

Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Dengan Penghampiran Beza Terhingga Peringkat Tinggi Bagi Persamaan Poisson

Jumat bin Sulaiman

Program Matematik & Ekonomi
Sekolah Sains & Teknologi
Universiti Malaysia Sabah,
Kota Kinabalu, Sabah

Abdul Rahman bin Abdullah

Jabatan Komputeran Industri
Fakulti Teknologi & Sains Maklumat
Universiti Kebangsaan Malaysia
UKM Bangi, Selangor

Abstrak Dalam kertas kerja ini, kita perluaskan kaedah lelaran 2 Titik Kumpulan Tak Tersirat (KTT) kepada 3, 4, 6, 8 dan 12 Titik-KTT dengan menggunakan penghampiran beza terhingga peringkat tinggi bagi menyelesaikan persamaan Poisson satu matra. Kita juga menerangkan pelaksanaan kaedah lelaran KTT dengan separuh sapan. Keputusan-keputusan yang diperolehi dengan multigrid dibandingkan dengan tanpa multigrid.

Katakunci Persamaan Poisson, Kaedah Kumpulan Tak Tersirat, Kaedah Multigrid.

Abstract In this paper, we extend the 2-Point Explicit Group Iterative (EGI) method the 3, 4, 6, 8 and 12-Point EGI methods with high-order difference approximation to solve the one dimensional Poisson equation. We also describe the implementation of the EGI method with multigrid is compared without multigrid.

Keywords Poisson equation, Explicit Group Iterative method, Multigrid method.

1 Pengenalan

Pertimbangkan persamaan Poisson satu matra yang ditakrifkan sebagai

$$-\frac{d^2U}{dx^2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq \lambda \quad (1)$$

dengan syarat sempadan yang diberikan

$$\begin{aligned} U(0) &= \alpha, \\ U(\lambda) &= \beta, \end{aligned}$$

dengan α, β pemalar nyata.

Persamaan (1) yang diselesaikan secara berangka menggunakan persamaan penghampiran di bawah, iaitu;

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f_i \quad (2)$$

dan

$$-U_{i-2} + 2U_i - U_{i+2} = 4h^2 f_i \quad (3)$$

dengan $h = \lambda/(M+1)$ ialah jarak subselang yang membahagikan domain penyelesaian $0 \leq x \leq \lambda$ kepada $(M+1)$ subselang. Kedua-dua persamaan penghampiran (2) dan (3) mempunyai ralat pangkasan peringkat kedua. Persamaan (2) akan digunakan dalam pelaksanaan kaedah lelaran sapuan penuh. Sementara persamaan (3) pula digunakan untuk pelaksanaan kaedah lelaran separuh sapuan. Dalam kertas ini, kita juga menggunakan persamaan penghampiran yang mempunyai ralat pangkasan berperingkat lebih tinggi, iaitu peringkat keempat. Misalnya;

$$-U_{i-2} + 2U_i - U_{i+2} = h^2 f_i^* \quad (4)$$

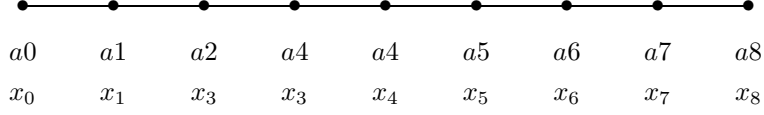
dengan

$$f_i^* = \frac{f_{i-2} + 10f_i + f_{i+2}}{3}$$

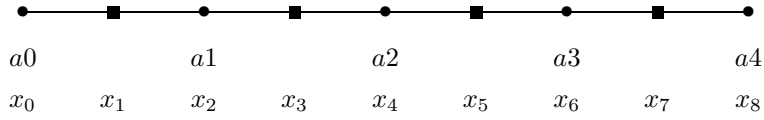
Dengan menggunakan persamaan penghampiran (4), kita boleh membangunkan kaedah lelaran KTT dengan separuh sapuan yang konsepnya sama seperti kaedah 4 Titik Kumpulan Tak Tersirat Nyah-Pasangan (KTTNP) yang diperkenalkan oleh Abdul Rahman [1] untuk menyelesaikan persamaan Poisson dua matra. Selain daripada itu, kita juga memperluaskan skema kaedah lelaran KTT kepada beberapa variasi titik yang akan dibincangkan.

