Matematika, 1999, Jilid 15, bil. 2, hlm. 143–156

Kuasa Dua Tensor Yang Tak Abelan bagi Kumpulan-Dua dengan Dua Penjana yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua

Nor Haniza Sarmin
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor

Abstrak Hasil darab tensor yang tak abelan berasal dari teori homotopi dan diperkenalkan oleh R. Brown dan J.-L. Loday dalam tahun 1984. Dalam kertas kerja ini kita akan fokuskan kepada kuasa dua tensor yang tak abelan bagi suatu kumpulan G.

Berdasarkan kepada klasifikasi bagi kumpulan-p dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua dengan p suatu nombor ganjil, M. Bacon dan L.-C. Kappe menentukan kuasa dua tensor bagi kumpulan tersebut. Dalam kertas kerja ini, kita akan menentukan kuasa dua tensor bagi kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua berdasarkan kepada klasifikasi mereka.

Katakunci Kuasa dua tensor, kumpulan-dua, dua penjana, kelas nilpoten dua.

Abstract *The nonabelian tensor product has its origin in homotopy theory and was introduced by R. Brown and J.-L. Loday in 1984. In this paper we focus on the nonabelian tensor squares of a group G.*

Based on the classification of 2-generator p-groups of class 2 for p odd, M. Bacon and L.-C. Kappe determined the nonabelian tensor squares of these groups. In this paper we will determine the nonabelian tensor squares of two-generator two groups of class two based on their classification.

Keywords *Nonabelian tensor squares, two-groups, two-generator, nilpotency class two.*

1 Pengenalan

Kuasa dua tensor yang tak abelan, $G \otimes G$, bagi satu kumpulan G adalah dijana oleh simbol-simbol $g \otimes h$, $g, h \in G$, bergantung kepada hubungan

$$gg' \otimes h = ({}^g g' \otimes {}^g h)(g \otimes h) \quad \text{dan} \quad g \otimes hh' = (g \otimes h)({}^h g \otimes {}^h h'),$$

bagi semua $g, g', h, h' \in G$, dengan ${}^g g' = gg'g^{-1}$. Kuasa dua tensor yang tak abelan adalah satu kes yang istimewa bagi hasil darab tensor yang mempunyai asalannya dari teori homotopi. Ia diperkenalkan oleh R. Brown dan J.-L. Loday dalam [4] dan [5], yang memperluaskan ide J.H.C. Whitehead dalam [10]. Dalam kertas kerja ini kita akan tentukan kuasa dua tensor bagi kumpulan dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua yang mana klasifikasinya diberikan oleh N. Sarmin dalam [9] dan kita nyatakan di sini dalam Teorem 1.1.

Teorem 1.1 [9]*Katakan G adalah satu kumpulan-dua yang finit, bukan abelan, dengan dua penjana dan mempunyai kelas nilpoten dua. Maka G adalah berisomorfisma dengan hanya satu daripada empat kumpulan-kumpulan di bawah:*

(1.1.1) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b] = c$, $[a,c] = [b,c] = 1$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $|c| = 2^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$;

(1.1.2) $G \cong \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b] = a^{2^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $|[a,b]| = 2^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2\gamma$, $\beta \geq \gamma$, $\alpha + \beta > 3$;

(1.1.3) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, *dengan* $[a,b] = a^{2^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b] = a^{-2^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-2^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $|c| = 2^{\sigma}$, $|[a,b]| = 2^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{N}$, $\beta \geq \gamma > \sigma$, $\alpha + \sigma \geq 2\gamma$;

(1.1.4) $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\langle b\rangle$, *dengan* $|a| = |b| = 2^{\gamma+1}$, $|[a,b]| = 2^{\gamma}$, $|c| = 2^{\gamma-1}$, $[a,b] = a^2c$, $[c,b] = a^{-4}c^{-2}$, $a^{2^{\gamma}} = b^{2^{\gamma}}$, $\gamma \in \mathbb{N}$.

Kumpulan-kumpulan dalam senarai di atas adalah tidak berisomorfisma pasangan demi pasangan dan mempunyai kelas nilpoten dua.

Dalam [3], R. Brown, D.L. Johnson, dan E.F. Robertson memulakan pencarian bagi kuasa dua tensor yang tak abelan yang dipertimbangkan sebagai objek-objek teori kumpulan. Satu daripada hasrat mereka ialah untuk melakukan pengiraan tak tersirat bagi kuasa dua tensor yang tak abelan. Sejak dari itu, banyak kertas kerja yang mengandungi pengiraan kuasa dua tensor yang tak abelan dikeluarkan . Bagi mendapatkan maklumat yang lengkap berkenaan kuasa dua tensor yang tak abelan yang telah ditentukan, sila rujuk pada [8]. Dalam konteks kertas kerja ini, hasil keputusan D.L. Johnson bagi kuasa dua tensor yang tak abelan bagi satu kumpulan metakitaran yang belahan dan finit (*finite split metacyclic group*) adalah dirujuk.

Teorem 1.2 [7] *Katakan G adalah satu kumpulan metakitaran yang belahan dan finit yang diberikan oleh*

$$G = \langle x, y \mid y^n = x^m = 1, xyx^{-1} = y^l, l^m \equiv 1 \bmod n\rangle.$$

Maka $G \otimes G$ adalah kumpulan yang abelan dengan penjana-penjana $y \otimes y$, $x \otimes x$, $(x \otimes y)(y \otimes x)$, $x \otimes y$ dan hubungan-hubungan

$$\begin{aligned}
(y \otimes y)^n &= (y \otimes y)^{2(l-1)} = (x \otimes x)^m = (x \otimes y)^n = 1_{\otimes}, \\
\big((x \otimes y)(y \otimes x)\big)^n &= \big((x \otimes y)(y \otimes x)\big)^{l-1} = \big((x \otimes y)(y \otimes x)\big)^{1+l+\ldots+l^{m-1}} = 1_{\otimes}, \\
(x \otimes y)^{1+l+\ldots+l^{m-1}} &= (y \otimes y)^{(l-1)^2 m(m-1)/4}.
\end{aligned}$$

Untuk menentukan kuasa dua tensor yang tak abelan bagi kumpulan dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, kita akan gunakan klasifikasi mereka yang telah diberikan dalam Teorem 1.1. Dalam [2], semua kumpulan-p dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, p suatu nombor perdana ganjil, telah diklasifikasikan dan kuasa dua tensor mereka ditentukan.

Seperti yang dijangkakan, kes $p = 2$ adalah lebih kompleks oleh kerana kumpulan-kumpulan tersebut adalah tidak nalar dan tidak semestinya belahan perpanjangan (*split extensions*). Sebagai akibatnya, kita terpaksa mempertimbangkan subkes-subkes tambahan semasa mengira kuasa dua tensor yang tak abelan mereka.

Dalam Usulan 3.1 dalam [2] telah ditunjukkan bahawa kuasa dua tensor bagi kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua adalah abelan. Seperti dalam [2], fakta ini menolong kita untuk menggunakan konsep pasangan pangkah (*crossed pairing*) dalam pengiraan kita. Kita takrifkannya di sini dalam kes yang relevan kepada kuasa dua tensor yang tak abelan. Bagi kes hasil darab tensor yang tak abelan yang umum, kita rujuk kepada [3].

Takrif 1.1 *Katakan G dan L adalah kumpulan-kumpulan. Satu fungsi $\phi : G \times G \to L$ dinamakan satu pasangan pangkah jika*

$$\phi(gg', h) = \phi({}^g g', {}^g h)\phi(g, h), \tag{1}$$
$$\phi(g, hh') = \phi(g, h)\phi({}^h g, {}^h h'), \tag{2}$$

bagi semua $g, g', h, h' \in G$.

