Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 2, hlm. 129–134

Padat-C Kabur

Abd Fatah Bin Wahab
Unit Sains Matematik
Fakulti Sains dan Sastera
Universiti Putra Malaysia Terengganu
21030 Telipot, Kuala Terengganu
Terengganu, Malaysia.

Abu Osman bin Md Tap
Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor DE, Malaysia

Abstrak Padat-C kabur di dalam ruang Hausdorff kabur ditakrifkan dan hubungannya dengan padat kabur dan minimum Hausdorff kabur dikaji. Bentuk kesetaraan padat-C kabur diberikan melalui pendekatan penumpuan adheren kabur. Pencirian padat-C kabur dengan konsep seminormal tertutup mutlak kabur diberikan. Padat-C pinggiran kabur ditakrifkan dan hubungannya dengan padat-C kabur juga dikaji.

Katakunci Hausdorff kabur, padat-C kabur, turas kabur, seminormal kabur.

Abstract *Fuzzy C-compact in fuzzy Hausdorff space is defined and its relationship to fuzzy compact and fuzzy minimal Hausdorff are studied. An equivalent form of C-compact is given via the notion of fuzzy adherent convergence. The C-compact is then characterized by the concept of fuzzy seminormal absolutely closed. Finally the fuzzy rim C-compact is defined and its relationship to fuzzy C-compact is studied.*

Keywords *Fuzzy Hausdorff, fuzzy C-compact, fuzzy filter, fuzzy seminormal.*

1 Pendahuluan

Sejak set kabur diperkenalkan oleh Zadeh [12], berbagai konsep matematik telah diperluaskan ke dalam konteks teori matematik kabur. Chang [2] telah memperkenalkan konsep topologi kabur yang memenuhi aksiom yang sepadan dengan topologi biasa. Bezanya hanya dipertimbangkan set kabur sebagai menggantikan set biasa.

Kami akan menggunakan ruang topologi yang dibincangkan oleh Chakraborty & Ahsanullah [1], yang diubahsuai dari ruang topologi Chang. Kami juga akan menggunakan konsep Hausdorff kabur yang dibincangkan oleh Srivastava et al. [7]. Bagi pengetahuan asas dan konsep padat kabur, sila rujuk kepada [1],[2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [11]. Dalam kertas ini kami lambangkan *ruang topologi kabur* (ringkasnya *rtk*) dengan (X, τ). Jika $A \subseteq X$, kami tulis $tpn(A)$ bermaksud tutupan bagi A dan $pdl(A)$ bermaksud *pedalaman* bagi A.

Viglino [8, 9] telah memperkenalkan konsep padat-C di dalam ruang topologi biasa melalui set tutupan dan mencirikan konsep tersebut dalam sebutan asas turas . Tujuan kertas ini ialah mengkaji konsep padat-C kabur di dalam ruang topologi Hausdorff kabur . Kami juga akan mentakrifkan minimum Hausdorff kabur, tertutup mutlak kabur, padat-C pinggiran kabur dan seterusnya melihat hubungannya dengan padat-C kabur.

2 Padat-C Kabur

Selaras dengan Viglino[8, 9], kami berikan takrif padat-C kabur dan seterusnya mengkaji sifatnya.

Takrif 1 *$Rtk(X, \tau)$ disebut padat-C kabur jika diberikan set tertutup kabur Q di dalam X dan tudung terbuka kabur Γ bagi Q, maka wujud $P_i, i = 1, 2, ..., n$, di dalam Γ sehingga $Q \subseteq tpn(\bigcup_{i=1}^{n} P_i)$.*

Pertamanya kami perlihatkan hubungan padat-C kabur terhadap padat kabur dalam ruang Hausdorff kabur.

Teorem 1 *Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff kabur. Jika X padat kabur, maka X juga merupakan padat-C kabur.*

Bukti Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff kabur yang padat kabur dan Q subset tertutup kabur bagi X. Misalkan pula $\Gamma = \{P_i\}$ tudung terbuka kabur bagi Q. Maka $P_i \cup X \setminus Q$ menjadi tudung terbuka kabur bagi X. Oleh kerana X padat kabur, maka wujud terhingga $P_i, i = 1, 2, ..., n$, bagi Γ sehingga $X = (\bigcup_{i=1}^{n}) \cup (X \setminus Q)$. Ini bermakna yang $Q \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n}) \subseteq tpn(\bigcup_{i=1}^{n} P_i)$. Jadi X padat-C kabur.

Hasil berikut memberikan kesan sifat ruang Hausdorff padat-C kabur pada keselanjaran kabur dan hubungannya dengan tertutup kabur.

