S^2 ialah permukaan Riemann.

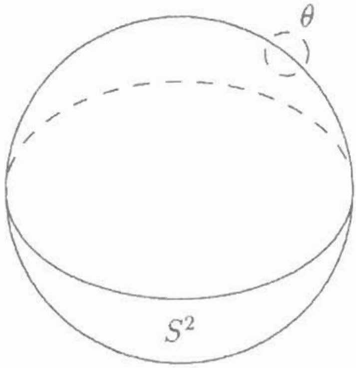
bukti : (Hausdorff).
Ambil $p_1, p_2 \in S^2$ dengan $p_1 \neq p_2$ serta $p_i = (x_i, y_i, z_i)$. Seterusnya , takrifkan jiranan p_i bagi $i = 1, 2$ sebagai

$$N(p_i, \varepsilon_i) = \{ p \in \Re^3 : \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon_i \}.$$

Biarkan

$$d(p_1, p_2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_3$$

ialah metrik ruang Euklidean $\Re^3$ yang biasa serta $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, 2, 3\}$.



Rajah 2

Takrifkan set terbuka V_i sebagai $V_i = N(p_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S^2$ bagi $i = 1, 2$. Tugas kita selanjutnya ialah untuk menunjukkan V_1 dan V_2 tidak bercantum. Katakanlah $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, maka dengan itu wujud $p_3 \in V_1 \cap V_2$. Menggunakan ketaksamaan segitiga,

$$\varepsilon_3 = d(p_1, p_2) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

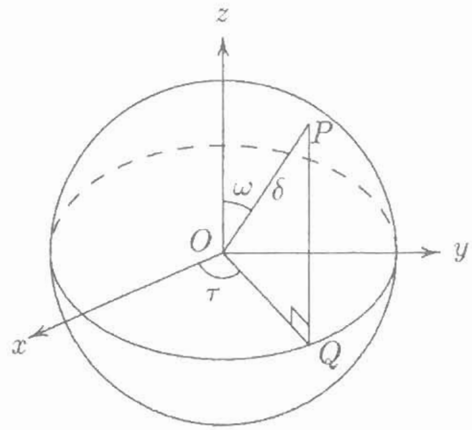
Sehubungan itu kita dapati $\varepsilon_3 < \varepsilon$ yakni suatu pencanggahan. Justeru itu $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ lantas S^2 ialah Hausdorff.

bukti : (terkait).
Kita memerlukan takrif dan teorem berikut untuk menunjukkan S^2 adalah terkait.

2.2 TAKRIF. Suatu ruang topologi X, ditulis sebagai (X, τ), dikatakan terkait secara lintasan jika setiap dua titik $p_1, p_2 \in X$ dapat disambungkan dengan suatu lintasan dalam ruang topologi tersebut.

2.3 TEOREM[5]. *Jika (X, τ) terkait secara lintasan, maka (X, τ) terkait.*

Kita akan menggunakan koordinat sfera untuk menunjukkan S^2 adalah terkait secara lintasan.



Rajah 3

Takrifkan komponen koordinat $P(\delta, \tau, \omega)$ dengan

$$\begin{aligned} \delta &= \text{jarak dari } P \text{ ke asalan} \\ \tau &= \text{sudut dari paksi}-x \text{ positif ke garis } OQ \\ \omega &= \text{sudut dari paksi}-z \text{ positif ke garis } OP \end{aligned} \qquad (2.1)$$

serta $\delta = 1, 0 \leq \tau \leq 2\pi$ dan $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Biarkan $P_a(1, \tau_a, \omega_a)$ dan $P_b(1, \tau_b, \omega_b)$ sebarang dua titik pada S^2. Takrifkan fungsi

$$f : [0,1] \longrightarrow \Re^3 \qquad (2.2)$$

dengan $f(n) = (1, (1-n)\tau_a + n\tau_b, (1-n)\omega_a + n\omega_b)$. Masalahnya sekarang untuk menunjukkan $f(n) \in S^2$. Dari rajah 3, kita dapat hubungan $r = \delta \sin\omega, \tau = \tau$ dan $z = \delta \text{kos}\,\omega$, tetapi kita juga ada hubungan $x = r \text{kos}\,\tau$ dan $y = r\sin\tau$. Justeru itu kita boleh tulis

