Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 2, hlm. 119–127

Teorem Mertens Bagi Orbit–Orbit Tertutup Subanjakan Mengikut Kelas Frobenius

Mesliza Mohamed
Bahagian Akademik, ITM Cawangan Perlis
02600 Arau, Perlis, Malaysia

Mohd. Salmi Md. Noorani
Jabatan Matematik,
Fakulti Sains Matematik, Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE, Malaysia

Abstrak Misalkan σ suatu subanjakan jenis terhingga dan $\tilde{\sigma}$ suatu perluasan kumpulan terhingga bagi σ. Dalam senario ini, orbit-orbit tertutup (orbit berkala) bagi σ akan diangkat ke $\tilde{\sigma}$ mengikut kelas Frobenius masing-masing. Hasil utama yang akan dipaparkan dalam kertas ini ialah suatu rumus asimptot yang membabitkan kala orbit-orbit tertutup bagi σ mengikut kelas Frobenius di atas. Rumus asimptot ini telah dimotivasikan oleh suatu hasil klasik dalam teori nombor analisis, iaitu Teorem Mertens. Sebagai korolari kepada hasil utama ini, hasil yang setara bagi kes σ ditudungi dengan suatu perluasan homogen juga akan dipaparkan.

Katakunci Subanjakan Jenis Terhingga, Perluasan Kumpulan Terhingga, Orbit Tertutup, Kelas Frobenius, Teorem Mertens.

Abstract *Let σ be a subshift of finite type and $\tilde{\sigma}$ a finite group extension of σ. In this scenario, the closed orbits (periodic orbits) of σ are lifted onto $\tilde{\sigma}$ according to their Frobenius classes. The main result to be presented in this paper is an asymptotic formula involving the period of the σ-closed orbits with respect to their Frobenius classes. This asymptotic formula was motivated by a classical result in analytic number theory namely Mertens Theorem. As a corollary to this main result, a similiar result for the case when σ is covered by a homogeneous extension is also provided.*

Keywords *Subshift of Finite Type, Finite Group Extension, Closed Orbits, Frobenius Class, Mertens Theorem.*

1 Pengenalan

Teorem Mertens ialah suatu hasil klasik dalam teori nombor analisis (lihat umpamanya, Hardy & Wright [2]) yang memberikan suatu rumus asimptot bagi nombor–nombor perdana dalam ungkapan-ungkapan tertentu. Khususnya, rumus berkenaan ialah seperti berikut:

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log x}$$

dengan p melambangi nombor perdana, γ pemalar Euler dan simbol $f(x)\sim g(x)$ bermakna $f(x)/g(x)\to 1$ apabila $x\to\infty$. Mesliza & Noorani [3], telah memperoleh suatu rumus yang beranalogi dengan hasil klasik di atas dalam bidang sistem dinamik khususnya untuk pemetaan yang dikenali sebagai subanjakan jenis terhingga σ. Untuk kasus ini, orbit-orbit tertutup (orbit berkala) τ bagi σ dengan kala $\lambda(\tau)$ memainkan peranan yang sama dengan nombor–nombor perdana p seperti dalam teorem asal di atas. Rumus yang telah diperolehi dalam kasus ini ialah:

$$\prod_{\lambda(\tau)\le x}\left(1-\frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}}\right)\sim D\frac{e^{-\gamma}}{x}$$

dengan D ialah suatu pemalar yang diketahui secara tersurat.

Dalam kertas ini, hasil di atas akan diitlakkan untuk keadaan apabila subanjakan jenis terhingga σ berkenaan ditudungi dengan suatu perluasan kumpulan terhingga bagi σ. Dalam senario ini, orbit–orbit tertutup bagi σ boleh dikelaskan mengikut cara mereka diangkat ke ruang perluasan berkenaan iaitu mengikut kelas–kelas Frobenius (konjugasi) kumpulan terbabit. Jadi, hasil yang diperolehi dalam situasi ini ialah dengan mengambil kira pengelasan berkenaan (lihat seksyen 3, Teorem 1).