Pasangan pangkah membolehkan kita untuk menentukan imej homomorfisma bagi $G \otimes G$ sebagai berikut.

Usulan 1.1 [3] *Satu pasangan pangkah $\phi : G \times G \to L$ menentukan satu homomorfisma yang unik bagi kumpulan-kumpulan $\phi^\star : G \otimes G \to L$ dengan keadaan $\phi^\star(g \otimes h) = \phi(g, h)$ bagi semua $g, h \in G$.*

Jika G adalah satu kumpulan nilpoten yang finit, maka dari Usulan 11 dalam [3], $G \otimes G$ adalah hasil darab langsung bagi kuasa dua-kuasa dua tensor bagi subkumpulan-subkumpulan Sylow bagi G. Oleh itu kuasa dua tensor yang tak abelan bagi satu kumpulan yang finit dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua hanyalah hasil darab langsung bagi kuasa dua-kuasa dua tensor yang tak abelan bagi kumpulan-p yang akan ditentukan di dalam kertas kerja ini dan dalam [2], dan beberapa tensor yang abelan bagi kes komponen-komponen Sylow yang abelan.

Sebagai penutup, kita patut sebutkan di sini satu kertas kerja yang ditulis oleh Hartl [6]. Dengan menggunakan dan memperluaskan idea dari [1], beliau membangunkan satu kaedah untuk mengira kuasa dua tensor yang tak abelan bagi kumpulan-kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua dan menggunakan kaedah tersebut untuk mengira beberapa kuasa dua tensor yang tak abelan bagi kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua.

2 Kuasa Dua Tensor bagi Kumpulan-kumpulan yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua

Dalam seksyen ini kita berikan beberapa keputusan-keputusan umum bagi kuasa dua tensor yang tak abelan (mulai dari ini dirujuk sebagai kuasa dua tensor) dan juga beberapa keputusan yang khusus bagi kumpulan-kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua. Kita juga berikan satu lema yang berkaitan dengan teori nombor. Semua keputusan ini akan digunakan dalam seksyen yang berikutnya.

Usulan 2.1 *Katakan G, H, K, L adalah kumpulan-kumpulan dengan $\pi : H \to G$ adalah satu epimorfisma, $\varphi : K \to L$ satu homomorfisma, dan $\Gamma : H \times H \to K$ satu pasangan pangkah. Jika $\Gamma(inti\, \pi, H)$ dan $\Gamma(H, inti\, \pi)$ berada dalam inti φ, maka wujud satu pasangan pangkah $\Delta : G \times G \to L$ yang menjadikan gambarajah di bawah kalis tukar tertib:*

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "(\pi,\pi)"'] & K \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times G \arrow[r, "\Delta"] & L \end{tikzcd}$$

Bukti Oleh kerana π adalah satu epimorfisma, kita dapati $i : G \to H/\text{inti}\,\pi$ juga adalah satu epimorfisma. Kita takrifkan satu pemetaan $\Delta' : H/\text{inti}\,\pi \times H/\text{inti}\,\pi \to L$ dengan $\Delta'(h \text{ inti } \pi, h' \text{ inti } \pi) = \varphi(\Gamma(h, h'))$, dengan $h, h' \in H$. Kita tunjukkan bahawa Δ' adalah satu pasangan pangkah. Mula-mula kita tunjukkan bahawa Δ' adalah tertakrif rapi (*well-defined*). Perhatikan bahawa bagi $h_1, h_2, h' \in H$ kita dapati $\Gamma(h_2h_1^{-1}, h') = \Gamma(h_1^{-1}({}^{h_1}h_2), h')$, dan oleh itu

$$\Gamma(h_2h_1^{-1}, h') = \Gamma(h_2, h') \cdot \Gamma(h_1, h')^{-1}. \tag{3}$$

Sekarang katakan $h_1, h_2 \in H$ supaya $h_1 \text{ inti}\,\pi = h_2 \text{ inti}\,\pi$. Maka, oleh kerana $\Gamma(\text{inti}\,\pi, H) \subseteq \text{inti}\,\varphi$ dan $h_2h_1^{-1} \in \text{inti}\,\pi$, persamaan (3) memberikan

$$1_L = \varphi(\Gamma(h_2h_1^{-1}, h')) = \varphi(\Gamma(h_2, h')) \cdot \varphi(\Gamma(h_1, h'))^{-1}.$$

Oleh itu $\varphi(\Gamma(h_1, h')) = \varphi(\Gamma(h_2, h'))$. Dengan cara yang sama, kita perolehi $\varphi(\Gamma(h', h_1)) = \varphi(\Gamma(h', h_2))$. Kita rumuskan bahawa Δ' adalah tertakrif rapi. Adalah mudah untuk menentusahkan bahawa Δ' adalah satu pasangan pangkah.

Bagi $\Delta = \Delta' \circ (i, i)$ gambarajah tersebut adalah kalis tukar tertib. Ini boleh dilihat seperti berikut. Katakan $h, h' \in H$. Maka $\Delta \circ (\pi, \pi)(h, h') = \Delta(\pi(h), \pi(h')) = \varphi(\Gamma(h, h'))$. Oleh itu $\Delta \circ (\pi, \pi) = \varphi \circ \Gamma$. $\square$

Tiga lema yang berikut mengikhtisarkan keputusan-keputusan yang diperolehi bagi kuasa dua tensor bagi kumpulan-kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua. Mereka, bersama-sama dengan bukti mereka, boleh didapati dalam [2].

Lema 2.1 [2] *Katakan G adalah satu kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua, maka bagi sebarang $x, y \in G$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$x^n \otimes y^m = (x \otimes y)^{nm} (y \otimes [x, y])^{n\binom{m}{2}} (x \otimes [x, y])^{m\binom{n}{2}}.$$

Bagi satu kumpulan dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua, kita mempunyai rumus kembangan berikut.

Lema 2.2 [2] *Katakan $G = \langle a, b \rangle$ adalah satu kumpulan yang mempunyai kelas nilpoten dua, dan $g, h \in G$ dengan $g = a^m b^n z^l$ dan $h = a^{m'} b^{n'} z^{l'}$, yang mana $m, m', n, n', l, l' \in \mathbb{Z}$, dan $z = [a, b]$. Maka*

$$g \otimes h = (a \otimes a)^{\alpha_1} (b \otimes b)^{\alpha_2} (a \otimes b)^{\alpha_3} (b \otimes a)^{\alpha_4} (a \otimes z)^{\alpha_5} (b \otimes z)^{\alpha_6},$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= mm',\ \alpha_2 = nn',\ \alpha_3 = mn',\ \alpha_4 = nm', \\ \alpha_5 &= ml' - m'l + n'\binom{m}{2} - n\binom{m'}{2} + mm'(n' - n), \\ \alpha_6 &= nl' - n'l + m\binom{n'}{2} - m'\binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Dalam kes kumpulan Heisenberg $\mathcal{H}$, satu kumpulan bebas yang mempunyai kelas nilpoten dua dan pangkat dua, kembangan di atas menghasilkan satu pasangan pangkah.

