Matematika, 1995, Jilid 11, bil. 2, hlm. 67–72

FAKTOR PENGENDURAN OPTIMUM MASALAH NILAI SEMPADAN BERKALA PERSAMAAN PEMBEZA SEPARA

MOHD IDRIS JAYES
Jabatan Statistik, Fakulti Sains Matematik
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia

Abstrak. Pendiskretan persamaan pembeza separa (PPS) eliptik swadampingan linear peringkat kedua tertakluk kepada syarat sempadan berkala menghasilkan satu sistem persamaan linear berbentuk $M\mathbf{u} = \mathbf{s}$, dengan M merupakan satu matriks segiempat sama tiga pepenjuru berkitar blok. Dalam Mohd Idris [1], hubungan antara jejari spektrum dan faktor pengenduran terlampau untuk masalah itu telah dirumuskan. Dalam kertas ini, percubaan berangka dilakukan untuk menunjukkan bahawa rumus pengenduran terlampau berturut-turut (PTB) piawai tidak boleh digunakan, walaupun faktor pengenduran optimum kedua-dua kes bertindan secara asimptotnya, iaitu apabila saiz masalah itu adalah besar. Proses pengoptimuman faktor pengenduran untuk masalah berkala juga diilustrasikan.

Katakunci. Faktor pengenduran optimum, matriks segiempat sama tiga pepenjuru berkitar, jejari spektrum, persamaan pembeza separa eliptik, syarat sempadan berkala.

Abstract. The discretization of the second-order lienar self-adjoint elliptic partial differential equation subject to periodic boundary conditions results in a system of linear equations of the form $M\mathbf{u} = \mathbf{s}$, where M is block cyclic tridiagonal square matrix. *In Mohd Idris[1] the relationship between the spectral radius and over-relaxation factor* of the problem has been derived. In this paper, numerical experiment is conducted to show that the standard SOR formula is not applicable, although the optimum relaxation factor of both cases coincide asymptotically, that is, when the size of the problem is large. The optimization process of the relaxation factor for the periodic problem is also illustrated.

Keywords. Optimum relaxation factor, cyclic tridiagonal square matrix, spectral radius, elliptic partial differential equation, periodic boundary conditions.

1 PENGENALAN

Pendiskretan persamaan pembeza separa (PPS) eliptik swadampingan linear peringkat kedua yang tertakluk kepada syarat sempadan berkala menghasilkan satu sistem persamaan linear berbentuk

$$M\mathbf{u} = \mathbf{s} \tag{1.1}$$

dengan M merupakan satu matriks segiempat sama tiga pepenjuru berkitar blok yang diberikan oleh

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & -A_{1,2} & & & & -A_{1,n} \\ -A_{2,1} & A_{2,2} & -A_{2,3} & & & \\ & . & . & . & 0 & \\ & . & . & . & . & \\ & 0 & . & . & . & \\ & & & -A_{n-1,n-2} & -A_{n-1,n-1} & -A_{n-1,n} \\ -A_{n,1} & & & & -A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (1.1a)$$

Dalam Mohd Idris[1], hubungan antara jejari spektrum dan faktor pengenduran terlampau untuk masalah itu telah dirumuskan. Hubungan tersebut boleh dituliskan dalam bentuk

$$[\Lambda^n - \Lambda^{n-1}\omega\sigma - \Lambda\omega\delta + \omega^2\sigma\delta] - [\omega^2\sigma\delta - \omega + 1] = 0 \quad (1.2)$$

dengan tata tanda seperti berikut:

$\Lambda = \lambda^{1/n}\zeta_j$, dengan $\zeta_j = e^{2\pi ij/n}$, dan $i = \sqrt{-1}$ untuk $0 \le j \le n-1$.

λ adalah nilai eigen matriks PTB dan ω adalah faktor pengenduran berlebihannya.

σ dan δ adalah unsur matriks lelaran Jacobi yang setara untuk titik, dan dalam kes kajian ini $\sigma = \delta$.