Sebagai suatu korolori, rumus yang setara bagi kasus apabila subanjakan tersebut ditudungi dengan suatu perluasan homogen terhingga (lihat seksyen 4, Teorem 2) juga akan dipersembahkan.

2 Subanjakan dan Perluasan Kumpulan

Penerangan bagi istilah-istilah yang tidak dijelaskan maksudnya dalam bahagian ini dan seterusnya boleh didapati dalam Denker *et al* [1] dan Walters [7].

Takrif 1 *Misalkan set $\{1,2,\dots,n\}$ disekutukan dengan topologi diskret. Andaikan A suatu matriks $n\times n$ yang pemasukannya ialah 0 dan 1, dan A tak terturunkan (i.i bagi setiap i,j wujud $m\ge 1$ sehinggakan $A^m(i,j)$, pemasukan–(i,j) bagi A^m, memenuhi $A^m(i,j)>0$) . Takrifkan set jujukan dwi–tak terhingga*

$$X=\{x=(x_i)\in\prod_{-\infty}^{\infty}\{1,2,\dots,n\}:A(x_i,x_{i+1})=1,\forall i\in Z\}.$$

Andaikan $\sigma\colon X\to X$ ditakrifkan sebagai $(\sigma x)_i=x_{i+1}$. Pasangan (σ,X) atau pun hanya σ dikenali sebagai *subanjakan jenis terhingga* (dengan matriks peralihan A).

Andaikan $x\in X$ memenuhi $\sigma^n(x)=x$ bagi suatu integer positif (terkecil) n (i.i x suatu titik berkala) maka set $\tau=\{x,\sigma(x),\sigma^2(x),\dots,\sigma^{n-1}(x)\}$ dikenali sebagai *orbit tertutup* bagi

σ dengan kala $\lambda(\tau) = n$. Perhatikan bahawa oleh kerana matriks A tak terturunkan maka wujud suatu nilai eigen positif terbesar bagi A. Tulis e^h untuk nilai eigen ini. Pemalar h biasanya dikenali sebagai *entropi* untuk σ. Juga perhatikan yang andaian tak terturunkan ke atas matriks peralihan di atas mengimplikasikan yang σ transitif. Sekiranya matriks peralihan A diandaikan memenuhi sifat tak terturunkan serta tak berkala maka dalam kes ini σ adalah bergaul secara topologi.

Takrif 2 *Andaikan G suatu kumpulan terhingga dan $\alpha\colon X \to G$ suatu fungsi selanjar. Perluasan kumpulan terhingga bagi σ ditakrifkan sebagai pemetaan $\tilde{\alpha}\colon X \times G \to X \times G$ yang diberikan oleh rumus $\tilde{\alpha}(x, g) = (\sigma(x), \alpha(x)g)$ dengan $(x, g) \in X \times G$.*

Perhatikan bahawa $\tilde{\sigma}$ ialah perluasan bagi σ dengan menggunakan pemetaan unjuran bersahaja $\pi(x, g) = x$. Juga perhatikan bahawa oleh kerana G terhingga maka fungsi α hanya bergantung pada bilangan koordinat yang terhingga sahaja dan dengan menggunakan pengekodan yang bersesuaian boleh diandaikan yang α hanya bergantung pada dua koordinat. Oleh itu, boleh ditunjukkan yang pasangan $(\tilde{\alpha}, X \times G)$ adalah juga suatu subanjakan jenis terhingga (lihat Denker *et al* [1]).

Takrif 3 *Andaikan τ suatu orbit tertutup bagi σ dengan kala n dan $\tilde{\tau}$ orbit tertutup bagi $\tilde{\sigma}$ yang menudungi τ (iaitu $\pi(\tilde{\tau}) = \tau$). Misalkan $x \in \tau$ maka* kelas Frobenius *bagi τ yang dilambangi $[\tau]$ ditakrifkan sebagai kelas konjugasi yang mengandungi unsur (digelar unsur Frobenius)*

$$\alpha(\sigma^{n-1}(x))\alpha(\sigma^{n-2}(x)) \ldots \alpha(\sigma(x))\alpha(x) \in G.$$

Perhatikan bahawa kelas Frobenius di atas adalah tertakrif rapi kerana boleh ditunjukkan yang unsur lain dalam τ akan melahirkan unsur Frobenius yang berkonjugasi dengan yang terdahulu dan justeru itu memberikan kelas konjugasi yang sama (lihat Noorani [5]).

