

Reka Bentuk Algoritma Blok Baru Stensil 9-titik dalam Masalah Nilai Sempadan

Norhashidah Hj. Mohd. Ali

Pusat Pengajian Sains Matematik,
Universiti Sains Malaysia
11800 Minden, Pulau Pinang

Abstrak Dalam kertas ini, dikemukakan kaedah lelaran kumpulan 4 dan 9 titik yang baru yang diterbitkan daripada stensil 9-titik *putaran* [4] dengan cara pendekatan yang sama seperti Yousif [7]. Ujikaji berangka yang dijalankan menunjukkan kaedah-kaedah kumpulan baru ini sememangnya lebih cepat menumpu berbanding dengan skema lelaran titiknya, selaras dengan analisis kompleksitinya.

Katakunci Kaedah lelaran kumpulan, persamaan eliptik, stensil 9-titik *putaran*.

Abstract In this paper, new 4 and 9 point group iterative methods derived from the rotated nine-point stencil [4] similar to the approach of Yousif [7] is presented . Numerical experiments carried out confirmed that these new group methods converge faster than its pointwise counterpart which coincides with its complexity analysis

Keywords Group Iterative Method, elliptic equation, rotated 9-point stencil.

1 Pengenalan

Pertimbangkan persamaan eliptik peringkat dua iaitu persamaan Poisson

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

yang tertakrif dalam rantau $R = [0, 1] \times [0, 1]$, dengan syarat sempadan Dirichlet diberikan. Masalah ini seringkali timbul dalam bidang-bidang aplikasi yang antaranya ialah elektrostatik, pengaliran haba, dan mekanik bendarir. Dalam menyelesaikan masalah ini dengan kaedah beza terhingga, persamaan (1) boleh dianggarkan pada titik (x_i, y_j) dengan beberapa cara. Anggaran yang paling mudah bagi $\nabla^2 U$ ialah

$$\nabla_5^2 U_{ij} \equiv \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} \quad (2)$$

supaya

$$\nabla_5^2 U_{ij} = \nabla^2 U + \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right) + O(h^4) \quad (3)$$

Di sini, $h = \frac{1}{n}$ dalam arah x dan y dengan $x_i = ih$, $y_j = jh$; ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$) dan $U_{ij} = U(x_i, y_j)$. Anggaran ini sangat biasa digunakan dan dikenali sebagai operator beza 5 titik *piawai*. Satu lagi operator beza ∇_x^2 , ialah

$$\nabla_x^2 U_{ij} \equiv \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} - 4U_{ij}}{2h^2} \quad (4)$$

supaya

$$\nabla_x^2 U_{ij} = \nabla^2 U + h^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right) \right] + O(h^4) \quad (5)$$

Operator ini, yang dikenali sebagai beza 5-titik *putaran* adalah jitu peringkat dua iaitu kejituuan yang lebih kurang sama dengan beza 5-titik yang *piawai* (3).

Selain daripada operator 5-titik, satu lagi operator alternatif yang menarik perhatian diberi oleh operator 9-titik [6], 1974 dan [3], 1988.

$$\nabla_9^2 = \frac{2}{3} \nabla_5^2 + \frac{1}{3} \nabla_x^2 \quad (6)$$

supaya

$$\nabla_9^2 U_{ij} = \nabla^2 U + \frac{1}{12} h^2 \nabla^4 U + O(h^4) \quad (7)$$

dimana

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (8)$$

Satu lagi jenis pendiskretan yang dikenali sebagai operator beza 9-titik *putaran* telah diperkenalkan dalam [4], yang terbukti tidak kurang juga kemampuannya, diberi oleh rumus

$$\nabla_{9x}^2 U_{ij} \equiv \frac{P + 4Q - 20U_{ij}}{12h^2} \quad (9)$$

dengan $P = U_{i,j+2} + U_{i,j-2} + U_{i+2,j} + U_{i-2,j}$ dan $Q = U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}$
Boleh ditunjukkan bahawa

$$\nabla_{9x}^2 U_{ij} = \nabla^2 U + \frac{1}{6} h^2 \left(\nabla^4 U + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + O(h^4) \quad (10)$$

Berdasarkan pendiskretan 5-titik *putaran* (5), beberapa kaedah lelaran blok/kumpulan baru telah dibangunkan ([1],[2],[5],[7],[8]) yang memberikan penyelesaian alternatif bagi masalah eliptik ini. Kaedah lelaran blok ini telah didapati mempunyai kejituuan yang lebih kurang sama dengan kaedah lelaran titik tetapi lebih cepat menumpu daripada kaedah lelaran titik ini. Yousif,[7] juga telah membuat kajian terperinci mengenai rekabentuk kaedah kumpulan berdasarkan pendiskretan 9 titik *piawai* (7) yang mana beliau juga telah mendapat keputusan yang hampir sama.

Dalam kertas ini, kaedah lelaran kumpulan 4 dan 9 titik yang diterbitkan daripada stensil 9-titik *putaran* (9-10) dengan cara pendekatan yang sama seperti Yousif,[7] akan dibincangkan. Ujikaji berangka yang dijalankan akan diketengahkan untuk menunjukkan kebolehan kaedah baru ini berbanding dengan skema lelaran titiknya.