Lema 2.3 [2] *Katakan $\mathcal{H} = F_2/\gamma_3(F_2) = \langle x, y \rangle$ dan $g, h \in \mathcal{H}$ dengan $g = x^m y^n z^l$ dan $h = x^{m'} y^{n'} z^{l'}$, yang mana $m, m', n, n', l, l' \in \mathbb{Z}$, dan $z = [x, y]$. Maka pemetaan $\psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{Z}^6$, yang ditakrifkan secara berkomponen sebagai $\psi(g, h) = (x_1(g, h), ..., x_6(g, h))$, dengan*

$$\begin{aligned} x_1(g, h) &= mm', \quad x_2(g, h) = nn', \quad x_3(g, h) = mn', \quad x_4(g, h) = nm', \\ x_5(g, h) &= ml' - m'l + n'\binom{m}{2} - n\binom{m'}{2} + mm'(n' - n), \\ x_6(g, h) &= nl' - n'l + m\binom{n'}{2} - m'\binom{n}{2}, \end{aligned}$$

adalah satu pasangan pangkah.

Akhir sekali, kita akan perlukan lema di bawah yang berkaitan dengan teori nombor dalam seksyen yang akan datang.

Lema 2.4 *Katakan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ supaya $2\gamma \leq \alpha, \gamma \leq \beta$. Bagi $n \in \mathbb{N}$, kita tandakan $[n]_2$ sebagai kuasa tertinggi bagi 2 yang membahagi n. Maka*

$$(2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma} + 1)^{2^\beta} \equiv 1 \bmod 2^\alpha; \tag{4}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{2^\beta - 1} (2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma} + 1)^k\right]_2 = \begin{cases} \beta + 1, & \text{jika } \alpha = 2 \text{ dan } \gamma = 1, \\ \beta, & \text{selainnya.} \end{cases} \tag{5}$$

Bukti-bukti bagi (4) and (5) adalah mudah dan kita tinggalkan.

3 Pengiraan Bagi Kuasa Dua Tensor

Dalam seksyen ini kita tentukan kuasa dua tensor bagi kumpulan-dua dengan dua penjana yang mempunyai kelas nilpoten dua. Mengikut Teorem 1.1, kita terpaksa menghadapi empat kes yang berlainan. Kita akan mulakan dengan kumpulan-kumpulan dari jenis (1.1.2). Kumpulan tersebut adalah kumpulan kitaran yang belahan perpanjangan (*split cyclic extension*), dan oleh itu kita boleh gunakan Teorem 1.2 untuk mengira kuasa dua tensornya.

Teorem 3.1 *Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.2), iaitu $G \cong \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, dengan $[a, b] = a^{2^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $|[a, b]| = 2^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ yang mana $\alpha \geq 2\gamma$, $\beta \geq \gamma$, $\alpha + \beta > 3$. Maka*

$$G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{2^{\alpha-\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \times \mathbb{Z}_{2^{\min\{\alpha-\gamma,\beta\}}} \times \mathbb{Z}_{2^{\min\{\alpha,\beta\}}}.$$

Bukti Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.2). Kita boleh lihat bahawa G adalah satu belahan perpanjangan yang metakitaran yang dijana oleh a, b, bergantung kepada hubungan tertakrif $a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1$, dan $bab^{-1} = a^{2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma}+1}$. Dari (4) kita perolehi $(2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma} + 1)^{2^\beta} \equiv 1 \bmod 2^\alpha$. Maka G memenuhi syarat-syarat dalam Teorem 1.2 dengan $x = b$, $y = a$, $m = 2^\beta$, $n = 2^\alpha$ dan $l = 2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma} + 1$. Oleh itu $G \otimes G$ adalah satu kumpulan abelan yang dijana oleh $a \otimes a$, $b \otimes b$, $(b \otimes a)(a \otimes b)$, dan $b \otimes a$ dengan hubungan-hubungan yang diberikan dalam Teorem 1.2, iaitu $\langle b \otimes a \rangle \cap \langle a \otimes a \rangle = \langle (a \otimes a)^k \rangle$, dengan $k = \frac{1}{4}(l-1)^2 m(m-1)$. Kita akan tunjukkan bahawa $(a \otimes a)^k = 1_\otimes$ di bawah anggapan bahawa $\alpha + \beta > 3$. Dari Teorem 1.2 kita dapati $(a \otimes a)^{2(l-1)} = 1_\otimes$. Untuk membuktikan $(a \otimes a)^k = 1_\otimes$, kita hanya perlu membuktikan $(l - 1)m \equiv 0 \bmod 2^3$. Perhatikan bahawa $[(l - 1)m]_2 = \alpha + \beta - \gamma$. Dari (1.1.2) kita perolehi $\alpha \geq 2\gamma$ and $\beta \geq \gamma$. Jika $\alpha > 2\gamma$ atau $\beta > \gamma$, maka adalah jelas $\alpha + \beta - \gamma \geq 3$. Jika $\alpha = 2\gamma$ dan $\beta = \gamma$, maka $\alpha + \beta - \gamma = 2\gamma$. Oleh kerana $\alpha + \beta > 3$, ini mengimplikasikan $\alpha + \beta - \gamma > 3$. Maka $2(l - 1)$ membahagi k dan $(a \otimes a)^k = 1_\otimes$. Dari Teorem 1.2 kita perolehi sekarang $G \otimes G = \langle a \otimes a \rangle \times \langle b \otimes b \rangle \times \langle (b \otimes a)(a \otimes b) \rangle \times \langle b \otimes a \rangle$.

Apa yang perlu diperbuat sekarang ialah mengira peringkat bagi faktor-faktor tersebut secara tak tersirat. Peringkat bagi faktor pertama dan kedua adalah $(n, 2(l - 1)) = 2^{\alpha-\gamma+1}$ dan 2^β, masing-masing. Peringkat bagi faktor ketiga ialah $(n, l - 1, 1 + l + ... + l^{m-1})$, dan peringkat bagi faktor keempat ialah $(n, 1+l+...+l^{m-1})$. Sekarang, katakan $\alpha = 2$ dan $\gamma = 1$. Maka dari (5) kita dapati $(n, l-1, 1+l+...+l^{m-1}) = (2^2, 2, 2^{\beta+1}) = 2$ dan $(n, 1+l+...+l^{m-1}) = (2^2, 2^{\beta+1}) = 2^2$. Kita rumuskan $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{2^2}^2 \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \times \mathbb{Z}_2$ dalam kes ini. Tetapi $\alpha = 2$ dan $\gamma = 1$ mengimplikasikan $2 = \alpha - \gamma + 1$, $1 = \min\{\alpha - \gamma, \beta\}$, dan $2 = \min\{\alpha, \beta\}$. Oleh itu kita dapati keputusan yang dikehendaki. Sekarang katakan sebaliknya. Dari (5), kita perolehi $(n, l-1, 1+l+...+l^{m-1}) = (2^\alpha, 2^\alpha - 2^{\alpha-\gamma}, 2^\beta) = \min\{2^{\alpha-\gamma}, 2^\beta\}$ dan $(n, 1+l+...+l^{m-1}) = (2^\alpha, 2^\beta) = \min\{2^\alpha, 2^\beta\}$, keputusan yang dikehendaki. □

Sekarang kita akan kirakan kuasa dua tensor bagi kumpulan dari jenis (1.1.1). Buktinya adalah seperti dalam Teorem 4.3 dalam [2], iaitu kes di mana $p \neq 2$. Walau bagaimana pun, kita terpaksa berdepan dengan satu pengecualian bagi kes $p = 2$.