Teorem 2 *Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff padat-C kabur. Maka setiap fungsi selanjar kabur f dari X ke dalam ruang Hausdorff kabur Y adalah tertutup kabur.*

Bukti Misalkan f fungsi selanjar kabur dari ruang Hausdorff padat-C kabur X ke dalam ruang Hausdorff kabur Y. Misalkan Q subset tertutup kabur di dalam X dan $y_q \notin f(Q)$ suatu titik kabur. Maka untuk setiap titik kabur $z_p \in f(Q)$, pilih $N(z_p)$ kejiranan terbuka kabur bagi z_p di dalam $f(Q)$ sehingga $y_q \notin tpn[N(z_p)]$. Maka perhatikan yang $\Gamma = \{f^{-1}(N(z_p))\}$ untuk pungutan $z_p \in f(Q)$ merupakan tudung terbuka kabur bagi Q di dalam X, iaitu $Q \subseteq \bigcup_{x_p} f^{-1}(N(x_p))$. Oleh kerana X padat-C kabur, maka wujud $i = 1, 2, ..., n$ sehingga $Q \subseteq tpn[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(N(x_{pi}))]$. Dengan sifat keselanjaran kabur, $f(Q) \subseteq$

$tpn[\bigcup_{i=1}^{n} N(x_{pi})]$. Maka $Y \setminus tpn[\bigcup_{i=1}^{n} N(x_{pi})]$ adalah kejiranan terbuka kabur bagi y_q sehingga $(Y \setminus tpn[\bigcup_{i=1}^{n} N(x_{pi})]) \cap f(Q) = \emptyset$. Ini bermakna $Y \setminus f(Q)$ terbuka kabur dan $f(Q)$ tertutup kabur. Oleh itu f merupakan fungsi tertutup kabur.

Sekarang kami perkenalkan konsep yang selari dengan *Hausdorff minimum* dalam konteks topologi kabur.

Takrif 2 *Rtk (X, τ) disebut ruang Hausdorff minimum kabur jika dan hanya jika τ merupakan topologi Hausdorff kabur dan tidak wujud topologi Hausdorff lain yang lebih lemah secara tegas daripada τ.*

Seperti di dalam [8], kami akan berikan analogi hubungan di antara ruang Hausdorff minimum kabur dengan ruang Hausdorff padat-C kabur.

Teorem 3 *Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff kabur. Jika (X, τ) padat-C kabur , maka (X, τ) merupakan ruang Hausdorff minimum kabur.*

Bukti Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff C-padat kabur dan (X, τ') ruang Hausdorff kabur sehingga $\tau' \subseteq \tau$. Misalkan id fungsi identiti kabur dari (X, τ) kepada (X, τ'). Dengan Teorem 2 dan oleh sebab id adalah homeomorfisma kabur, maka $\tau' \subseteq \tau$. Oleh itu $\tau' = \tau$. Oleh yang demikian, (X, τ) merupakan ruang Hausdorff minimum kabur.

3 Bentuk Setara Ruang Padat-C

Dalam bahagian ini, kami bincangkan bentuk setara padat-C kabur melalui konsep penumpuan adheren bagi asas turas terbuka kabur di dalam ruang Hausdorff kabur. Sebelum itu, kami berikan beberapa takrif yang berkenaan.

Takrif 3 *Misalkan A subset kabur di dalam rtk (X, τ). Titik kabur x_p di dalam X disebut titik adheren kabur bagi A jika untuk sebarang subset kabur K di dalam kejiranan kabur N_{x_p}, maka $K \cap A \neq \phi$. Pungutan semua titik adheren kabur bagi A disebut subset adheren kabur bagi A dan dilambangkan Adh(A).*

Takrif 4 *Turas kabur di dalam rtk (X, τ) merupakan famili subset kabur $\vartheta = \{F_i\}$ bagi X dengan sifat berikut:*

(i) Jika F_i, $F_j \in \vartheta$, maka $F_i \cap F_j \in \vartheta$;

(ii) Jika $F_i \in \vartheta$ dan $F_i \subseteq F_j$, maka $F_j \in \vartheta$;

(iii) $\phi \notin \vartheta$

Subfamili β bagi ϑ disebut asas turas kabur di dalam ϑ jika dan hanya jika untuk sebarang $F \in \vartheta$, wujud $B \in \beta$ sehingga $B \subseteq F$.