2 Kaedah Kumpulan 4 dan 9 Titik Terbitan Rumus 9-titik Putaran

Kaedah yang direkabentuk dengan cara yang serupa seperti rekabentuk kaedah kumpulan berdasarkan pendiskretan 9 titik *piawai* (7). Rajah (1) menunjukkan molekul pengiraan bagi rumus pendiskretan 9 titik *piawai* (7)

Manakala Rajah (2) menunjukkan molekul pengiraan bagi rumus pendiskretan 9 titik *putaran* (9):

2.1 Kaedah Kumpulan 4 Titik

Kita pertimbangkan masalah (1) dengan syarat-syarat sempadan seperti yang dinyatakan. Dengan menganggapkan penyelesaian pada sebarang 4 titik dalam domain penyelesaian didapati dengan rumus 9 titik *putaran* (9), akan menghasilkan sistem persamaan (4×4) :

$$\begin{pmatrix} 20 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ij} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rhs}_{ij} \\ \text{rhs}_{i+1,j+1} \\ \text{rhs}_{i+1,j} \\ \text{rhs}_{i,j+1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

dimana

$$\begin{aligned} \text{rhs}_{ij} &= 4(U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}) + U_{i+2,j} + U_{i,j+2} + U_{i-2,j} + U_{i,j-2} - 12h^2 f_{ij} \\ \text{rhs}_{i+1,j+1} &= 4(U_{i+2,j} + U_{i,j+2} + U_{i+2,j+2}) + U_{i+3,j+1} + U_{i+1,j+3} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1} - 12h^2 f_{i+1,j+1} \\ \text{rhs}_{i+1,j} &= 4(U_{i+2,j-1} + U_{i+2,j+1} + U_{i,j-1}) + U_{i+3,j} + U_{i+1,j+2} + U_{i-1,j} + U_{i+1,j-2} - 12h^2 f_{i+1,j} \\ \text{rhs}_{i,j+1} &= 4(U_{i-1,j+2} + U_{i+1,j+2} + U_{i-1,j}) + U_{i+2,j+1} + U_{i,j+3} + U_{i-2,j+1} + U_{i,j-1} - 12h^2 f_{i,j+1} \end{aligned} \quad (12)$$

Sistem ini menghasilkan satu sistem persamaan nyah-pasangan bersaiz (2×2) yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} U_{ij} \\ U_{i+1,j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{rhs}_{ij} \\ \text{rhs}_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

dan

$$\begin{pmatrix} U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{rhs}_{i+1,j} \\ \text{rhs}_{i,j+1} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, n-2 \quad (14)$$

Oleh itu, molekul pengiraan boleh dibentuk pada titik-titik (i, j) , $(i+1, j+1)$, $(i+1, j)$ dan $(i, j+1)$ seperti ditunjukkan dalam Rajah (3).

Dari Rajah (3(a & b)), boleh diteliti bahawa implementasi persamaan (13) hanya melibatkan titik berjenis \bigcirc sahaja. Manakala dari Rajah (3(c & d)), implementasi persamaan (14) melibatkan titik berjenis \square sahaja. Bermakna, perlaksanaan persamaan (13) dan (14) boleh dilakukan secara tidak bersandar antara satu sama lain. Serupa dengan kaedah kumpulan nyah pasangan tak tersirat 4-titik yang diterbitkan daripada rumus 5-titik *putaran*, lelaran boleh dijanakan dengan hanya melibatkan satu jenis titik sahaja (sama

ada \bigcirc atau \square). Penyelesaian pada setengah titik mesy yang tertinggal boleh dinilaikan dengan menggunakan rumus beza terhingga 5-titik *piaawai* (2) setelah penumpuan dicapai.

Untuk perbincangan kita, katakan kita memilih untuk melakukan lelaran pada titik berjenis \bigcirc (perbincangan yang serupa boleh digunakan sekiranya dipilih proses lelaran terhadap titik-titik berjenis \square menggunakan persamaan (14)). Telitian bahawa blok yang mengandungi nilai i bersamaan 1 atau $n - 2$, atau nilai j bersamaan 1 atau $n - 2$, nilai U pada titik luar daripada sempadan adalah diperlukan dalam persamaan (13) (lihat Rajah (4) untuk kes $i, j = 1$).

Untuk menangani masalah ini, rumus 5-titik *putaran* digunakan untuk menilaikan penyelesaian pada titik sebelah sempadan seperti ditunjukkan dalam Rajah (5) bagi kes $n = 9$.

Kaedah kumpulan 4-titik (Pengenduran Berlebihan Berturut-turut - PBB) yang diterbitkan daripada rumus 9-titik *putaran* boleh diformulasikan dengan membahagikan domain penyelesaian kepada bilangan grid yang genap (pilih n ganjil). Kemudian, lakukan lelaran pada titik berjenis \bigcirc dengan menggunakan (13) dengan mengaplikasikan skema PBB (skema Gauss-Seidel juga boleh digunakan). Bagi blok yang mengandungi $i = 1$ atau $n - 2$, atau $j = 1$ atau $n - 2$, rumus 5-titik *putaran* (5) adalah digunakan. Setelah semua titik berjenis \bigcirc dimilaikan dalam domain penyelesaian, penumpuan adalah diperiksa. Jika menumpu, nilaikan penyelesaian pada baki titik-titik yang tertinggal dalam domain penyelesaian (yang berjenis \square) menggunakan rumus 5-titik *piaawai* (2).

2.2 Kaedah Kumpulan 9-titik

Pertimbangkan titik mesy dalam kumpulan 9 titik seperti yang ditunjukkan dalam Rajah (6).