2 Kaedah Lelaran KTT

Biarkan domain dibahagikan kepada beberapa subselang yang ditunjukkan dalam Rajah 1 dan 2. Dalam lelaran separuh sapuan pada rajah 2, pelaksanaan lelaran titik hanya dilakukan ke atas titik-titik yang ditandakan $\bullet$ sehingga penumpuan lelaran dicapai. Manakala penyelesaian pada baki titik-titik yang lain, iaitu titik-titik hitam diperolehi melalui penyelesaian terus menggunakan persamaan penghampiran (2)



Rajah 1:



Rajah 2:

2.1 Rumusan Kaedah Lelaran 2 Titik-KTT

Berpandukan pada Rajah 1 dan 2, kaedah lelaran 2 Titik-KTT menggunakan persamaan (2) boleh dinyatakan (Abdul Rahman & Arsmah [2]; Arsmah [3]) secara umumnya sebagai

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 &= h^2 f_i + U_{i-1} \\ P_2 &= h^2 f_{i+1} + U_{i+2} \end{aligned}$$

Perhatikan pada Rajah 2, kaedah lelaran 2 Titik-KTT dengan menggunakan persamaan penghampiran (3) hanya membabitkan pada 2 jenis titik $\bullet$ yang berturutan. Dengan memanipulasikan persamaan penghampiran (4), kaedah lelaran 2 Titik-KTT separuh sapuan boleh didapati seperti berikut;

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 &= h^2 f_i^* + U_{i-2} \\ P_2 &= h^2 f_{i+2}^* + U_{i+4} \end{aligned}$$

2.2 Rumusan Kaedah Lelaran 3 Titik-KTT

Kaedah lelaran 3 Titik-KTT membabitkan pasangan 3 titik • berturutan yang menjanakan satu sistem persamaan linear (3×3). Dengan menggunakan persamaan (2), kaedah lelaran ini boleh diwakilkan secara umumnya oleh satu sistem persamaan yang dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_{a1} &= h^2 f_{a1} + U_{a0} \\ P_{a2} &= h^2 f_{a2} \\ P_{a3} &= h^2 f_{a3} + U_{a4} \end{aligned}$$

Kompleksiti pengiraan bagi sistem persamaan (7) boleh dikurangkan dengan teknik melakukan satu pengiraan dan disimpan pada satu pembolehubah untuk digunakan berulang kali (Jumat [5]). Secara umumnya, pelaksanaan sistem persamaan ini boleh diwakilkan seperti berikut

$$\begin{aligned} P_a &= (P_{a1} + 2P_{a2} + P_{a3})/4 \\ U_{a1} &= 0.5P_{a1} + P_a \\ U_{a2} &= 2P_a \\ U_{a3} &= 0.5P_{a3} + P_a \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 Rumusan Kaedah Lelaran 4 Titik-KTT

Seterusnya kita pertimbangkan sekumpulan 4 titik yang berturutan untuk membentuk sistem persamaan linear (4×4). Persamaan (2) boleh dimanipulasikan untuk membangunkan kaedah lelaran 4 Titik-KTT dan dapat ditunjukkan

$$\begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \\ U_{a4} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \\ P_{a4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_{a1} &= h^2 f_{a1} + U_{a0} \\ P_{aj} &= h^2 f_{aj}, & \text{untuk } j = 2, 3 \\ P_{a4} &= h^2 f_{a4} + U_{a5} \end{aligned} \quad (10)$$

Perhatikan dua bahagian yang dipisahkan oleh garis putus-putus pada sistem persamaan (9), kompleksiti pengiraan boleh dikurangkan dengan teknik melakukan dua pengiraan yang setiap satu disimpan pada satu pembolehubah untuk digunakan berulang kali. Secara

umumnya, pelaksanaan sistem persamaan ini boleh diwakili seperti berikut;

$$\begin{aligned}
 P_a &= (4P_{a1} + 3P_{a2} + 2P_{a3} + P_{a4})/5 \\
 P_b &= (P_{a1} + 2P_{a2} + 3P_{a3} + 4P_{a4})/5 \\
 U_{a1} &= P_a \\
 U_{a2} &= 2P_a - P_{a1} \\
 U_{a3} &= 2P_b - P_{a4} \\
 U_{a4} &= P_b
 \end{aligned} \tag{11}$$