Takrif 4 *Fungsi L untuk suatu watakan tak terturunkan χ bagi G diberikan oleh rumus*

$$L(z, \chi) = eksp \sum_{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi([\tau]^n) z^{\lambda(\tau)n}.$$

Fungsi L ini adalah bukan sifar dan analisis pada $|z| < e^{-h}$ (lihat, umpamanya, Noorani [5]). Apabila $\chi = \chi_0$, watakan prinsipal, maka diperoleh $L(z, \chi_0) = \zeta(z)$, fungsi zeta Artin–Mazur yang dikenali umum itu. Berikut diperturunkan sifat–sifat analisis fungsi L di atas yang akan membantu dalam membuat keputusan selanjutnya:

Usulan 1 (Noorani [5]) *a) Jika $\tilde{\sigma}$ bergaul secara topologi maka kesemua $L(z, \chi)$, χ watakan tak terturunkan bagi G, mempunyai perluasan analisis bukan sifar pada suatu cakera berjejari jauh lebih besar daripada e^{-h} kecuali $L(z, \chi_0)$ yang mempunyai suatu kutub ringkas pada $z = e^{-h}$ dalam domain ini.*

b) Jika σ bergaul secara topologi dan $\tilde{\sigma}$ tidak bergaul secara topologi tetapi transitif dengan m bahagian berkitar, maka terdapat watakan-watakan tak terturunkan χ_i, $i = 0, \ldots, m-1$, sehinggakan $L(z, \chi_i)$ mempunyai perluasan analisis bukan sifar pada suatu cakera berjejari jauh lebih besar daripada e^{-h} kecuali suatu kutub ringkas pada $z = (\omega^i e^h)^{-1}$, dengan ω ialah suatu punca keesaan primitif ke–m. Dalam domain yang sama, $L(z, \chi)$, bagi χ (tak terturunkan) yang selebihnya, adalah analisis dan bukan sifar.

Perhatikan dalam kedua-dua kasus di atas, kesemua $L(z, \chi)$ adalah analisis dan bukan sifar dalam suatu kejiranan $z = e^{-h}$ kecuali $L(z, \chi_0)$ yang mempunyai kutub ringkas pada $z = e^{-h}$. Fakta ini adalah kunci kepada pembuktian teorem utama dalam kertas ini. Sebelum itu, dengan mengeksploitasikan sifat keanalisisan fungsi $L(z, \chi_0)$ di atas, diperoleh hasil berikut:

Usulan 2 (Noorani [4]) *Misalkan* $\pi(x) =$ *bilangan*$\{\tau \subset X : \lambda(\tau) \leq x\}$. *Maka*

a) jika σ bercampur secara topologi,

$$\pi(x) \sim \frac{1}{x} \frac{e^{h(x+1)}}{e^h - 1}, \qquad \textit{apabila} \quad x \to \infty$$

b) jika σ tidak bercampur secara topologi tetapi transitif dengan k bahagian berkitar,

$$\pi(x) \sim \frac{k}{x} \frac{e^{h(x+k)}}{e^{kh} - 1}, \qquad \textit{apabila} \quad x \to \infty.$$

Hasil seterusnya, yang akan digunakan dalam seksyen 3 nanti, adalah suatu rentetan mudah usulan di atas.

Korolori 1 *Misalkan σ transitif. Maka wujud pemalar positif K_1 dan K_2 sehinggakan*

$$K_1 \frac{e^{hx}}{x} \leq \pi(x) \leq K_2 \frac{e^{hx}}{x}.$$

3 Hasil Utama

Sebahagian besar pernyataan dan pembuktian yang akan disampaikan di bawah adalah natijah mudah daripada bahan yang terdapat dalam Mesliza & Noorani [3].

