Matematika, 1998, Jilid 14, hlm. 7–16


# Analisis Pengusikan ke Atas Rumus Kemaskini Quasi–Newton Pangkat-Dua Yang Simetri Dan Tentu Positif

**Malik Hj. Abu Hassan, Mansor b. Monsi & Leong Wah June**
Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Putra Malaysia
43400 UPM, Serdang,Selangor,
Malaysia

**Abstrak** Pengusikan ke atas hampiran matriks songsangan Hessian berpangkat-dua yang simetri dan tentu positif dipertimbangkan. Kita usik setiap komponen dalam matriks tersebut dengan suatu skalar nyata. Kita mula dengan analisis secara teliti untuk mendapatkan batas pengusikan norma demi norma yang membawa kepada matriks nombor syarat terturun dan tentu positif. Contoh berangka dikemukakan untuk mengkaji kesan pengusikan tersebut.

**Katakunci** Hampiran songsangan Hessian pangkat-dua yang simetri dan tentu positif, batas-batas pengusikan norma demi norma.

***Abstract*** *Perturbation to a symmetric positive definite of the rank-two approximate inverse Hessian matrix is considered. We perturb every component in the considered matrix by a real scalar. We begin the work by giving a thorough analysis to abtain the normwise perturbation bounds that lead to a reduced condition number and positive definite matrix. Numerical examples are presented to study the effect of our perturbation.*

***Keywords*** *Symmetric positive definite rank-two approximate inverse Hessian, normwise perturbation bounds.*

## 1 Pengenalan

Kebanyakan kaedah yang cekap untuk peminimuman setempat bagi fungsi tak linear, $f = f(x), x \in R^n$, yang mempunyai terbitan selanjar $g = \nabla f(x)$, adalah berdasarkan lelaran

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k H_k g_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

dengan $\lambda_k$ suatu skalar yang dipanggil panjang langkah dan dipilih sedemikian hingga

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k), \tag{2}$$

$H_k$ adalah suatu matriks yang mencirikan kaedah tersebut dengan $x_1$ dan $H_1$ masing-masing merupakan anggaran permulaan bagi titik minimum $x^*$ dan songsangan Hessian yang diberi.

Khususnya, kita tumpu perhatian ke atas suatu kelas algoritma yang dikenali sebagai kaedah quasi-Newton atau kaedah metrik berubah. Ide utama di sebalik kaedah quasi-Newton atau kaedah metrik berubah ialah membina suatu penghampiran kepada $n \times n$ matriks songsangan Hessian, $H_k$ dengan menggunakan maklumat yang terkumpul sepanjang langkah peminimuman. Untuk tujuan ringkasan tatatanda, kita tinggalkan semua indeks $k$ dan ganti indeks $k+1$ dengan tanda calit di semua bahagian dalam kertas ini. Sekarang, kita perkenalkan vektor

$$\begin{aligned} \delta &= x' - x \\ \gamma &= g' - g, \end{aligned} \tag{3}$$

dan skalar

$$\begin{aligned} \sigma &= \delta^T \gamma, \\ \tau &= \gamma^T H \gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

Kita andaikan bahawa matriks yang dijana oleh lelaran baru diberi oleh hubungan berbentuk

$$H' = H'(H, \delta, \gamma, r) \tag{5}$$

dengan $r$ suatu parameter and $H'$ dipilih supaya memenuhi persamaan quasi–Newton

$$H'\gamma = \delta \tag{6}$$

Sistem (6) sahaja tidak dapat mentakrifkan $H'$ secara unik, maka syarat tambahan mesti dikenakan. Perhatikan bahawa hubungan (5) boleh diungkap dalam bentuk

$$H' = H + D(H, \delta, \gamma, r) \tag{7}$$

Untuk tujuan kertas ini, kita menghadkan perbincangan ke atas suatu subkelas yang akan dipertimbang dalam bahagian seterusnya.