Takrif 5 *Asas turas kabur β di dalam rtk (X, τ) di sebut menumpu adheren kabur terhadap titik kabur $x_p \in X$ jika $\forall N \in N_{x_p}$, wujud $B \in \beta$ sehingga $B \subseteq N$.*

Teorem 4 *Rtk Hausdorff (X, τ) adalah padat-C kabur jika dan hanya jika setiap asas turas terbuka kabur menumpu adheren kabur di dalam X.*

Bukti Misalkan (X,τ) rtk Hausdorff yang padat-C kabur dan β asas turas terbuka kabur di dalam X. Misalkan A subset adheren kabur bagi β dan N suatu kejiranan terbuka kabur bagi A. Perhatikan bahawa $\{[tpn(B_i)]^p : B_i \in \beta\}$ mengandungi N^p , yang N^p bermaksud pelengkap bagi N. Ini bermakna $N^p \subseteq \bigcup([tpn(B_i)]^p), \forall B_i \in \beta$. Oleh kerana X padat-C kabur, maka wujud $B_i \in \beta, i = 1,2,...,n$ sehingga $N^p \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(tpn[tpn(B_i)]^p)$ dan $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(tpn[tpn(B_i)]^p)^p \subseteq N$. Oleh itu β menumpu adheren kabur.

Sebaliknya, misalkan setiap asas turas terbuka kabur menumpu adheren kabur. Misalkan pula X bukan padat-C kabur. Pilih tudung terbuka kabur Γ bagi suatu subset tertutup kabur D di dalam X sehingga D tidak terkandung di dalam tutupan kabur kesatuan terhingga unsur Γ. Maksudnya $D \not\subset tpn(\bigcup_{i=1}^{n} K_i), K_i \in \Gamma$. Jika Γ tertutup kabur terhadap kesatuan terhingga subset kabur , maka subset adheren kabur bagi asas turas terbuka kabur $\{[tpn(K)]^p : K \in \Gamma\}$ terkandung di dalam D^p. Namun tiada unsur asas turas kabur sedemikian terkandung di dalam D^p. Dengan Takrif 5., asas turas kabur tidak menumpu adheren kabur di dalam X. Ini merupakan percanggahan. Oleh itu X padat-C kabur.

4 Seminormal Kabur dan Padat-C Kabur

Dalam bahagian ini, kami perkenalkan konsep seminormal kabur dan melihat hubungan ruang tertutup mutlak seminormal kabur terhadap padat-C kabur.

Takrif 6 *Ruang Hausdorff kabur (X,τ) di sebut seminormal kabur jika diberikan subset tertutup kabur Q dan tudung terbuka kabur Γ bagi Q , maka wujud subset terbuka sekata kabur S dengan sifat $Q \subseteq S \subseteq \Gamma$. Dalam konteks ini set terbuka kabur S dikatakan sekata jika $S = pdl(tpn(S))$.*

Teorem 5 *Ruang Hausdorff kabur (X,τ) adalah seminormal kabur jika dan hanya jika diberikan sebarang dua subset tertutup kabur Q dan V yang tak bercantum di dalam X, maka wujud subset terbuka kabur P dengan sifat $Q \subseteq tpn(P)$ dan $tpn(P) \cap V = \phi$.*

Bukti Misalkan (X,τ) ruang seminormal Hausdorff kabur, Q subset tertutup kabur di dalam X dan V subset tertutup kabur yang tak bercantum dengan Q. Pilih set terbuka sekata kabur J dengan $V \subseteq J \subseteq X \setminus Q$. Maka $Q \subseteq tpn(X \setminus J)$ dan $[tpn(X \setminus J)] \cap V = \phi$.

Sebaliknya, misalkan syarat tersebut di penuhi, V subset tertutup kabur dan U subset terbuka kabur di dalam X. Pilih subset terbuka kabur P di dalam X dengan sifat $X \setminus U \subseteq tpn(P)$ dan $tpn(P) \cap V = \phi$. Maka $X \setminus [tpn(P)]$ merupakan subset terbuka sekata kabur yang mengandungi V dan terkandung di dalam U. Oleh itu X seminormal kabur.

Takrif 7 *Ruang Hausdorff kabur (X,τ) dikatakan tertutup mutlak kabur jika dan hanya jika untuk setiap homeomorfisma kabur f dari X kepada suatu subruang kabur bagi ruang Hausdorff kabur (Y,ρ), $f(X)$ tertutup kabur di dalam Y.*

Teorem 6 *Setiap ruang tertutup mutlak seminormal kabur adalah padat-C kabur.*

Bukti Misalkan X ruang tertutup mutlak seminormal kabur dan $\beta = \{B_i\}$ asas turas terbuka kabur bagi X dengan set adheren kabur A dan N kejiranan terbuka kabur bagi A. Oleh kerana X Hausdorff seminormal, maka wujud subset terbuka sekata kabur S dengan $A \subseteq S \subseteq N$. Oleh kerana X Hausdorff tertutup mutlak kabur, maka wujud suatu unsur

β yang terkandung di dalam S dan dengan itu di dalam N. Dengan Teorem 4, maka X padat-C kabur.