2 FAKTOR PENGENDURAN OPTIMUM

Dalam kertas ini, percubaan berangka dilakukan untuk menunjukkan bahawa rumus PTB piawai tidak boleh digunakan, walaupun faktor pengenduran(ω) yang optimum bagi kedua-dua kes bertindan secara asimptotnya, iaitu, apabila saiz masalah itu besar. Proses pengoptimuman faktor pengenduran untuk masalah berkala itu juga diilustrasikan.

Dalam menentukan ω yang optimum bersesuaian dengan (1.2), kita tuliskan

$$G_n(\Lambda) = \Lambda^n - \Lambda^{n-1}\omega\sigma - \Lambda\omega\delta + \omega^2\sigma\delta, \quad (2.1)$$

$$C_\omega = \omega^2\sigma\delta - \omega + 1 \quad (2.2)$$

Sekarang untuk (1.2) benar, kita harus dapati

$$G_n(\Lambda) = C_\omega, \quad (2.3)$$

untuk sebarang ω yang sesuai dengan (2.1) dan (2.2). Tetapi (2.2) adalah bebas daripada Λ, maka kita boleh tuliskan (1.2) sebagai

$$\Lambda^n - \Lambda^{n-1}\omega\sigma - \Lambda\omega\delta + \omega^2\sigma\delta = C_\omega, \quad (2.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} C_\omega &= \omega^2\sigma\delta - \omega + 1, \\ &= \sigma\delta\left\{\omega - \frac{1}{2\sigma\delta} + \frac{\sqrt{1-4\sigma\delta}}{2\sigma\delta}\right\}\left\{\omega - \frac{1}{2\sigma\delta} - \frac{\sqrt{1-4\sigma\delta}}{2\sigma\delta}\right\} \end{aligned}$$

Seterusnya, kita boleh tuliskan C_ω dalam bentuk

$$C_\omega = \sigma\delta\left\{\omega - \frac{2}{1+\sqrt{1-4\sigma\delta}}\right\}\left\{\omega - \frac{2}{1-\sqrt{1-4\sigma\delta}}\right\} \tag{2.5}$$

Perhatikan bahawa untuk sebarang ω yang menyesuaikan (2.1) dan (2.5), hubungan (2.4) adalah benar. Maka adalah perlu dan cukup untuk membincangkan magnitud C_ω dalam menentukan Λ optimum yang benar untuk (1.2). Perhatikan bahawa C_ω hanya ditentukan oleh ω dan bebas daripada Λ, kerana σ dan δ adalah pemalar. Sekarang $0 < \omega < 2$. Jika $\omega = 0$, maka $C_\omega = 1$ dan $\Lambda^n = 1$. Maka jelas yang Λ itu mempunyai punca satu berbilang n. Hasil berangkanya menegaskan kenyataan ini. Apabila ω beredar dari sifar menuju ke satu, $C_\omega = \omega^2\sigma\delta + (1-\omega)$ beredar dari satu menuju ke $\sigma\delta$ yang sentiasa positif tetapi kurang daripada satu sebab $0 < \sigma, \delta < 1/2$. Tetapi sekarang apabila ω beredar menjauhi satu menuju ke dua, $C_\omega = \omega^2\sigma\delta + (1-\omega)$ dikuasai oleh tanda bagi $1-\omega$. Oleh itu, C_ω akan pada mulanya positif selagi $1-\omega > 0$. Kemudian di $\omega = \omega_{opt}$, $C_{\omega_{opt}} = 0$ dan kekal negatif untuk $\omega > \omega_{opt}$, di mana pada $\omega = 2$, $C_\omega = 4\sigma\delta - 1 < 0$ sebab $0 < \sigma, \delta < 1/2$.