Usulan 3 *Misalkan χ_0 watakan prinsipal bagi kumpulan G. Maka fungsi $L(z, \chi_0)(1 - e^h z)$ adalah analisis dan bukan sifar dalam suatu kejiranan bagi $z = e^{-h}$. Malah*

$$L(z, \chi_0)(1 - e^h z) = \text{eksp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(z^n \text{Tet}_n(\sigma) - (e^h z)^n \right)$$

dengan $\text{Tet}_n(\sigma) = \text{bilangan}\{x \in X : \sigma^n(x) = x\}$

Bukti: Bahagian pertama adalah rentetan daripada hakikat bahawa $L(z, \chi_0)$ mempunyai perluasan analisis bukan sifar dalam suatu cakera berjejari jauh lebih besar daripada e^{-h} kecuali suatu kutub pada $z = e^{-h}$. Untuk bahagian kedua, perhatikan bahawa ungkapan $(1 - e^h z)$ boleh ditulis sebagai $\text{eksp}(-\log(1 - e^h z)^{-1})$ dan memandangkan χ_0 adalah watakan prinsipal, maka $L(z, \chi_0) = \text{eksp}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{Tet}_n(\sigma)\right)$. Lantaran itu

$$L(z, \chi_0)(1 - e^h z) = \text{eksp} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{Tet}_n(\sigma) \right) \text{eksp} \left(- \log (1 - e^h z)^{-1} \right)$$

Seterusnya, kembangkan siri log untuk menamatkan pembuktian ini. □

Imbas kembali yang (dalam konteks kertas ini) ungkapan '$f(x) = o(1)$' membawa maksud '$f \to 0$' apabila $x \to \infty$. Kita juga akan menulis '$f(x) = g(x) + o(1)$' untuk mewakili ungkapan '$f - g \to 0$' apabila $x \to \infty$. Sekarang, tulis $\nu(z) = L(z, \chi_0)(1 - e^h z)$. Maka, oleh sebab $\log \nu(z) - \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}\left(z^n \mathrm{Tet}_n(\sigma) - (e^h z)^n\right) \to 0$ apabila $x \to \infty$ untuk semua z dalam suatu kejiranan bagi e^{-h} (Usulan 3), kita peroleh

$$\log \nu(e^{-h}) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}\left(e^{-nh}\mathrm{Tet}_n(\sigma) - 1\right) + o(1) \quad \text{apabila} \quad x \to \infty. \qquad (*)$$

Seterusnya, pertimbangkan fungsi

$$K(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{e^{-hn}}{n} \mathrm{Tet}_n(\sigma).$$

Maka diperoleh hasil berikut.

Usulan 4

$$K(x) = \log x + \log \nu(e^{-h}) + \gamma + o(1)$$

dengan γ ialah pemalar Euler.

Bukti: Dengan menggunakan $(*)$

$$\begin{aligned} K(x) - \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} &= \sum_{n=1}^{x} \frac{e^{-hn}}{n}\mathrm{Tet}_n(\sigma) - \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}\left(e^{-hn}\mathrm{Tet}_n(\sigma) - 1\right) \\ &= \log \nu(e^{-h}) + o(1). \end{aligned}$$

Ia itu $K(x) - \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log \nu(e^{-h}) \to 0$ apabila $x \to \infty$. Daripada teori nombor, diketahui bahawa $\sum_{n=1}^{x} 1/n - \log x - \gamma \to 0$ apabila $x \to \infty$. Maka setelah dijumlahkan dua jujukan yang menghampiri sifar ini, di peroleh $K(x) = \log x + \log \nu(e^{-h}) + \gamma + o(1)$. □

Ingatkan kembali bahawa $L(z, \chi_0) = \nu(z)/(1 - e^h z)$. Oleh itu,

$$\begin{aligned} \mathrm{Reja}\left(L(z, \chi_0), e^{-h}\right) &= \mathrm{had}_{z \to e^{-h}} \frac{z - e^{-h}}{1 - e^h z}\nu(z) \\ &= \mathrm{had}_{z \to e^{-h}} \frac{1 - e^h z}{-e^h(1 - e^h z)}\nu(z) \\ &= -\frac{\nu(e^{-h})}{e^h}. \end{aligned}$$

Oleh yang demikian pembuktian bagi korolari berikut adalah mudah.