Teorem 3.2 *Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.1), iaitu $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$, dengan $[a,b] = c$, $[a,c] = [b,c] = 1$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $|c| = 2^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Maka*

$$G \otimes G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\beta}^3 \times \mathbb{Z}_{2^\gamma}^2, & \textit{jika } \beta > \gamma, \\ \mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{min\{\alpha-1,\gamma\}}} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}, & \textit{jika } \beta = \gamma. \end{cases}$$

Bukti Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.1). Kita mempunyai dua kes, iaitu $\beta > \gamma$ dan $\beta = \gamma$. Kes yang pertama adalah seperti yang ditunjukkan dalam Teorem 4.3 dalam [2], dengan disetkan $p = 2$ dan $\beta > \gamma$. Oleh itu kita tinggalkan perinciannya.

Sekarang katakan $\beta = \gamma$. Dari Lema 2.2, kita dapati

$$G \otimes G = \langle a \otimes a, b \otimes b, a \otimes b, (a \otimes b)(b \otimes a), (a \otimes b)^2(a \otimes c), (a \otimes b)^2(b \otimes c)\rangle.$$

Dengan set janaan ini kita tunjukkan $G \otimes G$ mempunyai peringkat sebanyak-banyaknya seperti yang diberi. Kembangan langsung memberikan $(a \otimes a)^{2^\alpha} = (b \otimes b)^{2^\gamma} = 1_\otimes$. Bagi dua penjana yang seterusnya, kembangan menggunakan Lema 2.1 memberikan $1_\otimes = (a \otimes b^{2^\gamma})^2 = ((a \otimes b)^{2^\gamma}(b \otimes c)^{2^{\gamma-1}})^2 = (a \otimes b)^{2^{\gamma+1}}(b \otimes c)^{2^\gamma} = (a \otimes b)^{2^{\gamma+1}}$, dan $1_\otimes = (a \otimes b^{2^\gamma})(b^{2^\gamma} \otimes a) = (a \otimes b)^{2^\gamma}(b \otimes c)^{2^{\gamma-1}}(b \otimes a)^{2^\gamma}(b \otimes c)^{-2^{\gamma-1}} = ((a \otimes b)(b \otimes a))^{2^\gamma}$. Seterusnya pertimbangkan $(a \otimes b)^2(a \otimes c)$. Menggunakan Lema 2.1, $1_\otimes = a^{2^\alpha} \otimes b = (a \otimes b)^{2^\alpha}(a \otimes c)^{2^{\alpha-1}} = ((a \otimes b)^2(a \otimes c))^{2^{\alpha-1}}$, dan $1_\otimes = (a \otimes b^{2^{\gamma+1}})(a \otimes c^{2^\gamma}) = (a \otimes b)^{2^{\gamma+1}}(a \otimes c)^{2^\gamma} = ((a \otimes b)^2(a \otimes c))^{2^\gamma}$. Oleh itu $|(a \otimes b)^2(a \otimes c)| \leq 2^{\min\{\alpha-1,\gamma\}}$. Akhir sekali, dengan kaedah yang sama menggunakan Lema 2.1, $1_\otimes = a \otimes b^{2^\gamma} = ((a \otimes b)^2(b \otimes c))^{2^{\gamma-1}}$. Maka $|G \otimes G| \leq 2^{\alpha+4\gamma+\min\{\alpha-1,\gamma\}}$.

Katakan $\mathcal{H} = F_2/\gamma_3(F_2) = \langle x, y\rangle$. Takrifkan $\pi : \mathcal{H} \to G$ dengan $\pi(h) = a^m b^n c^l$ bagi $h \in \mathcal{H}$, yang mana $h = x^m y^n z^l$, $m, n, l \in \mathbb{Z}$, $z = [x, y]$. Diikuti bahawa π adalah satu homomorfisma keseluruh G. Kemudian setkan $L = \mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\min\{\alpha-1,\gamma\}}} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}$ dan $\mathbb{Z}^6 = \langle x_1\rangle \times ... \times \langle x_6\rangle$. Takrifkan $\varphi : \mathbb{Z}^6 \to L$ dengan $\varphi = \mu \circ \lambda$, dengan $\lambda : \mathbb{Z}^6 \to \mathbb{Z}^6$ adalah diberi sebagai $\lambda(x_i) = x_i$ bagi $i = 1, 2, 4, 5, 6$, $\lambda(x_3) = x_3 x_4^{-1} x_5^{-2} x_6^{-2}$, dan $\mu : \mathbb{Z}^6 \to L$ menurunkan penjana-penjana bagi $\mathbb{Z}^6$ modulo kuasa-kuasa yang sesuai. Jelas bahawa λ adalah satu automorfisma dan μ adalah satu homomorfisma, oleh itu φ adalah satu homomorfisma dengan $\varphi(x_i) = \epsilon_i$, $i = 1, ..., 6$, dengan $\epsilon_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$,..., $\epsilon_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \in L$.

Sekarang katakan $\Gamma = \psi$ adalah pasangan pangkah dalam Lema 2.3 dengan $\psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{Z}^6$ dan π adalah epimorfisma bagi $\mathcal{H}$ keseluruh G. Dari Usulan 2.1, wujud satu pasangan pangkah $\Delta : G \times G \to L$ dengan syarat

$$\varphi(\psi(\text{inti } \pi, \mathcal{H})) = \varphi(\psi(\mathcal{H}, \text{inti } \pi)) = 1. \tag{6}$$

Kita akan tunjukkan sekarang bahawa (6) adalah benar. Katakan $l = (l_1, ..., l_6) \in L$, dan $h, h' \in \mathcal{H}$ dengan $h = x^m y^n z^l$, $h' = x^{m'} y^{n'} z^{l'}$, yang mana $m, m', n, n', l, l' \in \mathbb{Z}$. Dari Lema 2.3 dan dari takrif φ kita dapati $\varphi \circ \psi(h, h') = \varphi(x_1(h, h'), ..., x_6(h, h')) = (\varphi(x_1(h, h')), ..., \varphi(x_6(h, h'))) = (l_1(h, h'), ..., l_6(h, h'))$ dengan

$$\begin{aligned}
l_1(h,h') &\equiv mm' \bmod 2^{\alpha}, \\
l_2(h,h') &\equiv nn' \bmod 2^{\gamma}, \\
l_3(h,h') &\equiv mn' - m'n - 2\left(n'\binom{m}{2} - n\binom{m'}{2} + (n'-n)mm' + ml' - m'l\right) \\
&\qquad -2\left(m\binom{n'}{2} - m'\binom{n}{2} + nl' - n'l\right) \bmod 2^{\gamma+1}, \\
l_4(h,h') &\equiv nm' \bmod 2^{\gamma}, \\
l_5(h,h') &\equiv n'\binom{m}{2} - n\binom{m'}{2} + (n'-n)mm' + ml' - m'l \bmod 2^{\min\{\alpha-1,\gamma\}}, \\
l_6(h,h') &\equiv m\binom{n'}{2} - m'\binom{n}{2} + nl' - n'l \bmod 2^{\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Katakan sekarang $h \in$ inti π, maka $m \equiv 0 \bmod 2^{\alpha}$ dan $n \equiv l \equiv 0 \bmod 2^{\gamma}$. Dalam kes ini, oleh kerana $\alpha \geq \gamma$, l_1, l_2, l_4, l_5, dan l_6 adalah sejelasnya remeh dalam L. Bagi l_3, sebutan-sebutannya boleh disusun semula sebagai

$$\begin{aligned}
l_3(h,h') \equiv\ & 2m(m'n - m'n' - l') + 2n\left(\binom{m'+1}{2} - l\right) + 2l(m'+n') \\
& -m^2n' + nn^2m' \bmod 2^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

Oleh kerana $\alpha \geq \gamma$, kita dapati $m \equiv n \equiv l \equiv 0 \bmod 2^{\gamma}$. Oleh itu $2m \equiv 2n \equiv 2l \equiv 0 \bmod 2^{\gamma+1}$, dan $m^2 \equiv n^2 \equiv 0 \bmod 2^{\gamma+1}$. Maka l_3 adalah remeh dalam L. Oleh itu $\varphi(\psi(\text{inti } \pi, \mathcal{H})) = 1$. Dengan cara yang sama kita boleh buktikan $\varphi(\psi(\mathcal{H}, \text{inti } \pi)) = 1$. Maka (6) adalah benar.