## 2 Kaedah Metrik Berubah Huang-Oren

Suatu matriks pembetulan simetri berpangkat-dua boleh ditulis sebagai

$$H' = H + \phi_1 rr^T + \phi_2 ss^T + \phi_3(rs^T + sr^T), \tag{8}$$

dengan $r$ dan $s$ adalah matriks $n \times 1$. Suatu keputusan dari Brodlie, Gourlay and Greenstadt [3] mengimplikasikan bahawa pembetulan tersebut boleh diungkap dalam *bentuk kanonik*

$$H' = H + \varphi_1 aa^T + \varphi_2 bb^T, \quad \varphi_1\varphi_2 = \pm 1, \quad \varphi_1 = \pm 1, \tag{9}$$

dengan $a$ dan $b$ sebarang matriks $n \times 1$. Suatu kelas dua-parameter bagi rumus kemaskini berbentuk (8) dan (9) telah diperkenalkan masing-masing oleh Huang [6] dan Oren [7] dengan rumus-rumus tersebut dibezakan dengan pilihan parameter skala yang berlainan. Rumus berikut dengan parameter $\rho$ dan $\theta$ telah diperkenalkan oleh Huang [6].

$$H' = H + \frac{\rho\sigma + \theta\tau}{\sigma^2}\delta\delta^T + \frac{\theta - 1}{\tau}H\gamma\gamma^T H - \frac{\theta}{\sigma}(\delta\gamma^T H + H\gamma\delta^T) \tag{10}$$

dengan $\delta, \gamma, \sigma$ dan $\tau$ ditakrifkan seperti dalam (3) dan (4) manakala rumus yang setara dengan parameter $\eta$ dan $\theta$ diperkenalkan oleh Oren [7].

$$H' = \eta H + \frac{\sigma + \eta\theta\tau}{\sigma^2}\delta\delta^T + \frac{\eta(\theta - 1)}{\tau}H\gamma\gamma^T H - \frac{\eta\theta}{\sigma}(\delta\gamma^T H + H\gamma\delta^T) \tag{11}$$

Jika kita takrif

$$\varepsilon = \lambda^2 g^T H g \tag{12}$$

dan

$$\theta^* = -\sigma^2/(\varepsilon\tau - \sigma^2), \tag{13}$$

maka $H'$ adalah tentu positif apabila $H$ adalah tentu positif jika dan hanya jika

$$\sigma > 0, \quad \eta > 0, \quad \theta > \theta^*. \tag{14}$$

Rumus kemaskini (10) dan (11) adalah sekena hanya pada $\rho = \eta = 1$, iaitu rumus-rumus tersebut diturunkan kepada suatu kelas yang diperkenalkan oleh Broyden [1], dikenali rumus kemaskini parameter tunggal berpangkat-dua.

# 3 Analisis Pengusikan bagi Matriks Hampiran Songsangan Hessian yang Simetri, Tentu Positif dan Berpangkat-Dua.

Pada lelaran ke-$k$, kita usik setiap komponen dalam matriks hampiran songsangan Hessian dengan suatu skalar nyata, $\omega$, dan biarkan

$$H^* = H + \Delta H \tag{15}$$

sebagai hampiran baru bagi songsangan Hessian pada lelaran ke-$k$ dan $\Delta H$ adalah matriks pengusikan. Misalkan

$$e = (1, 1, \ldots, 1)^T, \tag{16}$$

maka (15) boleh dinyatakan dalam bentuk

$$H^* = H + \omega e e^T \tag{17}$$

Suatu hubungan yang berguna ialah hasil tambah unsur-unsur pepenjuru bagi sebarang matriks segiempat sama, A (dipanggil surih $A$) adalah sama dengan hasil tambah nilai eigen:

$$\text{surih}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \tag{18}$$

$\xi_i$ nilai eigen bagi $A$.

Manakala hasildarab untuk semua nilai eigen adalah sama dengan penentu bagi A:

$$\text{pen}(A) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i \tag{19}$$

Dengan itu, kita boleh mempertimbangkan beberapa batas kepada pekali pengusikan terhadap bebebrapa masalah persyaratan seperti masalah ketaksingularan, pengekalan sifat tentu positif dan masalah pengawalan nombor syarat.