Korolori 2

$$K(x) = \log x + h + \log\left(-\mathrm{Reja}(L(z, \chi_0), e^{-h})\right) + \gamma + o(1)$$

Usulan 5

$$\sum_{\lambda(\tau)\le x} \log \frac{1}{1-e^{-h\lambda(\tau)}} = K(x) + o(1)$$

Bukti: Daripada bentuk Euler fungsi zeta (lihat umpamanya Noorani [5]) boleh ditunjukkan bahawa

$$K(x) = \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=1}^{[\frac{x}{\lambda(\tau)}]} \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k}$$

dengan simbol $[y]$ menandakan bahagian integer y. Maka

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{\lambda(\tau)\le x} \log \frac{1}{1-e^{-h\lambda(\tau)}} - K(x) &= \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=[\frac{x}{\lambda(\tau)}]+1}^{\infty} \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} \\
&\le \sum_{\lambda(\tau)\le x} \frac{1}{e^{hx}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{e^{-h\lambda(\tau)(l-1)}}{l} \le \sum_{\lambda(\tau)\le x} \frac{e^{h\lambda(\tau)}}{e^{hx}} \frac{1}{2e^{h\lambda(\tau)}(e^{h\lambda(\tau)}-1)} \\
&= \sum_{\lambda(\tau)\le x} \frac{1}{2e^{hx}} \frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}-1} = \frac{1}{2e^{hx}} \sum_{\lambda(\tau)\le x} \frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}-1} \\
&= \frac{1}{2e^{hx}} \left(\frac{\pi(x)}{e^{hx}-1} + h\int_1^x \frac{\pi(t)}{e^{ht}} dt \right)
\end{aligned}$$

Baris terakhir di atas diperoleh dengan menulis ungkapan yang sebelumnya dalam bentuk kamiran Stieltjes terhadap fungsi $\pi(x)$ (lihat Usulan 2). Seterusnya, Korolari 1 mengimplikasikan yang ungkapan terakhir di atas akan menghampiri sifar apabila $x \to \infty$. $\square$

Sekarang, misalkan C suatu kelas konjugasi bagi G dan $g \in C$. Dengan menggunakan hubungan keortogonan bagi watakan kumpulan, Usulan 5 dan Korolari 2, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda(\tau)\le x, [\tau]\in C} \log \frac{1}{1-e^{-h\lambda(\tau)}} &= \sum_{\lambda(\tau)\le x, [\tau]\in C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} \\
&= \frac{|C|}{|G|} \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} + \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi\ne\chi_0} \chi(g^{-1}) \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=1}^{\infty} \chi([\tau]) \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} \\
&= \frac{|C|}{|G|} \left\{ \log x + h + \gamma + \log\left(-\mathrm{Reja}(L(z,\chi_0), e^{-h})\right) \right\} \\
&+ \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi\ne\chi_0} \chi(g^{-1}) \log L(e^{-h}, \chi) + o(1).
\end{aligned}$$

Oleh yang demikian, hasil berikut ialah dapatan utama dalam kertas ini.