Oleh kerana gambarajah dalam Usulan 2.1 adalah kalis tukar tertib bagi Δ dan $\varphi \circ \psi$ adalah keseluruh, kita rumuskan bahawa Δ adalah keseluruh. Maka dari Usulan 1.1, Δ mengangkat kepada satu homomorfisma $\Delta^{\star}$ bagi $G \otimes G$ keseluruh L, dan oleh itu $|G \otimes G| \geq |L|$. Oleh kerana $|G \otimes G| \leq |L|$, kita dapati bahawa $\Delta^{\star}$ adalah satu isomorfisma, dan $G \otimes G \cong L$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Dalam teorem yang berikutnya kita akan tentukan kuasa dua tensor bagi kumpulan dari jenis (1.1.3). Kita mulakan dengan membuktikan satu lema yang memberi batas peringkat bagi penjana-penjana bagi kuasa dua tensor tersebut.

Lema 3.1 *Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.3). Maka $G \otimes G$ adalah dijana oleh $a \otimes a$, $b \otimes b$, $(a \otimes b)$, $(a \otimes b)(b \otimes a)$, $(a \otimes a)^{2^{\alpha-\gamma}}(a \otimes [a,b])$ dan $(a \otimes b)^{2^{\alpha-\gamma}}(a \otimes [a,b])^{-2^{\alpha-\gamma-1}}(b \otimes [a,b])$. Bagi peringkat penjana-penjana tersebut, anggaran berikut adalah benar.*

$|b \otimes b| \leq 2^{\beta}$, $|(a \otimes a)^{2^{\alpha-\gamma}}(a \otimes [a,b])| \leq 2^{\sigma}$,

$|(a \otimes b)^{2^{\alpha-\gamma}}(a \otimes [a,b])^{-2^{\alpha-\gamma+1}}(b \otimes [a,b])| \leq 2^{\sigma}$, *dan*

$|(a\otimes b)(b\otimes a)| \leq 2^{\min\{\alpha-\gamma+\sigma,\beta\}}$.

Dan lagi,

$$|a\otimes b| \leq \begin{cases} 2^{\min\{\alpha,\beta\}}, & \textit{jika } \alpha \geq \gamma+2 \textit{ atau } \beta \geq \gamma+1, \\ 2^{\gamma+1}, & \textit{jika } \alpha = \gamma+1 \textit{ dan } \beta=\gamma, \end{cases}$$

$$|a\otimes a| \leq \begin{cases} 2^{\alpha-\gamma+\sigma+1}, & \textit{jika } \alpha \geq \gamma+2 \textit{ atau } \beta \geq \gamma+1, \\ 2^{\gamma}, & \textit{jika } \alpha = \gamma+1 \textit{ dan } \beta=\gamma. \end{cases}$$

Bukti Tuntutan pertama kita bahawa $G\otimes G$ adalah dijana oleh unsur-unsur yang diberikan di atas adalah hasil langsung dari Lema 2.2. Seterusnya kita beralih kepada anggaran peringkat bagi penjana-penjana tersebut. Jika kita setkan $z=[a,b]$, maka $c=za^{-2^{\alpha-\gamma}}$ dari (1.1.3). Bagi $b\otimes b$ kita dapati $1_\otimes = b^{2^\beta}\otimes b = (b\otimes b)^{2^\beta}$, anggaran yang dikehendaki.

Seterusnya kita pertimbangkan $(a\otimes a)^{2^{\alpha-\gamma}}(a\otimes[a,b])$. Dengan mengembangkan $c^{2^\sigma}\otimes a$ menggunakan Lema 2.1 memberikan

$$1_\otimes = c^{2^\sigma}\otimes a = (a\otimes a)^{-2^{\alpha-\gamma+\sigma}}(z\otimes a)^{2^\sigma} = \left((a\otimes a)^{2^{\alpha-\gamma}}(z\otimes a)^{-1}\right)^{-2^\sigma}. \tag{7}$$

Walau bagaimanapun, dari Lema 3.3 dalam [2],

$$([a,b]\otimes a)^{-1} = a\otimes[a,b]. \tag{8}$$

Ini, bersama-sama dengan (7), memberikan anggaran yang dikehendaki dalam kes ini.

Dengan cara yang sama, dari kembangan $c^{2^\sigma}\otimes b$ kita perolehi

$$1_\otimes = c^{2^\sigma}\otimes b = \left((a\otimes b)^{2^{\alpha-\gamma}}(a\otimes z)^{-2^{\alpha-\gamma-1}}(b\otimes z)\right)^{-2^\sigma}, \tag{9}$$

memberikan anggaran yang dikehendaki bagi peringkat bagi $(a\otimes b)^{2^{\alpha-\gamma}}(a\otimes z)^{-2^{\alpha-\gamma-1}}(b\otimes z)$.

Kita beralih sekarang kepada $(a\otimes b)(b\otimes a)$. Kembangan bagi $b\otimes c^{2^\sigma}$ menggunakan Lema 2.1 memberikan

$$1_\otimes = b\otimes c^{2^\sigma} = (b\otimes a)^{-2^{\alpha-\gamma+\sigma}}(a\otimes z)^{-2^{\alpha-\gamma+\sigma-1}}(b\otimes z)^{2^\sigma}. \tag{10}$$

Dengan mendarabkan (9) dan (10), kita perolehi $((a\otimes b)(b\otimes a))^{2^{\alpha-\gamma+\sigma}} = 1_\otimes$, memberikan satu batas kepada peringkat bagi $(a\otimes b)(b\otimes a)$. Untuk mendapatkan batas yang kedua, kita darabkan kembangan bagi $1_\otimes = a\otimes b^{2^\beta}$ dan $1_\otimes = b^{2^\beta}\otimes a$ seperti yang diberikan oleh Lema 2.1. Ini menghasilkan $1_\otimes = ((a\otimes b)(b\otimes a))^{2^\beta}$.

Seterusnya kita dapatkan anggaran bagi peringkat bagi $a\otimes b$. Oleh kerana $\alpha>\gamma$, kembangan bagi $a^{2^\alpha}\otimes b$ menggunakan Lema 2.1 menghasilkan $1_\otimes = (a^{2^\alpha}\otimes b) = (a\otimes b)^{2^\alpha}$. Ini membuktikan tuntutan kita bahawa $\alpha=\gamma+1$ dan $\beta=\gamma$, dan memberikan satu anggaran kepada peringkat bagi kes yang selebihnya, iaitu $\beta\geq\gamma+1$ atau $\alpha\geq\gamma+2$. Dengan mengembangkan $a\otimes b^{2^\beta}$ menggunakan Lema 2.1, kita perolehi $1_\otimes = (a\otimes b)^{2^\beta}(b\otimes z)^{\binom{2^\beta}{2}}$. Jika $\beta\geq\gamma+1$, ini memberikan $1_\otimes = (a\otimes b)^{2^\beta}$, batas kedua yang dikehendaki bagi peringkat bagi $a\otimes b$.