Dengan mengaplikasikan persamaan (9) pada 9 titik tersebut dalam tertib yang ditunjuk (mulanya pada titik \bullet , diikuti pada titik \square), kita dapati sistem persamaan bersaiz (9×9) :

$$\begin{pmatrix} 20 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 20 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 20 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 20 & -1 & -4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 20 & -4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ij} \\ U_{i+2,j} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i,j+2} \\ U_{i+2,j+2} \\ U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \\ U_{i+1,j+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{ij} \\ b_{i+2,j} \\ b_{i+1,j+1} \\ b_{i,j+2} \\ b_{i+2,j+2} \\ b_{i+1,j} \\ b_{i,j+1} \\ b_{i+2,j+1} \\ b_{i+1,j+2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= U_{i,j-2} + U_{i-2,j} + 4(U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1} + U_{i-1,j+1}) - 12h^2 f_{ij} \\
 b_{i+2,j} &= U_{i+2,j-2} + U_{i+4,j} + 4(U_{i+3,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+3,j+1}) - 12h^2 f_{i+2,j} \\
 b_{i+1,j+1} &= U_{i+1,j+3} + U_{i+1,j-1} + U_{i+3,j+1} + U_{i-1,j+1} - 12h^2 f_{i+1,j+1} \\
 b_{i,j+2} &= U_{i,j+4} + U_{i-2,j+2} + 4(U_{i+1,j+3} + U_{i-1,j+3} + U_{i-1,j+1}) - 12h^2 f_{i,j+2} \\
 b_{i+2,j+2} &= U_{i+2,j+4} + U_{i+4,j+2} + 4(U_{i+3,j+1} + U_{i+3,j+3} + U_{i+1,j+3}) - 12h^2 f_{i+2,j+2} \\
 b_{i+1,j} &= U_{i+1,j-2} + U_{i+3,j} + U_{i-1,j} + 4(U_{i+2,j-1} + U_{i,j-1}) - 12h^2 f_{i+1,j} \\
 b_{i,j+1} &= U_{i,j+3} + U_{i,j-1} + U_{i-2,j+1} + 4(U_{i-1,j} + U_{i-1,j+2}) - 12h^2 f_{i,j+1} \\
 b_{i+2,j+1} &= U_{i+2,j+3} + U_{i+2,j-1} + U_{i+4,j+1} + 4(U_{i+3,j} + U_{i+3,j+2}) - 12h^2 f_{i+2,j+1} \\
 b_{i+1,j+2} &= U_{i+1,j+4} + U_{i+3,j+2} + U_{i-1,j+2} + 4(U_{i+2,j+3} + U_{i,j+3}) - 12h^2 f_{i+1,j+2}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Sistem ini boleh diselesaikan dan dinyahpasangan kepada persamaan (5×5) dan (4×4) yang bentuk tersiratnya diberi oleh

$$\begin{pmatrix} U_{ij} \\ U_{i+2,j} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i,j+2} \\ U_{i+2,j+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{16280} \begin{pmatrix} 867b_{ij} + 90b_{i+2,j} + 220b_{i+1,j+1} + 90b_{i,j+2} + 53b_{i+2,j+2} \\ 90b_{ij} + 867b_{i+2,j} + 220b_{i+1,j+1} + 53b_{i,j+2} + 90b_{i+2,j+2} \\ 220b_{ij} + 220b_{i+2,j} + 990b_{i+1,j+1} + 220b_{i,j+2} + 220b_{i+2,j+2} \\ 90b_{ij} + 53b_{i+2,j} + 220b_{i+1,j+1} + 867b_{i,j+2} + 90b_{i+2,j+2} \\ 53b_{ij} + 90b_{i+2,j} + 220b_{i+1,j+1} + 90b_{i,j+2} + 867b_{i+2,j+2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

dan

$$\begin{pmatrix} U_{i+1,j} \\ U_{i,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \\ U_{i+1,j+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2079} \begin{pmatrix} 116b_{i+1,j} + 28b_{i,j+1} + 28b_{i+2,j+1} + 17b_{i+1,j+2} \\ 28b_{i+1,j} + 116b_{i,j+1} + 17b_{i+2,j+1} + 28b_{i+1,j+2} \\ 28b_{i+1,j} + 17b_{i,j+1} + 116b_{i+2,j+1} + 28b_{i+1,j+2} \\ 17b_{i+1,j} + 28b_{i,j+1} + 28b_{i+2,j+1} + 116b_{i+1,j+2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Rajah (7 a & b) menunjukkan molekul pengiraan pada titik (i, j) and $(i + 1, j)$ masing-masing. Boleh diteliti bahawa dalam pengemaskinian nilai U_{ij} , $U_{i+2,j}$, $U_{i+1,j+1}$, $U_{i,j+2}$, dan $U_{i+2,j+2}$, hanya titik-titik berjenis \bigcirc adalah terlibat. Manakala dalam pengemaskinian $U_{i+1,j}$, $U_{i,j+1}$, $U_{i+2,j+1}$, dan $U_{i+1,j+2}$, hanya titik-titik berjenis \square adalah terlibat. Akibat ketidakbersandaran ini, lelaran boleh dilakukan dengan melibatkan hanya satu jenis titik sahaja. Untuk perbincangan kertas ini, lelaran pada titik-titik berjenis \bigcirc adalah dipilih. Juga, n dipilih supaya $n - 1$ boleh dibahagikan oleh 3.