2.4 Rumusan Kaedah Lelaran 6 Titik-KTT

Dengan menggunakan persamaan (2) dan (4), kaedah lelaran 6 Titik-KTT boleh dibentuk daripada sekumpulan 6 titik berturutan yang menjanakan sistem persamaan linear (6×6). Skema lelaran 6 Titik-KTT bagi kedua-dua persamaan 2 dan 4 masing-masing boleh didapati secara umumnya sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \\ U_{a4} \\ U_{a5} \\ U_{a6} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \\ P_{a4} \\ P_{a5} \\ P_{a6} \end{bmatrix} \tag{12}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 P_{a1} &= h^2 f_{a1} + U_{a0} \\
 P_{aj} &= h^2 f_{aj}, & \text{untuk } j = 2, 3, 4, 5 \\
 P_{a6} &= h^2 f_{a6} + U_{a7}
 \end{aligned}$$

Perhatikan sistem persamaan (14) dan (15), pengurangan kompleksiti pengiraan dapat ditunjukkan seperti berikut

$$\begin{aligned}
 P_a &= (6P_{a1} + 5P_{a2} + 4P_{a3} + 3P_{a4} + 2P_{a5} + P_{a6})/7 \\
 P_b &= (P_{a1} + 2P_{a2} + 3P_{a3} + 4P_{a4} + 5P_{a5} + 6P_{a6})/7 \\
 U_{a1} &= P_a \\
 U_{a2} &= 2P_a - P_{a1} \\
 U_{a3} &= 3P_a - 2P_{a1} - P_{a2} \\
 U_{a4} &= 3P_b - 2P_{a6} - P_{a5} \\
 U_{a5} &= 2P_b - P_{a6} \\
 U_{a6} &= P_b
 \end{aligned} \tag{13}$$

2.5 Rumusan Kaedah Lelaran 8 Titik-KTT

Dengan teknik yang sama seperti bahagian 2.1, 2.2, 2.5 dan 2.4, secara umumnya kaedah lelaran 8 Titik-KTT bagi persamaan (2) dan (4) boleh dinyatakan sebagai;

$$\begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \\ U_{a4} \\ U_{a5} \\ U_{a6} \\ U_{a7} \\ U_{a8} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \\ P_{a4} \\ P_{a5} \\ P_{a6} \\ P_{a7} \\ P_{a8} \end{bmatrix} \quad (14)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_{a1} &= h^2 f_{a1} + U_{a0} \\ P_{aj} &= h^2 f_{aj}, & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, 7 \\ P_{a8} &= h^2 f_{a8} + U_{a9} \end{aligned}$$

Perhatikan dua bahagian yang juga dipisahkan oleh garis putus-putus pada sistem persamaan (12), pengurangan kompleksiti pengiraan dapat dilakukan melalui teknik yang sama dalam bahagian dan ditunjukkan seperti;

$$\begin{aligned} P_a &= (8P_{a1} + 7P_{a2} + 6P_{a3} + 5P_{a4} + 4P_{a5} + 3P_{a6} + 2P_{a7} + P_{a8})/9 \\ P_b &= (P_{a1} + 2P_{a2} + 3P_{a3} + 4P_{a4} + 5P_{a5} + 6P_{a6} + 7P_{a7} + 8P_{a8})/9 \\ U_{a1} &= P_a \\ U_{a2} &= 2P_a - P_{a1} \\ U_{a3} &= 3P_a - 2P_{a1} - P_{a2} \\ U_{a4} &= 4P_a - 3P_{a1} - 2P_{a2} - P_{a3} \\ U_{a5} &= 4P_b - 3P_{a8} - 2P_{a7} - P_{a6} \\ U_{a6} &= 3P_b - 2P_{a8} - P_{a7} \\ U_{a7} &= 2P_b - P_{a8} \\ U_{a8} &= P_b \end{aligned} \quad (15)$$

2.6 Rumusan Kaedah Lelaran 12 Titik-KTT

Perbincangan seterusnya, kita menggunakan sekumpulan 12 titik berturutan dan kaedah lelaran dikenali sebagai kaedah lelaran 12 Titik-KTT yang boleh ditunjukkan seperti berikut

$$\begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \\ U_{a4} \\ U_{a5} \\ U_{a6} \\ U_{a7} \\ U_{a8} \\ U_{a9} \\ U_{a10} \\ U_{a11} \\ U_{a12} \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 22 & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 10 & 20 & 30 & 27 & 24 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 32 & 28 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 35 & 30 & 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 36 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 35 & 28 & 21 & 14 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 32 & 24 & 16 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 27 & 18 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 & 20 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \\ P_{a4} \\ P_{a5} \\ P_{a6} \\ P_{a7} \\ P_{a8} \\ P_{a9} \\ P_{a10} \\ P_{a11} \\ P_{a12} \end{bmatrix} \quad (16)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_{a1} &= h^2 f_{a1} + U_{a0} \\ P_{aj} &= h^2 f_{aj}, \quad \text{untuk } j = 2, 3, \dots, 11 \\ P_{a12} &= h^2 f_{a12} + U_{a13} \end{aligned}$$