Dalam kes yang selebihnya, iaitu $\beta = \gamma$ dan $\alpha \geq \gamma + 2$, kita teruskan seperti berikut. Dengan mengambil kuasa bagi (9) sebanyak $2^{\gamma-\sigma-1}$ dan songsangkan akan menghasilkan $1_\otimes = (a \otimes b)^{2^{\alpha-1}}(a \otimes z)^{-2^{\alpha-1}}(b \otimes z)^{2^{\gamma-1}}$. Perhatikan bahawa $|a \otimes z| < 2^{\alpha-1}$ dan

$$1_\otimes = (a \otimes b^{2^\gamma}) = (a \otimes b)^{2^\gamma}(a \otimes z)^{-2^{\gamma-1}}, \tag{11}$$

bersama-sama di atas, menghasilkan $1_\otimes = (a \otimes b)^{2^\gamma(2^{\alpha-\gamma+1}+1)}$, dengan $2^{\alpha-\gamma+1}+1$ adalah ganjil oleh kerana $\alpha \geq \gamma + 2$. Ini adalah batas kedua yang dikehendaki bagi kes $\beta = \gamma$ dan $\alpha \geq \gamma + 2$.

Akhir sekali, kita dapatkan anggaran bagi peringkat bagi $a \otimes a$. Lema 2.1 memberikan

$$1_\otimes = a \otimes c^{2^\sigma} = (a \otimes a)^{-2^{\alpha-\gamma+\sigma}}(a \otimes z)^{2^\sigma}. \tag{12}$$

Dengan menyamakan (7) dan (12) akan memberikan $(a \otimes z)^{2^{\sigma+1}} = 1_\otimes$. Oleh itu jika (7) dikuasa duakan , kita akan perolehi $(a \otimes a)^{2^{\alpha-\gamma+\sigma+1}} = 1_\otimes$, anggaran yang dikehendaki bagi kes $\alpha \geq \gamma + 2$ atau $\beta \geq \gamma + 1$. Sekarang katakan $\alpha = \gamma + 1$ dan $\beta = \gamma$. Maka $\gamma > \sigma \geq 2\gamma - \alpha = \gamma - 1$, yang mengimplikasikan $\sigma = \gamma - 1$. Dari (9) kita dapati dalam kes ini selepas disongsangkan, $1_\otimes = (a \otimes b)^{2^\gamma}(a \otimes z)^{2^{\gamma-1}}(b \otimes z)^{2^{\gamma-1}}$. Ini, bersama-sama dengan (11), menghasilkan $1_\otimes = (a \otimes b)^{2^{\gamma+1}}(a \otimes z)^{2^{\gamma-1}}$. Akan tetapi, $(a \otimes b)^{2^{\gamma+1}} = 1_\otimes$ dari di atas. Oleh itu $(a \otimes z)^{2^{\gamma-1}} = 1_\otimes$. Dengan menggunakan (8), kita perolehi dari (7) bahawa $1_\otimes = (a \otimes a)^{2^\gamma}$ dalam kes yang terakhir ini. □

Teorem 3.3 *Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.3), iaitu $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, dengan $[a,b] = a^{2^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b] = a^{-2^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-2^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $|c| = 2^\sigma$,$|[a,b]| = 2^\gamma$, yang mana $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{N}$, $\alpha + \sigma \geq 2\gamma, \beta \geq \gamma > \sigma$. Maka*

$$G \otimes G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^\gamma}^2 \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}^2, & \textit{jika } \alpha = \gamma + 1 \textit{ dan } \beta = \gamma, \\ \mathbb{Z}_{2^{\alpha-\gamma+\sigma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \times \mathbb{Z}_{2^{\min\{\alpha,\beta\}}} \times \mathbb{Z}_{2^\rho} \times \mathbb{Z}_{2^\sigma}^2, & \textit{jika } \alpha \geq \gamma + 2 \textit{ atau } \beta \geq \gamma + 1, \end{cases}$$

dengan $\rho = \min\{\alpha - \gamma + \sigma, \beta\}$.

Bukti Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.3). Mula-mula perhatikan bahawa kita telah merangkumkan semua kes yang mungkin. Jika $\alpha < \gamma + 2$ maka $\alpha = \gamma + 1$, oleh kerana $\gamma + 2 > \alpha \geq 2\gamma - \sigma \geq \gamma + 1$.

Katakan $\mathcal{H} = F_2/\gamma_3(F_2)$. Takrifkan $\pi : \mathcal{H} \to G$ dengan $\pi(h) = a^{m_1}b^{m_2}c^l$, dengan $h = x^{m_1}y^{m_2}v^l$ yang mana $m_1, m_2, l \in \mathbb{Z}$, $v = x^{-2^{\alpha-\gamma}}[x,y]$, dan $a, b, c \in G$ adalah seperti yang diberikan dalam teorem di atas. Didapati bahawa π adalah satu epimorfisma dengan $h \in$ inti π jika dan hanya jika $m_1 \equiv 0 \bmod 2^\alpha$, $m_2 \equiv 0 \bmod 2^\beta$, and $l \equiv 0 \bmod 2^\sigma$. Seterusnya, katakan

$$L = \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^\gamma}^2 \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}^2, & \text{jika } \alpha = \gamma + 1 \text{ dan } \beta = \gamma, \\ \mathbb{Z}_{2^{\alpha-\gamma+\sigma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \times \mathbb{Z}_{2^{\min\{\alpha,\beta\}}} \times \mathbb{Z}_{2^\rho} \times \mathbb{Z}_{2^\sigma}^2, & \text{jika } \alpha \geq \gamma + 2 \text{ atau } \beta \geq \gamma + 1, \end{cases}$$

dengan $\rho = \min\{\alpha - \gamma + \sigma, \beta\}$, dan $\mathbb{Z}^6 = \langle x_1 \rangle \times ... \times \langle x_6 \rangle$. Takrifkan $\varphi : \mathbb{Z}^6 \to L$ dengan $\varphi = \mu \circ \lambda$, yang mana $\lambda : \mathbb{Z}^6 \to \mathbb{Z}^6$ adalah diberikan sebagai $\lambda(x_1) = x_1 x_5^{-2^{\alpha-\gamma}} \cdot x_6^{-2^{2(\alpha-\gamma)-1}}$, $\lambda(x_3) = x_3 x_4^{-1} x_6^{-2^{\alpha-\gamma}}$, $\lambda(x_5) = x_5 x_6^{2^{\alpha-\gamma-1}}$, dan $\lambda(x_i) = x_i$ bagi $i = 2, 4, 6$, sementara

$\mu : \mathbb{Z}^6 \to L$ menurunkan penjana-penjana $\lambda(x_i)$ modulo kuasa bagi dua yang sesuai. Secara khususnya, $\varphi(x_i) = \epsilon_i$, $i = 1, ..., 6$ dengan $\epsilon_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), ..., \epsilon_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \in L$. Kita dapati bahawa λ adalah satu automorfisma bagi $\mathbb{Z}^6$ dan μ adalah satu homomorfisma bagi $\mathbb{Z}^6$ keseluruh L.