Dalam domain penyelesaian, tertib blok 9 titik ini diambil seperti tertib 'checker board'. Rajah (8) mengilustrasikan tertib ini bagi kes $n = 13$.

Dalam skema kumpulan 9-titik ini, pengemaskinian nilai U dibuat mula-mulanya pada blok 5-titik (seperti dalam Rajah (7(a))) dengan menggunakan persamaan (17), kemudian pengemaskinian dilakukan pada blok 4-titik (seperti dalam Rajah (7(b))) dengan menggunakan persamaan (18). Dengan melaksanakan kaedah kumpulan 9-titik ini dengan cara ini, lelaran boleh dilaksanakan pada nilai U dengan melibatkan hanya titik berjenis \bigcirc sahaja, tanpa melibatkan titik berjenis \square . Selepas penumpuan dicapai, penyelesaian pada

titik berjenis \square dinilaikan secara terus menggunakan rumus 5-titik *piaawai* (2). Serupa dengan skema kumpulan 4-titik dalam bahagian 2.1, pertimbangan sewajarnya perlu diambil dalam menilaikan penyelesaian pada titik sepanjang sebelah titik sempadan, iaitu apabila blok mengandungi titik berindeks $i = 1$ atau $n - 3$, atau apabila $j = 1$ atau $n - 3$. Seperti dahulu, formula 5-titik *putaran* digunakan pada titik-titik sebegini.

3 Kompleksiti Pengiraan

Dengan menganggapkan bahawa terdapat m^2 titik mesy dalaman (di sini $m = n - 1$) dalam domain penyelesaian, lelaran dijalankan terhadap *setengah* daripada titik mesy, manakala yang setengah lagi diselesaikan secara terus dengan menggunakan rumus lima titik *piaawai*. Anggaran akan dibuat bagi mengira beban pengiraan kaedah-kaedah dalam perbincangan dalam bilangan operasi aritmetik bagi setiap lelaran dalam mendapatkan penyelesaian.

Kaedah Lelaran Titik (9 titik *putaran*)

Pertimbangkan lelaran ke $(k + 1)$ bagi skema PBB yang diwakili oleh (9), di sini $\hat{U}_{ij}^{(k+1)}$ ialah lelaran ke $(k + 1)$ bagi iterasi Gauss-Seidel yang ditakrifkan oleh

$$\begin{aligned}\hat{U}_{ij}^{(k+1)} &= 0.05(U_{i,j+2}^{(k)} + U_{i,j-2}^{(k+1)} + U_{i+2,j}^{(k)} + U_{i-2,j}^{(k+1)}) \\ &+ 4(U_{i+1,j-1}^{(k+1)} + U_{i-1,j-1}^{(k+1)} + U_{i+1,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)}) - 12h^2 f_{ij}\end{aligned}\quad (19)$$

Perlu diingat bahawa pada titik-titik bersebelahan sempadan ($i = 1$ atau $n - 1$, atau $j = 1$ atau $n - 1$), lelaran ke $(k + 1)$ bagi iterasi Gauss-Seidel untuk skema 5-titik *putaran* berikut digunakan:

$$\hat{U}_{ij}^{(k+1)} = 0.25(U_{i+1,j-1}^{(k+1)} + U_{i-1,j-1}^{(k+1)} + U_{i+1,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)}) - 2h^2 f_{ij} \quad (20)$$

Untuk mengira bilangan operasi setiap lelaran, kita perlu menentukan bilangan titik yang menggunakan rumus 9-titik *putaran* (19) dan bilangan titik yang menggunakan rumus 5-titik *putaran* (20). Selepas pengamatan yang teliti, boleh disimpulkan bahawa bilangan titik yang terlibat dalam menggunakan rumus 9-titik *putaran* ialah $\frac{1}{2}(m - 2)^2$, manakala bilangan titik yang menggunakan rumus 5-titik *putaran* ialah $2(m - 1)$. Dengan menganggapkan $12h^2$ distor terlebih dahulu, lelaran menggunakan (19) memerlukan 10 *hasiltambah* and 4 *hasildarab* per titik, manakala lelaran menggunakan (20) memerlukan 6 *hasiltambah* and 3 *hasildarab* per titik. Oleh itu, bilangan operasi yang diperlukan untuk kaedah ini (tidak termasuk ujian penumpuan) ialah

$$\begin{aligned}5(m - 2)^2 + 12(m - 1) \text{ } hasiltambah \text{ and } 2(m - 2)^2 + 6(m - 1) \text{ } hasildarab \text{ setiap lelaran} \\ + \\ 2m^2 \text{ } hasiltambah \text{ and } m^2 \text{ } hasildarab \text{ selepas penumpuan.}\end{aligned}\quad (21)$$

Kaedah Kumpulan 4-Titik (PBB)

Untuk mengira beban pengiraan kaedah ini, kita kira dahulu $\hat{U}_{ij}^{(k+1)}$ dan $\hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)}$, komponen ke $(k + 1)$ bagi lelaran Gauss-Seidel. Biarkan

$$a_1 = 4(U_{i-1,j-1}^{(k+1)} + U_{i+1,j+1}^{(k+1)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)}) + U_{i+2,j}^{(k)} + U_{i,j+2}^{(k)} + U_{i-2,j}^{(k+1)} + U_{i,j-2}^{(k+1)} - 12h^2 f_{ij}$$

dan

$$a_2 = 4(U_{i,j+2}^{(k)} + U_{i+2,j}^{(k)} + U_{i+2,j+2}^{(k)}) + U_{i+3,j+1}^{(k)} + U_{i+1,j+3}^{(k)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)} + U_{i+1,j-1}^{(k+1)} - 12h^2 f_{i+1,j+1} \quad (22)$$