Dalam Rajah 2.1 yang berikutnya, strategi pengoptimuman ada diilustrasikan. Graf itu menggambarkan punca polinomial cirian yang diberikan oleh (2.4) untuk nilai C_ω yang berlainan apabila ω beredar dari sifar ke dua. Dalam Rajah 2.1a apabila $\omega = 0$ dan $C_\omega = 1$, kesemua nilai eigen adalah satu. Apabila ω meningkat dari sifar tetapi C_ω berkurang dari satu, terdapat beberapa nilai eigen yang menjadi kompleks, seperti dalam rajah 2.1b hingga Rajah 2.1d. Apabila ω meningkat selanjutnya, lebih banyak lagi nilai eigen menjadi kompleks sehingga akhirnya kesemua nilai eigen terletak di bulatan dengan jejari $|\lambda_{opt}|$ pada $\omega = \omega_{opt}$ seperti dalam Rajah 2.1e dengan $|\lambda_{opt}|$ adalah yang minimum bagi nilai maksimum modulus nilai eigen yang kurang dari satu. Pada titik ini, nilai $C_{\omega_{opt}}$ adalah sifar. Untuk nilai ω yang melewati ω_{opt}, C_ω akan beredar menjauhi sifar dan modulus nilai eigen akan meningkat seperti ditunjukkan dalam Rajah 2.1f dan Rajah 2.1g.

Dengan itu, nilai optimum Λ adalah diperolehi apabila $C_\omega = 0$. Maka parameter pengenduran optimum ω_{opt} dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan

$$\omega^2\sigma\delta + 1 - \omega = 0. \tag{2.6}$$

Katakan ω_{opt} sebagai penyelesaian (2.6), maka kita dapati

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4\sigma\delta}} \tag{2.7}$$

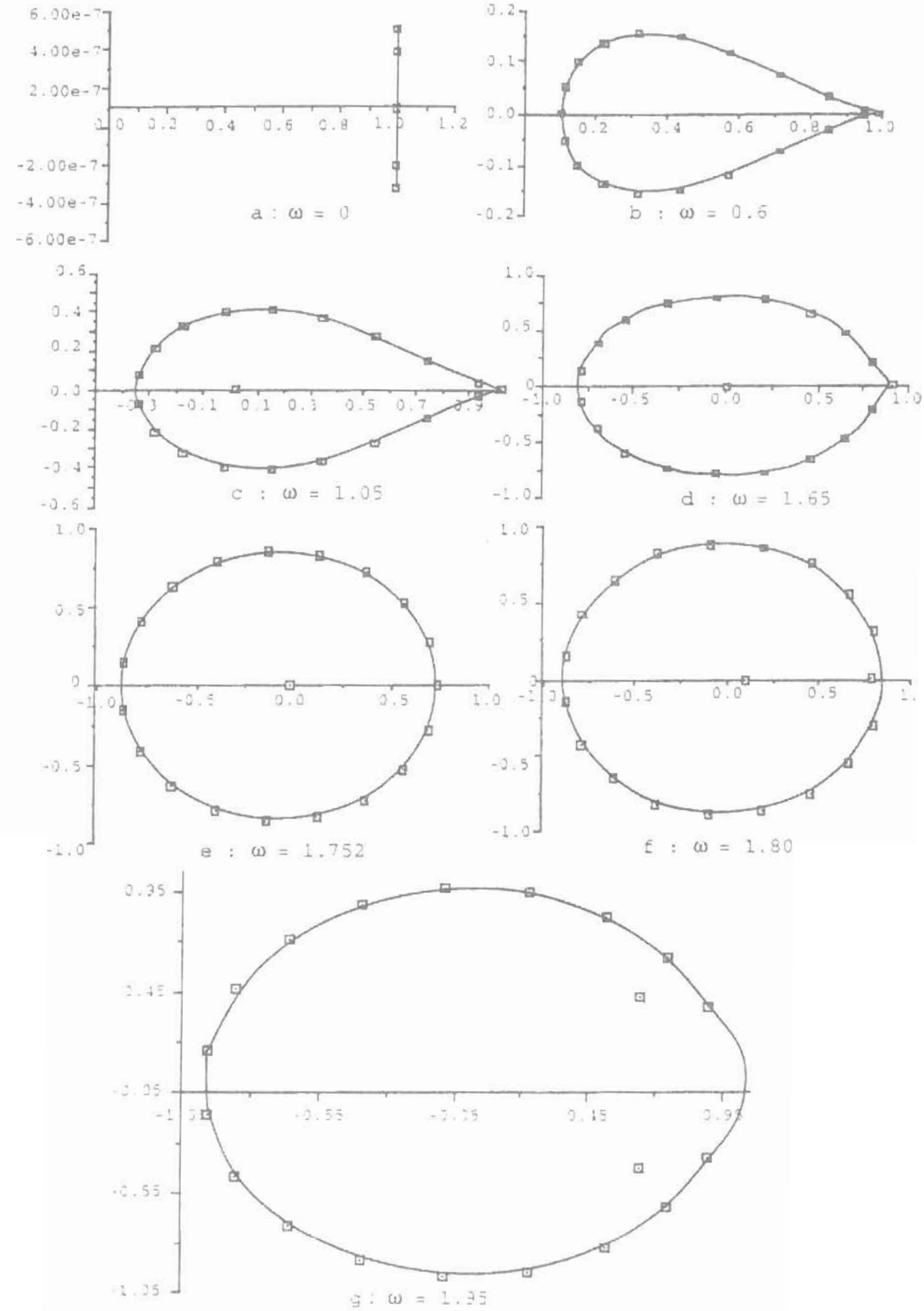
kerana punca yang lainnya

$$\frac{2}{1-\sqrt{1-4\sigma\delta}} > 2 \quad \text{untuk} \quad 0 < \sigma, \delta < \frac{1}{2}.$$

Begitu juga, jika σ dan δ berlainan tanda, kita boleh dengan mudah tunjukkan bahawa (2.7) masih lagi sah. Maka faktor pengenduran optimum diberikan oleh (2.7).

Akhirnya, jejari spektrum λ_{opt} dapat diterbitkan dengan mudah dari (2.4) dengan penggantian $C_\omega = 0$, iaitu,

$$\{\Lambda^{n-1} - \omega\delta\}\{\Lambda - \omega\delta\} = 0 \tag{2.8}$$



Rajah 2.1 Proses pengoptimuman untuk faktor pengenduran bagi masalah eliptik berkala.

Maka kita dapatkan penyelesaian persamaan (2.8) sebagai

$$\Lambda = [\omega\sigma]^{1/(n-1)} \quad \text{atau} \quad \Lambda = \omega\delta.$$

Oleh kerana $\Lambda = \lambda^{1/n}$ maka kita dapati bahawa

$$\lambda = [\omega\delta]^{n/(n-1)} \quad \text{atau} \quad \lambda = [\omega\delta]^n.$$

Sekarang untuk M simetri dan kedua-dua $|\sigma|$, $|\delta| < 1/2$, supaya

$$[\omega\delta]^n < [\omega\delta]^{n/(n-1)},$$

maka jejari spektrum optimum λ_{opt}, diberikan oleh

$$\lambda_{opt} = [\omega\rho]^{n/(n-1)}, \tag{2.9}$$

dengan $|\sigma| = |\delta| = \rho$.

Dengan itu kita perhatikan bahawa untuk masalah berkala, rumus PTB yang piawai tidak boleh digunakan, walaupun faktor pengenduran optimum kedua-dua kes bertindan secara asimptotnya apabila saiz matriks itu besar. Fenomena ini diilustrasikan dalam hasil berangka yang dipaparkan dalam bahagian berangka berikutnya.