Katakan $h, h' \in \mathcal{H}$ dengan $h = x^{m_1}y^{m_2}v^l$ dan $h' = x^{m'_1}y^{m'_2}v^{l'}$, yang mana, seperti sebelumnya, $v = x^{-2^{\alpha-\gamma}}[x, y]$. Setkan $u = [x, y]$, maka kita dapati satu persembahan lain bagi h dan h' iaitu $h = x^m y^n u^k$ dan $h' = x^{m'} y^{n'} u^{k'}$, dengan $m = m_1 - l2^{\alpha-\gamma}$, $m' = m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma}$, $n = m_2$, $n' = m'_2$, $k = l$, dan $k' = l'$. Dengan menggunakan Lema 2.3, wujud satu pasangan pangkah $\psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{Z}^6$, yang mana dalam sebutan persembahan asalnya

$$\begin{aligned}
x_1(h, h') &= (m_1 - l2^{\alpha-\gamma})(m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma}),\\
x_2(h, h') &= m_2m'_2,\\
x_3(h, h') &= (m_1 - l2^{\alpha-\gamma})m'_2,\\
x_4(h, h') &= (m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma})m_2,\\
x_5(h, h') &= m'_2\binom{m_1 - l2^{\alpha-\gamma}}{2} - m_2\binom{m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma}}{2} + (m_1 - l2^{\alpha-\gamma})l'\\
&\quad -(m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma})l + (m'_2 - m_2)(m_1 - l2^{\alpha-\gamma})(m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma}),\\
x_6(h, h') &= (m_1 - l2^{\alpha-\gamma})\binom{m'_2}{2} - (m'_1 - l'2^{\alpha-\gamma})\binom{m_2}{2} + m_2l' - m'_2l.
\end{aligned}$$

Kita akan gunakan sekarang Usulan 2.1 dengan G seperti yang diberi dalam (1.1.3), $H = \mathcal{H}$, $K = \mathbb{Z}^6$, dan L seperti yang ditakrifkan di atas tadi. Bagi pemetaan-pemetaan yang terlibat, katakan $\varphi = \mu \circ \lambda$ dan $\Gamma = \psi$, kedua-duanya seperti yang diberikan di atas, dan $\pi : \mathcal{H} \to G$. Dari Usulan 2.1, wujud satu pasangan pangkah $\Delta : G \times G \to L$, dengan syarat $\varphi(\psi(\text{inti } \pi, \mathcal{H})) = \varphi(\psi(\mathcal{H}, \text{inti } \pi)) = 1$. Kita akan tunjukkan bahawa ini adalah benar. Katakan $h, h' \in \mathcal{H}$ dengan $h = x^{m_1}y^{m_2}v^l$ dan $h' = x^{m'_1}y^{m'_2}v^{l'}$. Dengan menuliskan $\varphi \circ \psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to L$ secara berkomponen iaitu $\varphi \circ \psi(h, h') = (l_1(h, h'), ..., l_6(h, h'))$, kita perolehi dalam sebutan $x_i(h, h')$ seperti yang diberikan di atas:

$$\begin{aligned}
l_1(h, h') &\equiv x_1(h, h') - 2^{\alpha-\gamma}x_5(h, h') - 2^{2(\alpha-\gamma)-1}x_6(h, h') \bmod 2^{j'},\\
&\qquad \text{dengan } j' = \gamma, \text{ jika } \alpha = \gamma + 1 \text{ dan } \beta = \gamma, \text{ dan } j' = \alpha - \gamma + \sigma + 1, \text{ selainnya;}\\
l_2(h, h') &\equiv x_2(h, h') \bmod 2^{\beta};\\
l_3(h, h') &\equiv x_3(h, h') - x_4(h, h') - 2^{\alpha-\gamma}x_6(h, h') \bmod 2^{j},\\
&\qquad \text{dengan } j = \gamma + 1, \text{ jika } \alpha = \gamma + 1 \text{ dan } \beta = \gamma \text{ , dan } j = \min\{\alpha, \beta\}, \text{ selainnya;}\\
l_4(h, h') &\equiv x_4(h, h') \bmod 2^{\min\{\alpha-\gamma+\sigma,\beta\}};\\
l_5(h, h') &\equiv x_5(h, h') + 2^{\alpha-\gamma-1}x_6(h, h') \bmod 2^{\sigma};\\
l_6(h, h') &\equiv x_6(h, h') \bmod 2^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Sekarang katakan $h \in \text{inti } \pi$. Maka $m_1 \equiv 0 \bmod 2^{\alpha}$, $m_2 \equiv 0 \bmod 2^{\beta}$ dan $l \equiv 0 \bmod 2^{\sigma}$. Kita perolehi secara langsung dari takrif bagi $x_i(h, h')$ bahawa $l_i(h, h') = 0$ bagi $i = 2, 4, 5, 6$. Sekarang kita pertimbangkan $l_3(h, h')$. Perhatikan bahawa $m_1 = 2^{\alpha}r$, $m_2 = 2^{\beta}s$ dan $l = 2^{\sigma}t$ bagi $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Kita gantikan nilai-nilai tak tersirat bagi x_3, x_4 dan x_6 ke dalam $l_3 = x_3 - x_4 - 2^{\alpha-\gamma}x_6$. Selepas dipermudahkan, kita perolehi

$$\begin{aligned} l_3(h,h') &= m_2'2^{\alpha}r - m_1'2^{\beta}s - \binom{m_2'}{2}2^{\alpha-\gamma}2^{\alpha}r + m_1'\binom{2^{\beta}s}{2}2^{\alpha-\gamma} + \\ & \qquad \binom{m_2'}{2}2^{\alpha-2\gamma+\sigma}2^{\alpha}t - \binom{2^{\alpha}r}{2}l'2^{2(\alpha-\gamma)}. \end{aligned}$$

Ini memberikan

$$l_3(h,h') \equiv -m_1'2^{\beta}s + m_1'\binom{2^{\beta}s}{2}2^{\alpha-\gamma} - \binom{2^{\alpha}r}{2}l'2^{2(\alpha-\gamma)} \bmod 2^j.$$

Dengan mengembangkan pekali binomial dan memungut kuasa bagi 2 memberikan

$$l_3(h,h') \equiv m_1's^2 2^{2\beta+\alpha-\gamma+1} - m_1's(1+2^{\alpha-\gamma-1})2^{\beta} - l'r(2^{\alpha}r-1)2^{3\alpha-2\gamma-1} \bmod 2^j.$$

Oleh kerana $2\beta+\alpha-\gamma+1 \geq j$ dan $3\alpha-2\gamma-1 \geq j$ dalam kedua-dua kes, ini akan memberikan

$$l_3(h,h') \equiv -m_1's(1+2^{\alpha-\gamma-1})2^{\beta} \bmod 2^j.$$

Sekarang jika $\alpha > \gamma+1$ atau $\beta > \gamma$, adalah jelas bahawa $l_3 \equiv 0 \bmod 2^j$. Akan tetapi, jika $\alpha = \gamma+1$ dan $\beta = \gamma$, maka $l_3(h,h') \equiv -m_1s(1+1)2^{\gamma} \equiv 0 \bmod 2^j$. Dalam mana-mana kes tersebut, $l_3(h,h') = 0$. Dengan menggunakan hujah-hujah yang sama akan memberikan $l_1(h,h') = 0$. Maka $\varphi(\psi(\text{inti } \pi, \mathcal{H})) = 1$, seperti yang ingin dibuktikan. Dengan cara yang sama, boleh ditunjukkan bahawa $\varphi(\psi(\mathcal{H}, \text{inti } \pi)) = 1$. Maka Δ adalah satu pasangan pangkah.