Kemudian

$$\hat{U}_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{384}(20a_1 + 4a_2) \quad \text{dan} \quad \hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)} = \frac{1}{384}(4a_1 + 20a_2) \quad (23)$$

Merujuk pada Rajah(9), rumus 5-titik *putaran* (20) digunakan pada titik \bullet , rumus 9-titik *putaran* (19) digunakan pada titik \circlearrowleft , manakala pasangan persamaan (23) digunakan pada blok dalaman yang mengandungi titik \circlearrowleft .

Dengan menganggapkan n adalah ganjil dan $m = n - 1$, terdapat $(\frac{m}{2})^2$ blok 4 titik dalam domain penyelesaian. Dengan penelitian yang mendalam, boleh disimpulkan bahawa bilangan blok yang mengandungi titik yang menggunakan rumus 5-titik *putaran* (iaitu blok bersebelahan sempadan) ialah $2m - 4$. Oleh itu, bilangan blok dalaman yang menggunakan pasangan persamaan (23) ialah $(\frac{m}{2})^2 - (2m - 4)$. Di dalam blok yang terletak bersebelahan sempadan, adalah diketahui bahawa $2(m - 1)$ daripada titik ini menggunakan rumus 5-titik *putaran*. Bermakna bilangan titik yang menggunakan rumus 9-titik *putaran* (19) ialah

$$2(2m - 4) - [2(m - 1)] = 2m - 6 \quad (24)$$

Mengaplikasikan skema lelaran PBB pada (23), lelaran ke $(k + 1)$ adalah dijanakan sebagai

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(k+1)} &= U_{ij}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{ij}^{(k+1)} - U_{ij}^{(k)}) \\ U_{i+1,j+1}^{(k+1)} &= U_{i+1,j+1}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)} - U_{i+1,j+1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (25)$$

Dengan menganggapkan bahawa $\frac{1}{384}$ dan $12h^2$ adalah distor terlebih dahulu, jumlah operasi aritmetik yang diperlukan untuk berbagai rumus ini :

Rumus 5-titik *putaran* : $(6 \text{ hasiltambah} + 3 \text{ hasildarab}) \times [2(m - 1)]$ setiap lelaran,

Rumus 9-titik *putaran* : $(10 \text{ hasiltambah} + 4 \text{ hasildarab}) \times [2m - 6]$ setiap lelaran,

Rumus pasangan (23) : $(20 \text{ hasiltambah} + 12 \text{ hasildarab}) \times [(\frac{m}{2})^2 - (2m - 4)]$ setiap lelaran.

Oleh itu jumlah operasi yang diperlukan untuk skema penyelesaian masalah ini ialah $(5m^2 - 8m + 8) \text{ hasiltambah}$ dan $(3m^2 - 10m + 18) \text{ hasildarab}$ setiap lelaran + $2m^2 \text{ hasiltambah}$ dan $m^2 \text{ hasildarab}$ selepas penumpuan.

Kaedah Kumpulan 9-Titik (PBB)

Untuk kaedah ini, pengiraan dibuat dahulu terhadap 9 titik $\hat{U}_{ij}^{(k+1)}, \hat{U}_{i+2,j}^{(k+1)}, \hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)}, \hat{U}_{i,j+2}^{(k+1)}, \hat{U}_{i+2,j+2}^{(k+1)}, \hat{U}_{i+1,j}^{(k+1)}, \hat{U}_{i,j+1}^{(k+1)}, \hat{U}_{i+2,j+1}^{(k+1)}$ dan $\hat{U}_{i+1,j+2}^{(k+1)}$ yang diterbitkan dari (17) dan (18). Biarkan

$$\begin{aligned}
a_1 &= U_{i,j-2}^{(k+1)} + U_{i-2,j}^{(k+1)} + 4(U_{i+1,j-1}^{(k+1)} + U_{i-1,j-1}^{(k+1)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)}) - 12h^2 f_{ij} \\
a_2 &= U_{i+2,j-2}^{(k+1)} + U_{i+4,j}^{(k)} + 4(U_{i+3,j-1}^{(k+1)} + U_{i+1,j-1}^{(k+1)} + U_{i+3,j+1}^{(k)}) - 12h^2 f_{i+2,j} \\
a_3 &= U_{i+1,j+3}^{(k)} + U_{i+1,j-1}^{(k+1)} + U_{i+3,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j+1}^{(k+1)} - 12h^2 f_{i+1,j+1} \\
a_4 &= U_{i,j+4}^{(k)} + U_{i-2,j+2}^{(k+1)} + 4(U_{i-1,j+1}^{(k+1)} + U_{i+1,j+3}^{(k)} + U_{i-1,j+3}^{(k)}) - 12h^2 f_{i,j+2} \\
a_5 &= U_{i+2,j+4}^{(k)} + U_{i+4,j+2}^{(k)} + 4(U_{i+3,j+1}^{(k)} + U_{i+3,j+3}^{(k)} + U_{i+1,j+3}^{(k)}) - 12h^2 f_{i+2,j+2}
\end{aligned} \quad (26)$$