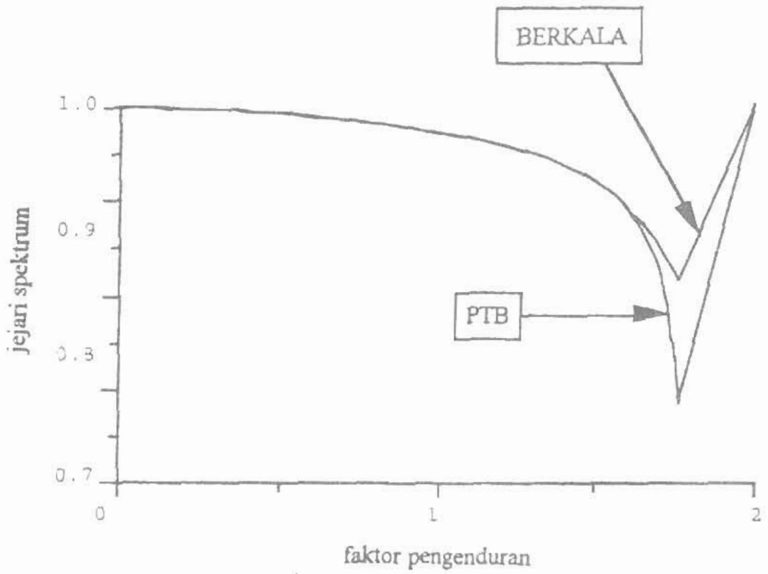
3 KEPUTUSAN BERANGKA

Dalam percubaan ini, kita telah gunakan persamaan Laplace dengan syarat sempadan Dirichlet (untuk kaedah PTB) dan dengan syarat sempadan berkala (untuk pengesahan hasil teori yang diterbitkan dalam bahagian sebelum ini).

Jadual 3.1

Unsur Matriks α	Parameter Pengenduran ω	Bilangan Lelaran	Nilai Jejari Spektrum Berkala	Nilai Jejari Spektrum PTB
.10	1.01021	5	.10102E+00	.10205E−01
.15	1.02357	6	.15354E+00	.23573E−01
.20	1.04356	7	.20871E+00	.43561E−01
.25	1.07180	9	.26795E+00	.71797E−01
.30	1.11111	11	.33333E+00	.11111E+00
.35	1.16676	13	.40837E+00	.16676E+00
.40	1.25000	17	.50000E+00	.25000E+00
.42	1.29652	20	.54454E+00	.29652E+00
.44	1.35596	23	.59662E+00	.35596E+00
.45	1.39286	26	.62679E+00	.39286E+00
.48	1.56250	42	.75000E+00	.56250E+00
.49	1.66806	60	.81735E+00	.66806E+00
.499	1.88109	192	.93866E+00	.88109E+00

Dalam Jadual 3.1 kita bentangkan perbandingan nilai jejari spektrum untuk masalah berkala dan jejari spektrum bagi kaedah PTB piawai untuk beberapa matriks yang berlainan unsur α. Saiz matriks yang digunakan adalah 20 dan matriks itu adalah simetri.



Rajah 3.1 Jejari spektrum berbanding faktor pengenduran untuk masalah PTB dan berkala.

Rajah 3.1 menunjukkan plot graf jejari spektrum lawan faktor pengenduran bagi kedua-dua kes masalah berkala dan masalah PTB. Adalah didapati bahawa walaupun secara asimptotnya kedua-dua kes mempunyai faktor pengenduran optimum yang bertindan tetapi jejari spektrum masing-masing adalah berbeza.

4 KESIMPULAN

Tinjauan ke atas kaedah lelaran dalam menyelesaikan masalah nilai sempadan eliptik berkala menunjukkan bahawa parameter optimum PTB piawai tidak boleh digunakan untuk masalah itu. Sebaliknya, kita telah terbitkan satu rumus lain untuk parameter optimum dan seterusnya membuat aruhan terhadap kadar penumpuan kaedah untuk masalah berkala yang dibincangkan itu. Percubaan berangka menyokong hujah tersebut di atas. Hasil yang diperolehi mengesahkan bahawa kaedah PTB piawai tidak boleh digunakan untuk kes berkala. Ini dijelaskan dalam Rajah 3.1 yang menunjukkan bahawa rumus PTB piawai tidak boleh digunakan, walaupun secara simptotnya faktor pengenduran optimum kedua-dua kes itu bertindan, iaitu apabila saiz matriks masalah itu membesar tak terhingga. Hasil ini selaras dengan teori yang dirumuskan.

RUJUKAN

[1] Mohd Idris Jayes, *Hubungan Di antara Jejari Spektrum dan Faktor Pengenduran Berlebihan untuk Masalah Nilai Sempadan Berkala dalam Persamaan Pembeza Separa Eliptik*, diserah kepada Jurnal Sains Malaysiana (1995).

[2] D.M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, New York, 1971.