## 3.1 Batas Pengusikan untuk Mempastikan Sifat Tentu Positif dan Ketaksingularan

Rumus untuk penentu bagi matriks pembetulan pangkat-satu yang bukan singular $H$:

$$\text{pen}(H^*) = \text{pen}(H + \omega ee^T) = \text{pen}(H)(1 + \omega e^T H^{-1} e). \tag{20}$$

**Lema 1** *Andaikan $H$ tentu positif maka $H^* = H + \omega ee^T$ tentu positif bagi $\omega \geq 0$. Jika $\omega < 0$, $H^*$ adalah tentu positif jika dan hanya jika $(1 + \omega e^T H^{-1} e) > 0$.*

Bukti untuk lema ini adalah jelas dan mudah dengan mengambilkira bahawa kepositifan adalah setara dengan semua nilai eigen yang positif dan juga penentu adalah hasildarab bagi semua nilai eigen. Dalam kes pertama, pembetulan ke atas $H$ tidak mungkin boleh mengurangkan nilai eigen, manakala dalam kes kedua, untuk mengekalkan sifat tentu positif, adalah perlu dan cukup jika penambahan pembetulan tidak memberi satu pun nilai eigen yang negatif dan ini dijamin oleh syarat yang diberi. (Perhatikan daripada lema saling mengunci nilai eigen, suatu perubahan berbentuk matriks simetri pangkat-satu ke atas suatu matriks tentu positif hanya boleh menyebabkan setinggi-tinggi satu nilai eigen menjadi negatif).

Juga oleh kerana $H^*$ adalah singular hanya pada $\text{pen}(H^*) = 0$, maka $H^*$ adalah tentu positif dan bukan singular apabila

$$\omega > -1/e^T H^{-1} e. \tag{21}$$

## 3.2 Batas Pengusikan dalam norma Surih untuk Nombor Syarat yang Lebih Baik

**Takrif 1** *Nombor syarat bagi suatu matriks $n \times n$, $A$ ditakrif sebagai*

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|. \tag{22}$$

Untuk sebarang matriks tentu positif, *surih* baginya juga merupakan norma dan kita boleh takrifkan nombor syaratnya sebagai

$$\kappa_T(A) = \text{Sur}(A)\text{Sur}(A^{-1}). \tag{23}$$

Sekarang, kita pertimbangkan masalah pengawalan nombor syarat untuk $H^*$, suatu kuantiti yang boleh memberi kesan ke atas pertumbuhan ralat pembundaran dalam norma *surih*. Nombor syarat bagi $H^*$ dalam norma surih diberi oleh

$$\kappa_T(H^*) = \text{Sur}(H^*)\text{Sur}(H^{*-1}) \tag{24}$$

atau

$$\kappa_T(H^*) = \mathrm{Sur}(H + \omega ee^T)\mathrm{Sur}((H + \omega ee^T)^{-1}). \tag{25}$$

Dengan menggunakan rumus Sherman-Morrison,

$$(H + \omega ee^T)^{-1} = H^{-1} - \omega \frac{H^{-1}ee^T H^{-1}}{1 + \omega e^T H^{-1} e}. \tag{26}$$

Daripada (26), kita dapat

$$\kappa_T(H^*) = \mathrm{Sur}(H + \omega ee^T)\mathrm{Sur}(H^{-1} - \omega \frac{H^{-1}ee^T H^{-1}}{1 + \omega e^T H^{-1} e}) \tag{27}$$

atau

$$\kappa_T(H^*) = [\mathrm{Sur}(H) + \omega \mathrm{Sur}(ee^T)][\mathrm{Sur}(H^{-1}) - \omega \frac{\mathrm{Sur}(H^{-1}ee^T H^{-1})}{1 + \omega e^T H^{-1} e}] \tag{28}$$

Oleh kerana $\mathrm{Sur}(ee^T) = n$ dan untuk tujuan tatatanda yang lebih ringkas, kita perkenalkan

$$a = \mathrm{Sur}(H), b = \mathrm{Sur}(H^{-1}), c = \mathrm{Sur}(H^{-1}ee^T H^{-1}) \text{ dan } d = e^T H^{-1} e. \tag{29}$$

Maka (28) boleh dinyatakan sebagai

$$\kappa_T(H^*) = \kappa_T(H) - \frac{\omega ac}{1 + \omega d} + \omega nb - \frac{\omega^2 nc}{1 + \omega d} \tag{30}$$

Untuk mendapat batas $\omega$ sedemikian hingga

$$\kappa_T(H^*) \leq \kappa_T(H), \tag{31}$$

kita selesaikan ketaksamaan

$$-\frac{\omega ac}{1 + \omega d} + \omega nb - \frac{\omega^2 nc}{1 + \omega d} \leq 0 \tag{32}$$

untuk $\omega$.