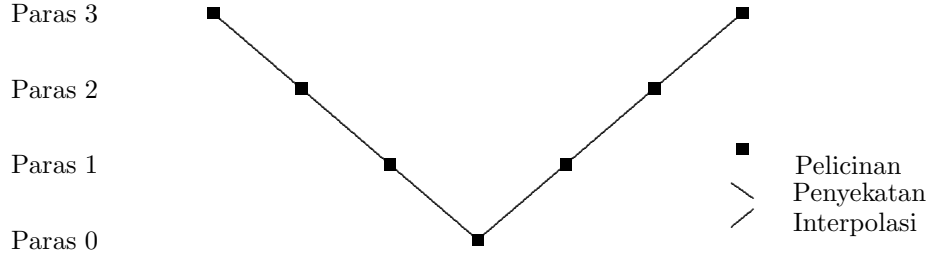
Kemudian pengurangan kompleksiti pengiraan bagi sistem persamaan (16) diwakili seperti berikut

$$\begin{aligned} P_a &= \left(\frac{12P_{a1} + 11P_{a2} + 10P_{a3} + 9P_{a4} + 8P_{a5} + 7P_{a6} + 6P_{a7} + 5P_{a8} + 4P_{a9} + 3P_{a10} + 2P_{a11} + P_{a12}}{13} \right) \\ P_b &= \left(\frac{P_{a1} + 2P_{a2} + 3P_{a3} + 4P_{a4} + 5P_{a5} + 6P_{a6} + 7P_{a7} + 8P_{a8} + 9P_{a9} + 10P_{a10} + 11P_{a11} + 12P_{a12}}{13} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{a1} &= P_a \\ U_{a2} &= 2P_a - P_{a1} \\ U_{a3} &= 3P_a - 2P_{a1} - P_{a2} \\ U_{a4} &= 4P_a - 3P_{a1} - 2P_{a2} - P_{a3} \\ U_{a5} &= 5P_a - 4P_{a1} - 3P_{a2} - 2P_{a3} - P_{a4} \\ U_{a6} &= 6P_a - 5P_{a1} - 4P_{a2} - 3P_{a3} - 2P_{a4} - P_{a5} \\ U_{a7} &= 6P_b - 5P_{a12} - 4P_{a11} - 3P_{a10} - 2P_{a9} - P_{a8} \\ U_{a8} &= 5P_b - 4P_{a12} - 3P_{a11} - 2P_{a10} - P_{a9} \\ U_{a9} &= 4P_b - 3P_{a12} - 2P_{a11} - P_{a10} \\ U_{a10} &= 3P_b - 2P_{a12} - P_{a11} \\ U_{a11} &= 2P_b - P_{a12} \\ U_{a12} &= P_b \end{aligned} \quad (17)$$

3 Perlaksanaan Kaedah Multigrid

Dalam konteks tatacara multigrid, pemahaman kita tentang pengumpulan nilai-nilai pada grid-grid yang berbeza memudahkan untuk melaksanakan beberapa jenis kitar dalam tatacara multigrid, iaitu kitar-V, W, F dan Multigrid Penuh.



Rajah 3: Struktur Kitar-V

Oleh itu, penerapan kaedah lelaran KTT dengan menggunakan tatacara multigrid diharapkan dapat meningkatkan kadar penumpuan dengan cepat tanpa dipengaruhi oleh saiz matriks. Struktur pelaksanaan kitar-V ditunjukkan pada Rajah 3 dan kitar ini sangat popular. Ini adalah kerana ia mudah untuk dipelajari dan dilaksanakan.

