

SET BERSIFAT-Q DALAM RUANG TOPOLOGI

OLEH
ABU OSMAN BIN MD. TAP

Jabatan Matematik
Fakulti Sains Matematik & Komputer
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE
Malaysia.

Abstrak. Kertas ini mengkaji sifat-Q yang merupakan kekalisan tukar tertib pengoperasi tutupan dan pedalaman dalam ruang topologi. Sifat-Q dikekalkan di bawah pengoperasi peluaran, homeomorfisma dan hasil darab.

Abstract. This paper studies the property-Q in which the closure and the interior operators commute in the topological spaces. The property-Q is preserved under the exterior operator, homeomorphism and product.

1. PENGENALAN

Tutupan, pedalaman, peluaran dan pelengkap boleh dilihat sebagai pengoperasi (proses) dalam ruang topologi. Untuk kertas ini, kita lambangkan t untuk pengopersi tutupan, d untuk pengoperasi pedalaman, l untuk pengopersi peluaran, p untuk pengoperasi pelengkap dan s untuk pengoperasi sempadan.

Dilihat sebagai pengoperasi, kita selalu boleh melakukan tutupan diikuti dengan pedalaman dan sebaliknya melakukan pedalaman diikuti dengan tutupan. Namun demikian pengoperasi tutupan dan pedalaman tidak selalu kalis tukar tertib. Contohnya jika E adalah nombor nisbah dalam ruang nyata R dengan topologi piawai, maka $td(E) = \phi$ sedangkan $dt(E) = R$.

Levine [3] telah mengkaji set dalam ruang topologi yang tutupan dan pedalamannya kalis tukar tertib.

1.1. TAKRIF. Set A dalam ruang topologi X dikatakan *bersifat-Q* jika $td(A) = dt(A)$.

Untuk keperluan selanjutnya, kita perturunkan beberapa hasil yang telah diberikan dalam Levine [3]. Untuk tujuan kertas ini selanjutnya kita misalkan X ruang topologi dan A, B set dalam X , kecuali dinyatakan sebaliknya.

1.2. TEOREM.

- (1) A bersifat-Q jika dan hanya jika $p(A)$ bersifat-Q.
- (2) Jika A bersifat-Q, maka $t(A)$, $d(A)$ dan $s(A)$ bersifat-Q.
- (3) Jika A dan B bersifat-Q, maka $A \cap B$, $A \cup B$ dan $A \setminus B$ bersifat-Q.

2. BEBERAPA HASIL

Peluaran adalah satu lagi pengoperasi dalam ruang topologi yang tidak dipertimbangkan oleh Levine [3]. Oleh itu kita berikan hasil berikut.

2.1. TEOREM. Jika A bersifat-Q, maka $l(A)$ bersifat-Q.

Bukti. Perhatikan yang $l(A) = pt(A)$. Oleh kerana A bersifat-Q, maka dengan Teorem 1.2, $t(A)$ bersifat-Q dan $pt(A)$ bersifat-Q. Oleh itu $l(A)$ bersifat-Q.

2.2. TEOREM. Misalkan $f: X \rightarrow Y$ homeomorfisma yang memetakan ruang topologi X ke ruang topologi Y . Jika A bersifat-Q dalam X , maka $f(A)$ bersifat-Q dalam Y .

Bukti. Misalkan A bersifat-Q dalam X . Dengan sifat homeomorfisma, maka

$$\begin{aligned}
 dt(f(A)) &= d(f(t(A))) \\
 &= f(dt(A)) \\
 &= f(td(A)) \\
 &= t(f(d(A))) \\
 &= td(f(A)).
 \end{aligned}$$

Jadi $f(A)$ bersifat-Q dalam Y .

Catatan. Dengan kata lain, sifat-Q adalah sifat topologi, iaitu sifat yang dikekalkan dengan homeomorfisma. (Lihat Abu Osman [1]).

Satu lagi perluasan yang boleh dilakukan ialah dengan melihat sifat-Q dalam ruang topologi hasil darab.

2.3. TEOREM. *Jika A bersifat-Q dalam ruang topologi X dan B bersifat-Q dalam ruang topologi Y , maka $A \times B$ bersifat-Q dalam ruang topologi hasil darab $X \times Y$.*

Bukti. Perhatikan bahawa

$$\begin{aligned} dt(A \times B) &= d(t(A) \times t(B)) \\ &= dt(A) \times dt(B) \\ &= td(A) \times td(B) \\ &= t(d(A) \times d(B)) \\ &= td(A \times B). \end{aligned}$$

Oleh itu $A \times B$ bersifat-Q.

Chapman [2] telah membuktikan sifat berikut.

2.4. TEOREM. *A memenuhi sifat $td(A) = dt(A)$ jika hanya jika $dtd(A) = tdt(A)$.*

Sebagai natijahnya kita boleh simpulkan hasil berikut secara langsung.

2.5. KOROLARI. *A bersifat-Q jika dan hanya jika $dtd(A) = tdt(A)$.*

RUJUKAN

- [1]. Abu Osman bin Md. Tap, "Topologi," Dewan Bahasa dan Pustaka, 1989.
- [2]. T.A. Chapman, *A further note on closure and interior operators*, Amer. Maths. Monthly **69** (1962), 524-529.
- [3]. N. Levine, *On the commutativity of the closure and interior operators in topological spaces*, Amer. Maths. Monthly **68** (1961), 474-477.