Daripada bahagian 3.1, kita memperolehi $1 + \omega d > 0$; maka menyelesaikan (32) memberi

*Kes 1.* Jika $\dfrac{ac - nb}{(bd - c)n} > 0$,

$$0 \leq \omega \leq \frac{ac - nb}{(bd - c)n}. \tag{33}$$

*Kes 2.* Jika $\dfrac{ac - nb}{(bd - c)n} < 0$,

$$\frac{ac - nb}{(bd - c)n} \leq \omega \leq 0. \tag{34}$$

Gabungan (33) dan (34) memberi

$$\min\left(\frac{ac - nb}{(bd - c)n}, 0\right) \leq \omega \leq \mathrm{maks}\left(\frac{ac - nb}{(bd - c)n}, 0\right) \tag{35}$$

**Korolari 1** *Biar $a$, $b$, $c$, dan $d$ ditakrif seperti (29) dan juga biarkan $H$ dan $H^{-1}$ matriks $n \times n$ masing-masing mewakili hampiran kepada Hessian dan songsangan Hessian. Maka jika (35) dipenuhi, $H^*$ adalah tentu positif dan lebih baik syaratnya daripada $H$.*

**Bukti.** Adalah cukup kita buktikan bahawa

$$\frac{ac - nb}{(bd - c)n} > -\frac{1}{d} \tag{36}$$

Pertimbangkan

$$\frac{ac - nb}{(bd - c)n} + \frac{1}{d} = \frac{adc - cn}{d(bd - c)n},$$

dari *sifat kekonsistenan* bagi norma *surih*

$$\mathrm{Sur}(AB) \leq \mathrm{Sur}(A)\mathrm{Sur}(B) \tag{37}$$

dengan kesamaan benar untuk sama ada $A$ atau $B$ sesuatu matriks sifar atau $A = B = ee^T$,

$$\begin{aligned} bd - c &= \mathrm{Sur}(H^{-1})e^T H^{-1} e - \mathrm{Sur}(H^{-1} ee^T H^{-1}). \\ ad - n &= \mathrm{Sur}(H)e^T H^{-1} e - \mathrm{Sur}(ee^T) \end{aligned}$$

Dengan mengambil $e^T H^{-1} e$ sebagai matriks $1 \times 1$, maka

$$e^T H^{-1} e = \mathrm{Sur}(e^T H^{-1} e) = \mathrm{Sur}(ee^T H^{-1})$$

Justeru itu,

$$bd - c = \mathrm{Sur}(H^{-1})\mathrm{Sur}(ee^T H^{-1}) - \mathrm{Sur}(H^{-1} ee^T H^{-1}) \tag{38}$$

$$ad - n = \mathrm{Sur}(ee^T H^{-1})\mathrm{Sur}(H) - \mathrm{Sur}(ee^T) > 0 \tag{39}$$

mengimplikasi (36). $\square$

# 4 Nombor Syarat bagi Rumus Kemaskini Kelas Oren dalam Norma Surih

Untuk menerbitkan rumus untuk $\kappa_T(H')$ bagi rumus kemaskini kelas Oren, kita pertimbangkan rumus kemaskini bagi *surih* $H'$ (rujuk [9])

$$\mathrm{Sur}(H') = \eta \mathrm{Sur}(H) + \frac{\eta(\theta - 1)}{\tau} \gamma^T H^2 \gamma - \frac{2\eta\theta}{\sigma} \delta^T H \gamma. \tag{40}$$

$H'$ boleh disongsangkan dengan menggunakan rumus Sherman-Morrison; maka kita akan memperolehi rumus kemaskini berikut bagi *surih* untuk ${H'}^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sur}({H'}^{-1}) \quad = \quad & 1/\eta\, \mathrm{Sur}(H^{-1}) + \{[\theta\varepsilon\tau\eta + (1 - \theta)(\eta\sigma + \varepsilon)\sigma]\gamma^T \gamma - \tau\theta\sigma\delta^T H^{-2} \delta \\ & + 2\sigma^2(\theta - 1)\gamma^T H^{-1} \delta\}/[\eta\sigma(\theta\varepsilon\tau - (1 - \theta)\sigma^2)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Mendarab (40) dengan (41) memberi rumus dalam bentuk

$$\kappa_T(H') = \frac{\beta_1\theta^2 + \beta_2\theta + \beta_3}{\theta - \theta^*} \tag{42}$$

dengan $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ skalar ditentukan oleh (40) dan (41). Khususnya, kita tumpu perhatian dalam rumus kemaskini yang terkenal dalam kelas Broyden bernama