Berdasarkan pada Rajah 3, jelas bahawa pelaksanaan multigrid membabitkan penggunaan paras-paras (grid-grid) yang berbeza (Hackbusch [6] dan Briggs [4]), iaitu paras K , $K \geq 0$. Oleh yang demikian, alkhawarizmi tatacara multigrid secara rekursi boleh ditulis seperti berikut

```

Procedure MGM( $K, U, f$ ); integer  $K$ ; array  $U, f$ 
if  $k := 0$  then
   $U := S_k(U, f)$ 
else
  begin array  $V, d$ 
     $U := S_k(U, f)$ 
     $d := r(AU - f)$ 
    MGM( $K-1, V, d$ )
     $U := U - PV$ 
     $U := S_k(U, f)$ 
  end;

```

Dalam kes satu dimensi, P suatu pengopersai interpolasi linear yang digunakan untuk mengumpukan nilai-nilai dari grid kasar ke dalam grid halus. Komponen V^h pada grid halus bagi peringkat kedua dan keempat masing-masing dapat ditunjukkan sebagai

$$\begin{aligned} V_{2i}^h &= V_i^{2h} \\ V_{2i+1}^h &= \frac{1}{2}(V_i^{2h} + V_{i+1}^{2h}), \quad i = 0, 1, \dots, \frac{(M+1)}{2} - 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Jadual 1: Perbandingan peringkat kedua dan keempat bagi beberapa variasi kaedah lelaran KTT menggunakan saiz matriks 128 dan $\epsilon = 10^{-10}$. (Masa dalam saat)

	Tanpa Multigrid				Multigrid			
	Peringkat 2H		Peringkat 4H		Peringkat 2H		Peringkat 4H	
Kaedah	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa
GS	21371	214.16	5919	48.06	14	0.39	10	0.11
2-KTT	11263	115.39	3106	25.49	2	0.00	2	0.00
3-KTT	7735	70.86	2129	16.37	2	0.00	2	0.00
4-KTT	5923	57.89	1629	13.01	2	0.00	2	0.00
6-KTT	4065	39.88	1119	8.95	2	0.00	2	0.00
8-KTT	3114	31.20	860	6.98	2	0.00	2	0.00
12-KTT	2140	22.46	594	4.94	2	0.00	2	0.00

dan

$$\begin{aligned} V_{2i}^h &= V_i^{2h} \\ V_{2i+2}^h &= \frac{1}{2}(V_i^{2h} + V_{i+2}^{2h}), \quad i = 0, 2, \dots, \frac{(M+1)}{2} - 2 \end{aligned} \quad (19)$$

Manakala pengoperasian penyekatan r digunakan untuk mengumpulkan nilai-nilai dari grid halus ke dalam grid kasar. Maka komponen d^{2h} bagi peringkat kedua dan keempat masing-masing diperolehi sebagai

$$d_i^{2h} = \frac{1}{4}(d_{2i-1}^h + 2d_{2i}^h + d_{2i+1}^h), \quad i = 0, 1, \dots, \frac{(M+1)}{2} - 1 \quad (20)$$

dan

$$d_i^{2h} = \frac{1}{4}(d_{2i-2}^h + 2d_{2i}^h + d_{2i+2}^h), \quad i = 0, 2, \dots, \frac{(M+1)}{2} - 2 \quad (21)$$

4 Ujikaji Dan Perbandingan

Perhatikan masalah persamaan Poisson satu matra yang telah dilaksanakan

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = x, \quad 0 \leq x \leq \lambda \quad (22)$$

yang tertakluk kepada syarat sempadan dan penyelesaian tepatnya sebagai

$$U(x) = x \frac{(1-x^2)}{6}, \quad 0 \leq x \leq \lambda \quad (23)$$

Perhatikan jadual 4.1, 4.2 dan 4.3 untuk pelaksanaan kaedah lelaran tanpa multigrid, jelas bahawa kaedah lelaran dengan separuh saupan mempunyai bilangan dan masa lelaran yang masing-masing jauh lebih kecil dan cepat apabila dibandingkan dengan kaedah lelaran KTT menggunakan saupan penuh.

Manakala pelaksanaan kaedah lelaran 12 Titik-KTT jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran bagi kedua-dua peringkat, iaitu kedua dan keempat apabila dibandingkan dengan kaedah lelaran 2, 3, 4, 6, dan 8 Titik-KTT.

Dalam pelaksanaan tatacara multigrid, kadar penumpuan bagi kaedah lelaran KTT untuk kedua-dua peringkat tersebut mempunyai kadar yang sangat cepat berbanding dengan pelaksanaan kaedah lelaran KTT tanpa multigrid.