$x = \delta \sin\omega \mathrm{kos}\,\tau, y = \delta \sin\omega \sin\tau$ dan $z = \delta \mathrm{kos}\,\omega$. Menggunakan takrifan $f(n)$, kita dapati

$$x = \sin[(1-n)\omega_a + n\omega_b]\mathrm{kos}\,[(1-n)\tau_a + n\tau_b]$$

$$y = \sin[(1-n)\omega_a + n\omega_b]\sin[(1-n)\tau_a + n\tau_b]$$

dan

$$z = \mathrm{kos}\,[(1-n)\omega_a + n\omega_b]. \tag{2.3}$$

Lihat, $f(n) \in S^2$ kerana

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \sin^2[(1-n)\omega_a + n\omega_b]\,\mathrm{kos}^2[(1-n)\tau_a + n\tau_b] + \\ &\qquad \sin^2[(1-n)\omega_a + n\omega_b]\sin^2[(1-n)\tau_a + n\tau_b] + \\ &\qquad\quad \mathrm{kos}^2[(1-n)\omega_a + n\omega_b] \\ &= \sin^2[(1-n)\omega_a + n\omega_b] + \mathrm{kos}^2[(1-n)\omega_a + n\omega_b] \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lantas S^2 adalah terkait apabila teorem 2.3 digunakan.

bukti : (U_i ialah domain untuk $i = 1, 2$).

U_i dinamakan domain jika ia terbuka dan terkait. Kita tahu bahawa $U_1 = S^2 - \{(0,0,1)\}$. Pilih $k \in U_1$. Jelas $k \neq (0,0,1)$ dan $d(k,(0,0,1)) = r$ dengan $r > 0$. Kemudian kita dapati $N(k,r) = \{p \in S^2 : d(k,p) < r\} \subset U_1$ kerana jika $(0,0,1) \in N(k,r)$ maka $d(k,(0,0,1)) < r$ dan ini adalah percanggahan. Justeru itu U_1 adalah terbuka.

Dengan cara yang sama seperti di atas, kita juga dapat tunjukkan bahawa $U_2 = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ adalah terbuka. Seterusnya kita ingin menunjukkan bahawa U_1 adalah terkait. Kita akan menggunakan langkah yang sama seperti pada S^2 tetapi dengan sedikit ubah suaian. Menggunakan (2.1) serta takrifkan $\delta = 1, 0 \leq \tau \leq 2\pi$ dan $0 < \omega < 2\pi$ supaya $P(\delta,\tau,\omega) \neq (0,0,1)$. Kemudian takrifkan semula

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\mathrm{dan}\, z \neq 1\}.$$

Seterusnya menggunakan (2.2) dan (2.3), kita dapat tunjukkan (2.4). Masalah kita cuma untuk menunjukkan $z \neq 1$. Katakanlah $z = 1$, maka kos$\{(1-n)\omega_a + n\omega_b\} = 1$. Ini membawa erti $(1-n)\omega_a + n\omega_b = \text{kos}^{-1}1 = 0, 2\pi$. Jika $(1-n)\omega_a + n\omega_b = 0$, maka $(1-n)\omega_a = -n\omega_b$. Tetapi $0 \leq n \leq 1 \Longrightarrow 1 \geq 1-n \geq 0$ atau dengan kata lain $1-n$ adalah sentiasa positif. Kita juga sedia maklum bahawa $(1-n)\omega_a = -n\omega_b$ jika dan hanya jika $\omega_a = \omega_b = 0$ dan ini adalah suatu percanggahan kerana $\omega_i > 0$ untuk $i = a, b$. Oleh yang demikian $(1-n)\omega_a + n\omega_b \neq 0, 2\pi$ kerana kos$0 =$ kos$2\pi = 1$. Justeru itu $f(n) \in U_1, \forall n \in [0,1]$ lantas U_1 adalah terkait.

Sekarang kita hendak menggunakan teorem yang berikut untuk menunjukkan U_2 adalah terkait.

2.4 TEOREM[4]. *Jika A adalah terkait dan $f : A \longrightarrow B$ adalah selanjar, maka $f(A)$ adalah terkait.*

Takrifkan $f : U_1 \longrightarrow U_2$ seperti di bawah,

$$f(x,y,z) = (x,y,-z) \qquad , \forall (x,y,z) \in U_1$$

yakni refleksif relatif terhadap satah-xy. Jelas f adalah selanjar lagi menyeluruh dan dengan menggunakan teorem di atas, $f(U_1) = U_2$ adalah terkait.

bukti : (homeomorfisma).
Di sinilah geometri kerbezaan akan menolong kita.

2.5 TAKRIF. Katalah $F : E^n \longrightarrow E^m$ ialah suatu pemetaan. Jika v ialah vektor tangen pada E^n di p, katakanlah $F_*(v)$ halaju awal lengkung $t \longrightarrow F(p+tv)$ pada E^m. Fungsi F_* dinamakan peta terbitan F.

2.6 TEOREM[3]. *Jika $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ialah pemetaan dari E^n ke E^m, maka*

$$F_*(U_j(p)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) U_i(F(p)), (1 \leq j \leq n)$$

dengan U_j *ialah tapak asli. Matrik Jakobian* F *pada* p *ialah* $\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(p)\right), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$

2.7 TEOREM[3]. *Jika* $F : E^n \longrightarrow E^m$ *ialah pemetaan dengan* F_{*p} *ialah satu ke satu pada suatu titik* p, *maka ada set terbuka* U *yang mengandungi* p *dengan penyekatan* F *ke* U *ialah diffeomorfisma* $U \longrightarrow V$ *keseluruh set terbuka* V.