Rumus kemaskini **BFGS**: $\eta = 1, \theta = 1$ (Broyden[2], Fletcher[4], Goldfarb[5], Shanno[8]). (43)

dengan

$$H'_{BFGS} = H + (1 + \frac{\gamma^T H\gamma}{\delta^T\gamma})\frac{\delta\delta^T}{\delta^T\gamma} - (\frac{\delta\gamma^T H + H\gamma\delta^T}{\delta^T\gamma}). \tag{44}$$

Menggunakan rumus Sherman-Morrison, maka

$$H'^{-1}_{BFGS} = H^{-1} + \frac{\gamma\gamma^T}{\gamma^T\delta} - \frac{H^{-1}\delta\delta^T H^{-1}}{\delta^T H^{-1}\delta}. \tag{45}$$

Lebih-lebih lagi, jika $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n$ merupakan nilai eigen untuk $H$; maka

$$\kappa_2(H) = \xi_1/\xi_n \tag{46}$$

adalah nombor syarat berpadanan dengan norma asli $\ell_2$. Di samping itu, boleh ditunjukkan bahawa dengan menggunakan kedua-dua ketaksamaan Cauchy dan Kantorovich, kita dapat

$$n^2 \leq \kappa_T(H) \leq \frac{(1+\kappa_2(H))^2}{4\kappa_2(H)} n^2. \tag{47}$$

# 5 Contoh Berangka

Kita telah melakukan beberapa ujian berangka untuk mempamerkan kesan pengusikan dalam pelbagai nilai $\omega$ seperti berikut :

(i) $\omega = 0$ memberi rumus kemaskini **BFGS** asal.

(ii) $\omega = \omega^* = 10^{-5}\dfrac{ac - nb}{(bd - c)n}$ dengan pengusikan dipilih dalam batas (35).

(iii) $\omega = \omega^{**} = \pm\dfrac{ac - nb}{(bd - c)n} \pm 10^{-4}$ dengan pengusikan dipilih pada jarak $10^{-4}$ di luar batas (35).

(iv) $\omega = \omega^{***} = \dfrac{-2}{e^T H^{-1} e}$ dengan rumus kemaskini **BFGS** terusik tidak lagi tentu positif

Fungsi masalah yang dipertimbangkan adalah bahagian lampiran. Panjang langkah dikira dengan teknik hampiran kubik dengan batas kurungan. Penumpuan dikatakan tercapai apabila

$$\|g(x')\|_2 \leq 10^{-6} \text{ atau } \|\delta\|_2 \leq 10^{-6}. \tag{48}$$

Jadual 1 merumuskan pencapaian algoritma-algoritma yang diuji.

Nombor integer dalam Jadual 1 menunjukkan nombor lelaran dan simbol 'F' pula menunjukkan bahawa kaedah gagal untuk menumpu sebelum 100 lelaran.

Jadual 1: Bandingan di antara **BFGS** terusik dengan berlainan $\omega$

| Fungsi masalah | $\omega = 0$ | $\omega = \omega^*$ | $\omega = \omega^{**}$ | $\omega = \omega^{***}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 19 | F | F |
| 2 | 29 | 30 | F | F |
| 3 | 33 | 30 | F | F |
| 4 | 12 | 11 | 75 | F |
| 5 | 9 | 9 | 11 | F |
| 6 | 7 | 7 | 16 | F |
| 7 | 20 | 20 | F | F |
| 8 | 40 | 40 | F | F |

## 6 Kesimpulan

Jadual 1 menunjukkan bahawa **BFGS** terusik dengan $\omega = \omega^*$ adalah lebih berkesan secara umum berbanding dengan **BFGS** asal ($\omega = 0$) kerana **BFGS** terusik dengan $\omega = \omega^*$ adalah lebih baik syarat berbanding dengan **BFGS** asal. Ini menyokong pendapat kita bahawa walaupun persyaratan bukan suatu syarat perlu dalam menjamin penumpuan sesuatu kaedah tetapi ia boleh merupakan suatu syarat 'cukup' untuk membaiki kadar penumpuan. Di sebaliknya itu, keputusan berangka yang diperolehi dengan menggunakan rumus **BFGS** terusik dengan $\omega = \omega^{***}$ dengan $\omega^{***}$ dipilih sedemikian hingga ketaksamaan (21) dicabuli menunjukkan kegagalan. Dengan itu kita menyimpulkan bahawa syarat tentu positif adalah syarat perlu yang mesti dipatuhi dalam masalah peminimuman tak berkekangan menggunakan rumus kemaskini quasi-Newton.