Jadual 2: Perbandingan peringkat kedua dan keempat bagi beberapa variasi kaedah lelaran KTT menggunakan saiz matriks 64 dan $\epsilon = 10^{-10}$. (Masa dalam saat)

	Tanpa Multigrid				Multigrid			
	Peringkat 2H		Peringkat 4H		Peringkat 2H		Peringkat 4H	
Kaedah	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa
GS	5919	47.73	1623	11.54	14	0.11	10	0.05
2-KTT	3106	25.37	850	6.04	2	0.00	2	0.00
3-KTT	2129	16.20	583	4.06	2	0.00	2	0.00
4-KTT	1629	12.91	448	3.13	2	0.00	2	0.00
6-KTT	1119	8.89	309	2.13	2	0.00	2	0.00
8-KTT	860	6.92	245	1.70	2	0.00	2	0.00
12-KTT	594	4.89	179	1.26	2	0.00	2	0.00

Jadual 3: Perbandingan peringkat kedua dan keempat bagi beberapa variasi kaedah lelaran KTT menggunakan saiz matriks 32 dan $\epsilon = 10^{-10}$. (Masa dalam saat)

	Tanpa Multigrid				Multigrid			
	Peringkat 2H		Peringkat 4H		Peringkat 2H		Peringkat 4H	
Kaedah	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa	Lelaran	Masa
GS	1623	11.54	441	2.91	14	0.11	10	0.05
2-KTT	850	6.04	232	1.48	2	0.00	2	0.00
3-KTT	583	4.01	160	0.99	2	0.00	2	0.00
4-KTT	448	3.13	126	0.77	2	0.00	2	0.00
6-KTT	309	2.15	91	0.55	2	0.00	2	0.00
8-KTT	245	1.70	80	0.49	2	0.00	2	0.00
12-KTT	179	1.21	53	0.28	2	0.00	2	0.00

5 Kesimpulan

Melalui pemerhatian ke atas kaedah lelaran KTT, kita dapati bahawa pengurangan kompleksiti bagi kaedah lelaran n (untuk $n = 2, 4, 6, 8, 12$) Titik-KTT pada kedua-dua peringkat iaitu kedua dan keempat mempunyai pola yang tertentu. Keadaan ini membantu kita memudahkan pelaksanaan teknik yang telah dijelaskan dalam bahagian 2.3.

Dalam kes masalah persamaan Poisson satu matra, didapati bahawa kaedah lelaran 12 Titik-KTT jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran berbanding dengan kaedah lelaran KTT yang lain.

Seterusnya penerapan tatacara multigrid ke atas kaedah lelaran KTT bagi kedua-dua peringkat, iaitu kedua dan keempat telah meningkatkan kadar penumpuan jauh lebih cepat jika dibandingkan kaedah lelaran KTT tanpa multigrid. Malahan bilangan dan masa lelaran bagi kaedah KTT dengan multigrid tidak dipengaruhi oleh saiz matriks yang digunakan (Gupta, Kouatchou & Zhang [5]).

Rujukan

- [1] Abdul Rahman Abdullah, *The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) method. A Fast Poisson Solver*, Int. J. Computer Math.34(1991),61-70.
- [2] Abdul Rahman Abdullah dan Arsmah Ibrahim, *Penyelesaian Masalah Nilai Semipadan Dua Titik Menggunakan Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) Dua Titik*, Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-IV (1990), 73-96.
- [3] Arsmah Ibrahim, *The Study of the Iterative Solution of Boundary Value Problem by the Finite Difference Methods*, Ph.D Thesis. Universiti Kebangsaan Malaysia 1993.
- [4] W.L.Briggs, *A Multigrid Tutorial*, Pennsylvania. Lancaster Press. 1987.
- [5] M. M.Gupta, J. Kouatchou, and J.Zhang, *TJ. Comparison of 2nd and 4th Order Discretizations For Multigrid Poisson Solver*, <http://www.cs.yale.edu/directory/mgnet/papers/Gupta>. submitted to the J. Comp. Physics (1995).
- [6] W.Hackbusch, *Multi-Grid and Applications. Springer Series in Computational Mathematics*, 4, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [7] Jumat Bin Sulaiman, *Kajian Pelaksanaan Kaedah Multigrid Bagi Persamaan Poisson dan Resapan-Olakan*, Tesis Sarjana Teknologi Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia, 1999.