Juga

$$\begin{aligned}
a_6 &= U_{i+1,j-2}^{(k+1)} + U_{i+3,j}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k+1)} + 4(U_{i+2,j-1}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)}) - 12h^2 f_{i+1,j} \\
a_7 &= U_{i,j+3}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} + U_{i-2,j+1}^{(k+1)} + 4(U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i-1,j+2}^{(k+1)}) - 12h^2 f_{i,j+1} \\
a_8 &= U_{i+2,j+3}^{(k)} + U_{i+2,j-1}^{(k+1)} + U_{i+4,j+1}^{(k)} + 4(U_{i+3,j}^{(k)} + U_{i+3,j+2}^{(k)}) - 12h^2 f_{i+2,j+1} \\
a_9 &= U_{i+1,j+4}^{(k)} + U_{i+3,j+2}^{(k)} + U_{i-1,j+2}^{(k+1)} + 4(U_{i+2,j+3}^{(k)} + U_{i,j+3}^{(k)}) - 12h^2 f_{i+1,j+2}
\end{aligned} \quad (27)$$

Jadi, kumpulan 5 titik dari rumus kumpulan 9 titik itu ialah

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{ij}^{(k+1)} &= \frac{1}{16280}(867a_1 + 90a_2 + 220a_3 + 90a_4 + 53a_5) \\
\hat{U}_{i+2,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{16280}(90a_1 + 867a_2 + 220a_3 + 53a_4 + 90a_5) \\
\hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)} &= \frac{1}{16280}(220a_1 + 220a_2 + 990a_3 + 220a_4 + 220a_5) \\
\hat{U}_{i,j+2}^{(k+1)} &= \frac{1}{16280}(90a_1 + 53a_2 + 220a_3 + 867a_4 + 90a_5) \\
\hat{U}_{i+2,j+2}^{(k+1)} &= \frac{1}{16280}(53a_1 + 90a_2 + 220a_3 + 90a_4 + 867a_5)
\end{aligned} \quad (28)$$

Manakala kumpulan 4 titik dari rumus kumpulan 9 titik itu ialah

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{i+1,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{2079}(116a_6 + 28a_7 + 28a_8 + 17a_9) \\
\hat{U}_{i,j+1}^{(k+1)} &= \frac{1}{2079}(28a_6 + 116a_7 + 17a_8 + 28a_9) \\
\hat{U}_{i+2,j+1}^{(k+1)} &= \frac{1}{2079}(28a_6 + 17a_7 + 116a_8 + 28a_9) \\
\hat{U}_{i+1,j+2}^{(k+1)} &= \frac{1}{2079}(17a_6 + 28a_7 + 28a_8 + 116a_9)
\end{aligned} \quad (29)$$

Anggapkan m boleh dibahagikan dengan 3 dan n ganjil (perbincangan untuk n genap boleh didapati dengan modifikasi kecil). Terdapat $(\frac{m}{3})^2$ bilangan blok dalam domain penyelesaian. Dari kompleksiti pengiraan kaedah lelaran titik, ingat kembali bahawa bilangan

titik dari jenis • (yang menggunakan rumus 5-titik *putaran*) adalah $2(m-1)$. Bilangan blok yang mengandungi titik jenis ini (blok bersebelah sempadan) ialah

$$2\left(\frac{m}{3}\right) + 2\left(\frac{m}{3} - 2\right) = \frac{4}{3}(m-3) \quad (30)$$

Jumlah titik yang terkandung dalam blok-blok ini ialah

$$\frac{2}{3}(m-3) \times 5 + \frac{2}{3}(m-3) \times 4 = 6(m-3) \quad (31)$$

Oleh itu, bilangan titik yang menggunakan rumus 9-titik *putaran* dalam blok ini ialah

$$6(m-3) - 2(m-1) = 4(m-4) \quad (32)$$

Menggunakan (30), bilangan blok dalaman yang mengandungi titik yang menggunakan persamaan nyah pasangan (28) atau (29) ialah

$$\left(\frac{m}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}(m-3) = \frac{1}{3}\left[\frac{m^2}{3} - 4(m-3)\right] = a \quad (33)$$

Di antara blok dalaman, separuh daripada mereka ($\frac{a}{2}$) akan menggunakan persamaan (28) dan separuh lagi akan menggunakan persamaan (29). Lelaran ke $(k+1)$ bagi skema iterasi PBB untuk persamaan (28) ialah

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(k+1)} &= U_{ij}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{ij}^{(k+1)} - U_{ij}^{(k)}) \\ U_{i+2,j}^{(k+1)} &= U_{i+2,j}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+2,j}^{(k+1)} - U_{i+2,j}^{(k)}) \\ U_{i+1,j+1}^{(k+1)} &= U_{i+1,j+1}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+1,j+1}^{(k+1)} - U_{i+1,j+1}^{(k)}) \\ U_{i,j+2}^{(k+1)} &= U_{i,j+2}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i,j+2}^{(k+1)} - U_{i,j+2}^{(k)}) \\ U_{i+2,j+2}^{(k+1)} &= U_{i+2,j+2}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+2,j+2}^{(k+1)} - U_{i+2,j+2}^{(k)}) \end{aligned} \quad (34)$$

dan untuk (29) ialah

$$\begin{aligned} U_{i+1,j}^{(k+1)} &= U_{i+1,j}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+1,j}^{(k+1)} - U_{i+1,j}^{(k)}) \\ U_{i,j+1}^{(k+1)} &= U_{i,j+1}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i,j+1}^{(k+1)} - U_{i,j+1}^{(k)}) \\ U_{i+2,j+1}^{(k+1)} &= U_{i+2,j+1}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+2,j+1}^{(k+1)} - U_{i+2,j+1}^{(k)}) \\ U_{i+1,j+2}^{(k+1)} &= U_{i+1,j+2}^{(k)} + \omega(\hat{U}_{i+1,j+2}^{(k+1)} - U_{i+1,j+2}^{(k)}) \end{aligned} \quad (35)$$