## Rujukan


**[1]** C.G. Broyden, *Quasi-Newton methods and their application to function minimization*, Mathematics of Computation 21, (1967), 368-381.

**[2]** C.G. Broyden, *The convergence of a clsss of double-rank minimization algorithms 11*, J. Inst. Maths Applics 6, (1970), 222-231.

**[3]** K.W. Brodlie, A.R. Gourlay & J. Greenstadt, *Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form*, J. Inst. Maths Applics 11, (1973), 73-82.

**[4]** R. Fletcher, *A New approach to a variable metric algorithms*, Computer Journal 13, (1970), 317-322.

**[5]** D. Goldfarb, *A family of variable metric methods derived by variational means*, Mathematics of Computation 24, (1970), 23-26.

**[6]** H.Y. Huang, *Unified approach to quadratically convergent algorithms for function minimization*, J Optim. Th. Applics 5, (1970), 405-423.

**[7]** S.S. Oren, *Selfscaling variable vetric methods*, Management Science 20, (1974), 845-862.

**[8]** D.F. Shanno, *Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization*, Mathematics of Computation 24, (1970), 647-656.

**[9]** E. Spedicato, *On condition numbers of matrices in rank-two minimization algorithms, in Towards global optimisation*, L.C. Dixon & G.P. Szego, editors, New York : North-Hollang Publishing Co., 1975.

## Lampiran : Masalah Fungsi Pengujian

**Masalah 1.** Fungsi Rosenbrook

$$f(x_1, x_2) = 100({x_2}^2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2$$

Titik permulaan : $(-1.2, 1.0)^T$
Penyelesaian : $(1, 1)^T$

**Masalah 2.** Fungsi Powell dengan empat pembolehubah

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

Titik permulaan : $(3, -1, 0, 1)^T$
Penyelesaian : $(0, 0, 0, 0)^T$

**Masalah 3.** Fungsi Wood

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 100(x_2 - {x_1}^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - {x_3}^2)^2 \\ &\quad + (1 - x_3)^2 + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] \\ &\quad + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1) \end{aligned}$$

Titik permulaan :$(-3, -1, -3, -1)^T$
Penyelesaian : $(1, 1, 1, 1)^T$

**Masalah 4.** Fungsi Beale

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= [1.5 - x_1(1 - x_2)]^2 + [2.25 - x_1(1 - {x_2}^2)]^2 \\ &\quad + [2.625 - x_1(1 - {x_2}^3]^2 + [1.5 - x_3(1 - x_4)]^2 \\ &\quad + [2.25 - x_3(1 - {x_4}^2)]^2 + [2.625 - x_3(1 - {x_4}^3)]^2 \end{aligned}$$

Titik permulaan : $(1, 1, 1, 1)^T$
Penyelesaian : $(3, 1/2, 3, 1/2)^T$

**Masalah 5.** Fungsi Box

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{10} [(\exp(-kx_1/10) - \exp(-kx_2/10)) - (\exp(-k/10) - \exp(-k))]^2$$

Titik permulaan : $(5, 0)^T$
Penyelesaian : $(1, 10)^T$

**Masalah 6.** Fungsi Biggs dengan 2 pembolehubah

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{10} [(\exp(-kx_1/10) - 5\exp(-kx_2/10)) - (\exp(-k/10) - 5\exp(-k))]^2$$

Titik permulaan : $(1, 2)^T$
Penyelesaian : $(1, 10)^T$

**Masalah 7.** Fungsi Biggs 4 pembolehubah

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sum_{k=1}^{10} [(x_3 \exp(-kx_1/10) - x_4 \exp(-kx_2/10)) \\ &\quad -(\exp(-k/10) - 5\exp(-k))]^2 \end{aligned}$$

Titik permulaan : $(1, 2, 1, 1)^T$
Penyelesaian : $(1, 10, 1, 5)^T$

**Masalah 8.** Fungsi Dixon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (1 - {x_1}^2) + (1 - x_{10})^2 + \sum_{i=1}^{9} ({x_i}^2 - x_{i+1})^2$$

Titik permulaan : $(-2, -2, \ldots, -2)^T$
Penyelesaian : $(1, 1, \ldots, 1)^T$