Teorem 1 *Misalkan σ bergaul secara topologi. Maka*

$$\prod_{\lambda(\tau)\le x, [\tau]\in C} \left(1 - \frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}}\right) \sim D_1 \frac{e^{-\gamma|C|/|G|}}{x^{|C|/|G|}}$$

dengan $D_1^{-1} = -e^h Reja(L(z,\chi_0), e^{-h})^{|C|/|G|} \left\{\prod_{\chi\neq\chi_0} L(e^{-h},\chi)^{\chi(g^{-1})}\right\}^{\frac{|C|}{|G|}}$ *dan* $g \in C$

Apabila G ialah kumpulan remeh, i.i yang mengandungi unsur identiti sahaja, maka hasil utama dalam Mesliza & Noorani [3] boleh didapatkan semula (lihat seksyen 1 kertas ini), iaitu

Korolori 3

$$\prod_{\lambda(\tau)\leq x}\left(1 - \frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}}\right) \sim D\frac{e^{-\gamma}}{x}$$

dengan $D^{-1} = -e^h Reja(L(z,\chi_0), e^{-h})$.

4 Penerapan Kepada Perluasan Homogen

Berikut adalah satu lagi perluasan bagi σ yang akan dipertimbangkan dalam kertas ini. Untuk makluman, perluasan sebegini telahpun dipertimbangkan oleh Noorani & Parry [6] untuk mendapatkan analog Teorem Chebotarev bagi σ.

Takrif 5 *Misalkan H suatu subkumpulan bagi kumpulan terhingga G. Maka pemetaan $\hat{\alpha}\colon X \times G/H \to X \times G/H$ yang diberikan oleh rumus $\hat{\alpha}(x, gH) = (\sigma(x), \alpha(x)gH)$ dengan $(x, gH) \in X \times G/H$ dikenali sebagai perluasan homogen (terhingga) bagi σ.*

Perhatikan bahawa σ sekarang ditudungi oleh kedua-dua $\hat{\sigma}$ (katakan, melalui $\hat{\pi}$) dan $\tilde{\sigma}$. Sekarang, misalkan τ adalah suatu orbit tertutup bagi σ dengan kala $\lambda(\tau)$ dan $\hat{\tau}$ suatu orbit tertutup untuk $\hat{\sigma}$ dengan kala $\lambda(\hat{\tau})$ sehinggakan $\hat{\pi}(\hat{\tau}) = \tau$. Maka, darjah bagi $\hat{\tau}$ terhadap τ ditakrifkan sebagai integer

$$djh\left(\frac{\hat{\tau}}{\tau}\right) = \frac{\lambda(\hat{\tau})}{\lambda(\tau)}.$$

Misalkan $\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_n$ adalah orbit-orbit tertutup yang menudungi τ. Maka boleh dibuktikan yang hubungan berikut adalah benar:

$$djh\left(\frac{\hat{\tau}_1}{\tau}\right) + \cdots + djh\left(\frac{\hat{\tau}_n}{\tau}\right) = \frac{|G|}{|H|}.$$

Perhatikan yang hubungan ini melahirkan suatu partisi bagi integer $|G|/|H|$. Maka kita katakan τ mengaruh partisi $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ ke atas integer $|G|/|H|$ sekiranya

$$\ell = \left(djh\left(\frac{\hat{\tau}_1}{\tau}\right), \cdots, djh\left(\frac{\hat{\tau}_n}{\tau}\right)\right) \qquad \text{(selepas disusun semula, jika perlu).}$$

Dalam kasus ini, tulis partisi$(\tau) = \ell$. Sekarang, misalkan K adalah suatu subkumpulan lain bagi G. Kita boleh takrifkan suatu tindakan kiri bagi $k \in K$ pada ruang koset G/H sebagai $k \cdot gH = kgH$. Misalkan $K_1, \ldots, K_m$ adalah orbit-orbit berlainan bagi tindakan ini dan r_i, $i = 1, \ldots, m$ adalah saiz orbit-orbit ini. Maka pungutan r_i membentuk suatu partisi bagi $|G|/|H|$. Dalam kes ini, K dikatakan mengaruh partisi $r = (r_1, \ldots, r_m)$ ke atas $|G|/|H|$.

Hasil berikut mengaitkan kedua-dua konsep partisi yang tertakrif di atas.