Anggapkan $\frac{1}{16280}, \frac{1}{2079}$ dan $12h^2$ telah distor terlebih dahulu, aman operasi yang diperlukan untuk 3 jenis rumus ini disenaraikan seperti berikut:

Rumus 5-titik *putaran*: $(6 \text{ hasiltambah} + 3 \text{ hasildarab}) \times [2(m-1)]$ setiap lelaran.

Rumus 9-titik *putaran* $(10 \text{ hasiltambah} + 4 \text{ hasildarab}) \times [4(m-4)]$ setiap lelaran.

Rumus kumpulan 9-titik (28)-(29) dan (34)-(35):

$(94 \text{ hasiltambah} + 76 \text{ hasildarab}) \times \text{setiap lelaran.}$

Oleh itu, jumlah bilangan operasi aritmetik yang diperlukan untuk skema ini ialah;

$(\frac{47}{9}m^2 - \frac{32}{3}m + 16) \text{ hasiltambah}$ dan $(\frac{38}{9}m^2 - \frac{86}{3}m + 82) \text{ hasildarab}$ setiap lelaran +

$2m^2 \text{ hasiltambah}$ dan $m^2 \text{ hasildarab}$ selepas penumpuan.

4 Keputusan Ujikaji dan Perbincangan

Ujikaji berangka telah dijalankan untuk membandingkan kaedah-kaedah kumpulan 4 titik dan 9 titik dengan kaedah lelaran titik yang berasaskan stensil 9 titik *putaran* (9). Masalah yang digunakan untuk ujikaji ini ialah masalah Poisson berikut:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (36)$$

dengan syarat sempadan yang memenuhi penyelesaian sebenar

$$U(x, y) = e^{xy}$$

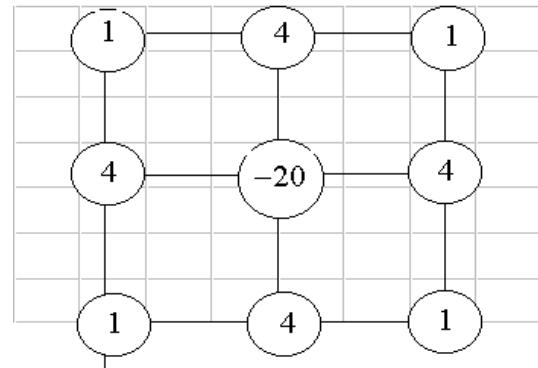
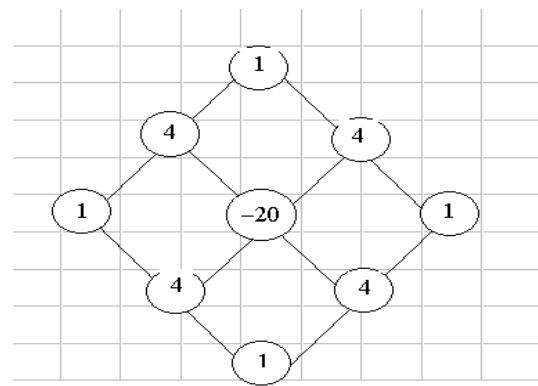
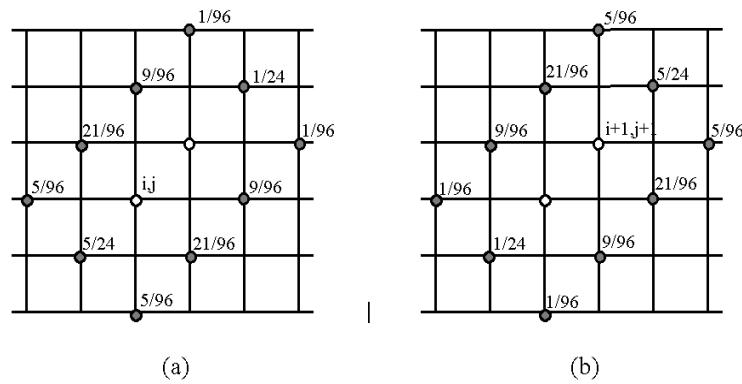
Nilai faktor pengenduran optimum berujikaji, ω , bagi ketiga-tiga jenis kaedah didapati untuk setiap n dengan melarikan program untuk beberapa nilai ω yang berbeza dan memilih yang paling kurang bilangan lelarannya. Sepanjang ujikaji ini, toleran penumpuan yang digunakan adalah $\epsilon = 10^{-5}$. Keputusan yang didapati bagi setiap kaedah ditunjukkan dalam Rajah (11).