Akhir sekali, oleh kerana gambarajah dalam Usulan 2.1 adalah kalis tukar tertib bagi Δ dan $\psi \circ \varphi$ adalah keseluruh, kita rumuskan bahawa Δ adalah keseluruh. Maka dari Usulan 1.1, Δ mengangkat kepada satu homomorfisma $\Delta^{\star}$ bagi $G \otimes G$ keseluruh L, dan oleh itu $|G \otimes G| \geq |L|$. Akan tetapi, dari Lema 3.1, $|G \otimes G| \leq |L|$. Kita rumuskan $\Delta^{\star}$ adalah satu isomorfisma, dan $G \otimes G \cong L$ seperti yang ingin dibuktikan. □

Perlu dinyatakan di sini bahawa kumpulan yang diberikan dalam Teorem 4.4 dalam [2] sebagai kuasa dua tensor bagi kumpulan-p, p ganjil, bersepadan dengan kumpulan dari jenis (1.1.3) bagi $p = 2$, hanyalah imej homomorfisma bagi kuasa dua tensor yang sebenar, iaitu

$$G \otimes G \cong \mathbb{Z}^2_{p^{\alpha-\gamma+\sigma}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta}} \times \mathbb{Z}_{p^{\min\{\alpha,\beta\}}} \times \mathbb{Z}^2_{p^{\sigma}}.$$

Ini adalah keputusan yang sama bagi teorem sebelumnya, dengan $p = 2$ dan $\alpha \geq \gamma+2$.

Dalam teorem kita yang terakhir, kita kirakan kuasa dua tensor bagi kumpulan-kumpulan dari jenis (1.1.4). Oleh kerana kumpulan-kumpulan ini adalah imej homomorfisma bagi kumpulan-kumpulan dari jenis (1.1.3), kita akan dapatkan kuasa dua tensor mereka sebagai imej homomorfisma bagi kuasa dua tensor bagi kumpulan yang sepadan dalam (1.1.3).

Teorem 3.4 *Katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.4), iaitu $G \cong (\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\langle b\rangle$, dengan $|a| = |b| = 2^{\gamma+1}$, $|[a,b]| = 2^{\gamma}$, $|c| = 2^{\gamma-1}$, $[a,b] = a^2c$, $[c,b] = a^{-4}c^{-2}$, $a^{2^{\gamma}} = b^{2^{\gamma}}$, $\gamma \in \mathbb{N}$. Maka*

$$G \otimes G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^2, & \textit{bagi } \gamma = 1, \\ \mathbb{Z}^3_{2^{\gamma}} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}^2_{2^{\gamma-1}}, & \textit{bagi } \gamma \geq 2. \end{cases}$$

Bukti Katakan $\gamma = 1$. Maka G adalah kumpulan kuaternion dengan peringkat 8 dan $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^2$ dari [3]. Sekarang katakan G adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.4) dengan $\gamma \geq 2$ dan $H = (\langle w \rangle \times \langle u \rangle) \rtimes \langle v \rangle$ adalah satu kumpulan dari jenis (1.1.3) dengan $\alpha = \beta = \gamma + 1$ dan $\sigma = \gamma - 1$, iaitu $|u| = |v| = 2^{\gamma+1}, |w| = 2^{\gamma-1}$ dan $|[u, v]| = 2^\gamma$. Maka, dari bukti bagi Teorem 1.1 ([9]), $\psi : H \to G$ yang ditakrifkan sebagai $\psi(w^r u^s v^t) = c^r a^s b^t$ adalah satu epimorfisma dengan inti $\psi = \langle u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \rangle$. Diikuti dari Usulan 1 dalam [3] bahawa wujud satu epimorfisma $\psi \otimes \psi : H \otimes H \to G \otimes G$. Walau bagaimanapun, inti ψ adalah memusat dalam H, oleh kerana $[u^{2^\gamma} v^{2^\gamma}, h] = \left({}^{u^{2^\gamma}}[v, h]^{2^\gamma}\right)[u, h]^{2^\gamma} = 1$ bagi semua $h \in H$. Oleh itu, dari Usulan 9 dalam [3], inti $(\psi \otimes \psi) \cong \langle u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \otimes u, u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \otimes v, u \otimes u^{2^\gamma} v^{2^\gamma}, v \otimes u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \rangle$.

Dari Lema 3.1 dan Teorem 3.3 kita dapati $|u \otimes v| = 2^{\gamma+1}$ dan $|(u \otimes v)(v \otimes u)| = 2^\gamma$. Maka
$$(u \otimes v)^{2^\gamma} = (v \otimes u)^{2^\gamma}. \tag{13}$$

Dengan mengembangkan penjana-penjana bagi inti $(\psi \otimes \psi)$, dan menggunakan (13), kita perolehi

$$u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \otimes u = (u \otimes u)^{2^\gamma} (v \otimes u)^{2^\gamma} = (u \otimes u)^{2^\gamma} (u \otimes v)^{2^\gamma} = u \otimes u^{2^\gamma} v^{2^\gamma},$$

dan dengan kaedah yang sama,

$$u^{2^\gamma} v^{2^\gamma} \otimes v = (u \otimes v)^{2^\gamma} (v \otimes v)^{2^\gamma} = (v \otimes u)^{2^\gamma} (v \otimes v)^{2^\gamma} = v \otimes u^{2^\gamma} v^{2^\gamma}.$$

Maka inti $(\psi \otimes \psi) = \langle (u \otimes u)^{2^\gamma} (u \otimes v)^{2^\gamma}, (v \otimes v)^{2^\gamma} (u \otimes v)^{2^\gamma} \rangle$, dan oleh itu

$$G \otimes G \cong H \otimes H / \langle (u \otimes u)^{2^\gamma} (u \otimes v)^{2^\gamma}, (v \otimes v)^{2^\gamma} (u \otimes v)^{2^\gamma} \rangle. \tag{14}$$

Dengan menggantikan penjana-penjana $u \otimes u$ dan $v \otimes v$ bagi $H \otimes H$ dengan $(u \otimes u)(u \otimes v)$ dan $(v \otimes v)(u \otimes v)$, masing-masing, dan cerapan bahawa $H \otimes H \cong \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}}^3 \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}^2$, kita perolehi dari (14) bahawa $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{2^\gamma}^2 \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma+1}} \times \mathbb{Z}_{2^\gamma} \times \mathbb{Z}_{2^{\gamma-1}}^2$, iaitu keputusan yang dikehendaki. $\square$

Rujukan

[1] R. Aboughazi, *Produit Tensoriel du Groupe d'Heisenberg*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), 95-106.

[2] M. R. Bacon & L.-C. Kappe, *The Nonabelian Tensor Square of a 2-generator p-group of Class 2*, Arch. Math. **61** (1993), 508-516.

[3] R. Brown, D.L. Johnson & E.F. Robertson, *Some Computations of Non-Abelian Tensor Products of Groups*, J. of Algebra **111** (1987), 177-202.

[4] R. Brown & J.-L. Loday, *Excision Homotopique en Basse Dimension*, C.R. Acad. Sci. Ser. I (Math.), Paris, **298** (1984), 353-356.

[5] R. Brown & J.-L. Loday, *Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces*, Topology **26** (1987), 311-335.

[6] M. Hartl, *The Nonabelian Tensor Square and Schur Multiplicator of Nilpotent Groups of Class 2*, J. of Algebra **179** (1996), 416-440.

[7] D.L. Johnson, *The Nonabelian Tensor Square of a Finite Split Metacyclic Group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. II **30** (1987), 91-96.

[8] L.-C. Kappe, *Nonabelian Tensor Products of Groups: The Commutator Connection*, Proceedings Groups-St.Andrews 1997 at Bath, LMS Lecture Notes **261**(1999), 447-454.

[9] N. Sarmin, *Klasifikasi bagi Kumpulan-Dua dengan Dua Penjana yang Mempunyai Kelas Nilpoten Dua*, Matematika, **15**(1999), 37-43.

[10] J.H.C. Whitehead, *A Certain Exact Sequence*, Ann. of Math. **52** (1950), 51-110.