Catatan: Perhatikan bahawa: Padat kabur $\Rightarrow$ padat-C kabur $\Rightarrow$ Hausdorff minimum kabur $\Rightarrow$ tertutup mutlak kabur.

5 Padat-C Pinggiran Kabur

Dalam bahagian terakhir ini kami perkenalkan konsep kepadatan-C pinggiran.

Takrif 8 *Ruang Hausdorff kabur (X, τ) disebut padat-C pinggiran kabur jika wujud sistem kejiranan kabur untuk setiap titik kabur bagi X, yang terdiri daripada subset terbuka kabur N dengan sifat bahawa diberikan subset tertutup kabur Q bagi $[tpn(N)]\backslash N$ dan Γ tudung terbuka kabur bagi Q, maka wujud $P_i, i = 1, 2, ..., n$, sehingga $Q \subseteq tpn_X(\bigcup_{i=1}^{n} P_i)$.*

Pencirian ruang padat-C kabur melalui konsep padat-C pinggiran kabur dan tertutup mutlak kabur boleh dinyatakan sebagai berikut.

Teorem 7 *Ruang Hausdorff kabur (X, τ) adalah padat-C kabur jika ia tertutup mutlak kabur yang padat-C pinggiran kabur.*

Bukti Misalkan (X, τ) ruang Hausdorff tertutup mutlak kabur yang padat-C pinggiran kabur dipenuhi. Misalkan Γ tudung terbuka sekata kabur bagi X dan $P \in \Gamma$. Pilih untuk setiap titik kabur $x_r \in P$, suatu kejiranan padat-C pinggiran kabur $V(x_r)$ bagi x_r dengan $V(x_r) \subseteq P$. Pilih daripada tudung terbuka $V_X = (\Gamma\backslash\{P\}) \cup \{V(x_r) : x_r \in P\}$, suatu unsur $V_i \in \Gamma\backslash\{P\}$, $i = 1, 2, ..., n$ dan $V(x_j) \in \{V(x_r) : x_r \in P\}$, $j = 1, 2, ..., m$ dengan $X = tpn[(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} V(x_j))]$. Misalkan $V_k^{(i)} \in \Gamma\backslash\{P\}$, $k = 1, 2, ..., n_i$, sehingga $tpn(V(x_j))\backslash\{P\} \subseteq tpn[\bigcup_{k=1}^{n_i}(V_k^{(i)})]$, $i = 1, 2, ..., m$. Maka didapati bahawa $X = P \cup tpn[\bigcup_{i=1}^{n} V_i] \cup \bigcup_{i;k}^{m;n_i} V_k^{(i)})$ sehingga X padat-C kabur.

Rujukan

[**1**] M.K.Chakraborty & T.M.G.Ahsanullah , *Fuzzy Topology on Fuzzy Sets and Tolerance Topology*, Fuzzy Sets and Systems **45** (1992), 103–108.

[**2**] C.L.Chang, *Fuzzy Topological Spaces*, J. Math. Anal. Appl. **24** (1968), 182–190.

[**3**] M.A. De Prada Vicente & M.Saralegui Aranguren, *Fuzzy Filters*, J. Math. Anal. Appl. **129** (1988), 560–568.

[**4**]B.W. Hutton, *Normality in Fuzzy Topological Spaces*, J. Math Anal. Appl. **50** (1975), 74–79.

[**5**] Pu, Pao-Ming & Liu, Ying-Ming, *Fuzzy Topology 1: Neighbourhood Structure of Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence*. J. Math Anal. Appl. **76** (1980), 571–599.

[**6**] M. Sarkar, *On Fuzzy Topological Spaces*, J. Math Anal. Appl. **79** (1981), 384–394.

[**7**] R. Srivastava, S. N.Lal & A.K.Srivastava, *Fuzzy Hausdorff Topological Spaces*, J. Math Anal. Appl. **81** (1981), 497–506.

[**8**] G. Viglino, *C-compact Spaces*, Duke J. Math **36** (1969), 761–764.

[**9**] G. Viglino, *Seminormal and C-compact Spaces*, Duke J. Math **38** (1971), 57–61.

[**10**] C.K. Wong, *Covering Properties of Fuzzy Topological Spaces*, J. Math Anal. Appl. **43** (1973), 697–704.

[**11**] C.K. Wong, *Fuzzy Points and Local Properties of Fuzzy Topology*, J. Math Anal. Appl. **46** (1974), 316–328.

[**12**] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, J. Inform. Control **8** (1965), 338–353.