Usulan 6 (Noorani & Parry [6]) *Misalkan τ suatu orbit tertutup bagi σ. Maka τ mengaruh partisi ℓ ke atas $|G|/|H|$ jika dan hanya jika tindakan subkumpulan kitaran yang dijana oleh salah satu (justeru itu semua) unsur Frobenius bagi τ mengaruhkan partisi ℓ ke atas $|G|/|H|$.*

Natijah segera yang boleh dirumuskan daripada usulan di atas ialah yang berikut:

Usulan 7 *Misalkan $A_\ell = \{\tau : \tau$ mengaruh partisi ℓ keatas $|G|/|H|\}$. Juga misalkan $R_i = \{\tau :< g_i >$ mengaruh partisi ℓ keatas $|G|/|H|, g_i \in [\tau]\}$ $i = 1, \ldots, d$. Maka*

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{d} R_i.$$

Hasil utama yang didapati untuk bahagian ini ialah:

Teorem 2 *Misalkan ℓ suatu partisi ke atas $|G|/|H|$. Maka*

$$\prod_{\lambda(\tau)\le x, partisi(\tau)=\ell} \left(1 - \frac{1}{e^{h\lambda(\tau)}}\right) \sim D_2 \prod_{i=1}^{d} \frac{e^{-\gamma|C_i|/|G|}}{x^{|C_i|/|G|}}$$

dengan $D_2^{-1} = -e^h \prod_{i=1}^d Reja(L(z,\chi_0), e^{-h})^{|C_i|/|G|} \left\{\prod_{\chi\neq\chi_0} L(e^{-h},\chi)^{\chi(g_i^{-1})}\right\}^{\frac{|C_i|}{|G|}}$ dan C_i, $i = 1, \ldots, d$ adalah kelas-kelas konjugasi bagi G sehinggakan subkumpulan kitaran yang dijana oleh ahli kelas konjugasi ini mengaruh partisi ℓ ke atas $|G|/|H|$ serta $g_i \in C_i$.

Bukti: Daripada usulan di atas dan pembuktian teorem utama dalam bahagian sebelum ini diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda(\tau)\le x, partisi(\tau)=\ell} \log \frac{1}{1 - e^{-h\lambda(\tau)}} &= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{\lambda(\tau)\le x, [\tau]=C_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{h\lambda(\tau)k}}{k} + \sum_{i=1}^{d} \frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\chi\neq\chi_0} \chi(g_i^{-1}) \sum_{\lambda(\tau)\le x} \sum_{k=1}^{\infty} \chi([\tau]) \frac{e^{-h\lambda(\tau)k}}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{|C_i|}{|G|} \left\{ \log x + h + \gamma + \log\left(-\mathrm{Reja}(L(z,\chi_0), e^{-h})\right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\chi\neq\chi_0} \chi(g_i^{-1}) \log L(e^{-h},\chi) + o(1)
\end{aligned}$$

Seterusnya guna sifat log. $\square$

Rujukan

[**1**] M.Denker, C. Grillenberger & K. Sigmund, *Ergodic Theory On Compact Spaces*, Springer Lecture Notes in Math **527**, Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[**2**] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An Introduction To The Theory Of Numbers*, Oxford: Oxford University Press, 1938.

[**3**] M. Mesliza & M.S.M. Noorani, *Teorem Mertens Bagi Orbit-Orbit Tertutup Subanjakan Jenis Terhingga*, Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-7 (1996), 352-356.

[**4**] M.S.M. Noorani, *An Asymptotic Formula For The Number Of Closed Orbits Of An Axiom A Diffeomorphism,* Sains Malaysiana, **16**(4)(1987),437–446.

[**5**] M.S.M. Noorani, *Teorem Chebotarev Untuk Perluasan Kumpulan Terhingga Bagi Anjakan Terhingga,* Sains Malaysiana, **24**(4)(1995),91–103.

[**6**] M.S.M. Noorani. & W. Parry, *A Chebotarev Theorem For Finite Homogeneous Extensions of Shifts,* Boletin da Sociedade Brasileira ce Matematica, **23**(1 & 2) (1992),137-151.

[**7**] P. Walters *An Introduction To Ergodic Theory.* GTM 79, Berlin: Springer-Verlag, 1982.