Sekarang katakanlah bahawa

$$\begin{aligned}\gamma_1(x,y,z) &= \frac{x+iy}{1-z} = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)\\ &= \left(\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}\right) = \gamma_1'(x',y',z') \in C.\end{aligned}$$

tertakrif pada U_1. Justeru itu,

$$\begin{aligned}J(\gamma_1) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{1-z}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{1-z}) & \frac{\partial}{\partial z}(\frac{x}{1-z}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{1-z}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{1-z}) & \frac{\partial}{\partial z}(\frac{y}{1-z}) \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{bmatrix} =\\ J(\gamma_1') &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'}(\frac{x'}{1-z'}) & \frac{\partial}{\partial y'}(\frac{x'}{1-z'}) & \frac{\partial}{\partial z'}(\frac{x'}{1-z'}) \\ \frac{\partial}{\partial x'}(\frac{y'}{1-z'}) & \frac{\partial}{\partial y'}(\frac{y'}{1-z'}) & \frac{\partial}{\partial z'}(\frac{y'}{1-z'}) \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z'} & 0 & \frac{x'}{(1-z')^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z'} & \frac{y'}{(1-z')^2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dari komponen-komponen matrik Jakobian di atas, bolehlah dirumuskan bahawa

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z'} \Longrightarrow z = z'$$

Oleh itu,

$$\frac{x}{(1-z)^2} = \frac{x'}{(1-z')^2} \Longrightarrow x = x'$$

dan seterusnya,

$$\frac{y}{(1-z)^2} = \frac{y'}{(1-z')^2} \Longrightarrow y = y'.$$

Jika itulah keadaannya maka kita dapati bahawa γ_1 adalah satu ke satu, menggunakan Teorem 2.7 ia adalah homeomorfisma. Dengan langkah yang sama kita dapat tunjukkan γ_2 adalah homeomorfisma.

bukti : (julat terbuka).
Ingat $\gamma_i : U_i \longrightarrow D_i$ dengan $\gamma_i(x_i, y_i, x_i) = \frac{x_i + iy_i}{1-z_i} \in C$ untuk $i = 1, 2$. Jelas $D_i = C$ untuk $i = 1, 2$. Kita sedia maklum C adalah terbuka kerana untuk sebarang $p \in C$ dan untuk sebarang $r > 0, N(p; r) \subset C$ kerana setiap p berbentuk $a + ib$.

bukti : (tudung terbuka).
Kita sudah buktikan bahawa U_i adalah terbuka untuk $i = 1, 2$. Kita juga sedia maklum $\bigcup_{i=1}^{2} U_i = S^2$, lantas $\{U_i : i = 1, 2\}$ adalah tudung terbuka untuk S^2.

bukti : (holomorfi).
Takrifkan fungsi

$$t_{12} : \gamma_2(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \gamma_1(U_1 \cup U_2)$$

sebagai fungsi transisi dengan $t_{12} = \gamma_1\left(\gamma_2^{-1}\right)$. Kita dapat lihat bahawa

$$\gamma_1(x, y, z)\gamma_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = \frac{1 - z^2}{1 - z^2} = 1$$

memberikan kita $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma_2}$. Jelas t_{12} ialah pemetaan pada $C - \{0\}$ dengan $s \longrightarrow \frac{1}{s}$. Tetapi kita sedia maklum $s = a + ib$, lantas

$$t_{12}(s) = \gamma_2\left(\gamma_1^{-1}\right)(s) = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} = u + iv$$

serta holomorfi sekiranya ia memuaskan syarat Cauchy-Riemann. Lihat,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{b^2 - a^2}{(a^2 + b^2)^2}; \frac{\partial u}{\partial b} = \frac{-2ab}{(a^2 + b^2)^2}; \frac{\partial v}{\partial a} = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2};$$
$$\frac{\partial v}{\partial b} = \frac{b^2 - a^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Jelas,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b} \text{dan } \frac{\partial u}{\partial b} = \frac{-\partial v}{\partial a}.$$

Justeru itu t_{12} adalah holomorfi.

Rujukan

[1]. H. Anton, "Calculus with Analytic Geometry," John Wiley and Sons, 1980.

[2]. A.F. Beardon, "A Primer on Riemann Surfaces," Cambridge University Press, 1984.

[3]. B. O'Neill, "Elementary Differential Geometry," Academic Press, 1966.

[4]. J.E. Marsden, "Elementary Classical Analysis," W.H. Freeman, 1974.

[5]. A.O. Md Tap, "Topologi," Dewan Bahasa dan Pustaka, 1989.

[6]. B. Mendelson, "Introduction to Topology," Allyn dan Bacon Inc., 1962.

[7]. A.D. Wunsch, "Complex Variables and Applications," Addison-Wesley, 1983.