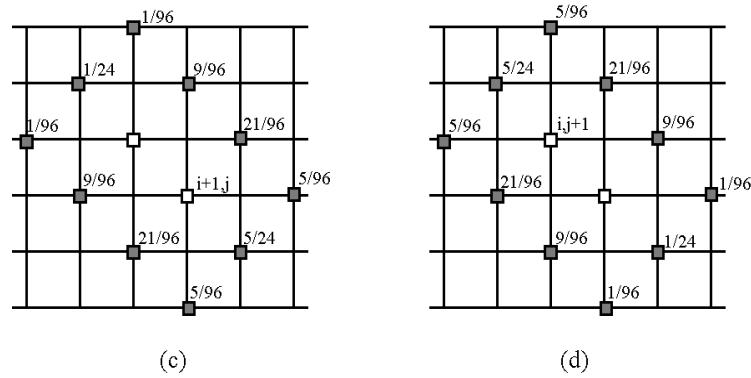
Bagi mendapatkan jumlah operasi aritmetik atau beban kerja yang diperlukan untuk mendapatkan penyelesaian bagi model masalah (36), kita gabungkan keputusan bagi bilangan lelaran dari Rajah (11) untuk ketiga-tiga kaedah dengan bilangan operasi bagi setiap lelaran. Jumlah operasi aritmetik yang dijalankan adalah seperti dalam Rajah (12). Di sini, kita menganggapkan masa perlaksanaan untuk operasi *hasildarab* dan *hasiltambah* adalah lebih kurang sama.

Rajah (12) menunjukkan secara teorinya kaedah kumpulan 9 titik memerlukan masa larangan komputer yang kurang daripada kaedah kumpulan 4 titik dan kaedah lelaran titiknya yang disebabkan oleh kompleksiti pengiraannya yang kurang. Jelas sekali ini digambarkan oleh larian komputer yang dipaparkan pada Rajah (11) dari ujikaji ini. Dari keputusan ini boleh disimpulkan bahawa kaedah lelaran kumpulan (atau blok) dengan mengambil kumpulan titik yang lebih banyak menumpu dengan lebih cepat jika dibandingkan dengan kaedah lelaran titiknya yang bersepadan atau kumpulan dengan bilangan titik yang sedikit. Ini menunjukkan bahawa kaedah lelaran blok baru ini mampu digunakan sebagai penyelesaian masalah Poisson alternatif dengan efisien serta kejituhan yang lebih kurang sama dengan stensil 9-titik *piawai* (7). Penggunaan 16 atau 25 titik dalam satu-satu kumpulan dari terbitan pendiskretan yang sama adalah wajar dikaji dalam menyelesaikan masalah Poisson ini dan hasil kajian ini akan dilaporkan pada masa akan datang.

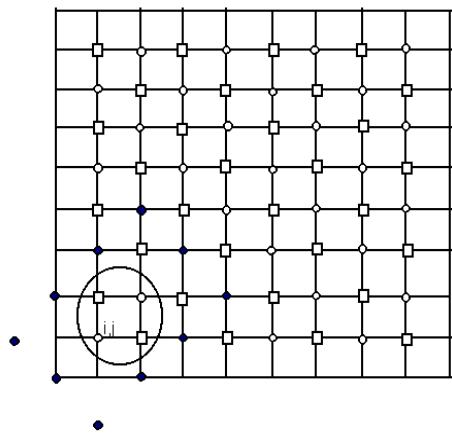
Rujukan

- [1] Abdullah, A.R., "The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method : A Fast Poisson Solver", International Journal of Comp. Math.,1991, 38, pg 61-70.
- [2] Abdullah, A.R.,& Ali, N.H.M., "The Comparative Study of Parallel Strategies for the Solution of Elliptic PDE's",Parallel Algorithms and Applications,1996, 10, pg 93-103.
- [3] Adams, L.M., Leveque, R.J. and Young, D.M., "Analysis of the SOR Iteration for the 9-Point Laplacian", SIAM Journal of Numerical Analysis,1988, 25(5), pg 1156-1180.
- [4] Ali, N.H.M. & Abdullah, A.R. "New Parallel Nine-point Poisson Solver", Journal of Information Technology,1998, 10, Vol 2, pg 1-9.
- [5] Ali, N.H.M. & Abdullah, A.R. "Parallel Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method For Elliptic PDE's",Proceedings of the Seventh IASTED/ISMM International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems, Washington D.C.,1995, pg 302-304.
- [6] Dahlquist,G. & Bjorck,A., "Numerical Methods",1974, Englewood Cliffs, N.Jersey,Prentice-Hall.
- [7] Yousif, W.S., "New Block Iterative Methods for the Numerical Solution of Boundary Value Problems",1984,PhD Thesis, Loughborough University of Technology.
- [8] Yousif, W.S. & Evans, D.J., "Explicit DeCoupled Group Iterative Methods And Their Parallel Implementations",Parallel Algorithms and Applications,1995, 7, pg 53-71.

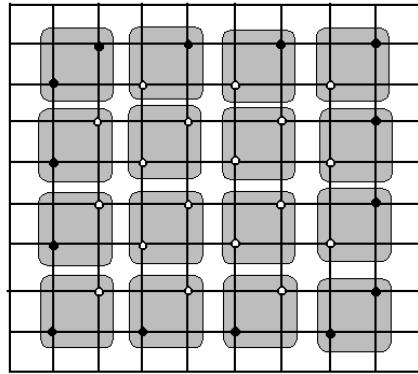
Rajah 1: Molekul pengiraan skema beza terhingga 9 titik *piaawai*.Rajah 2: Molekul pengiraan skema beza terhingga 9 titik *putaran*.



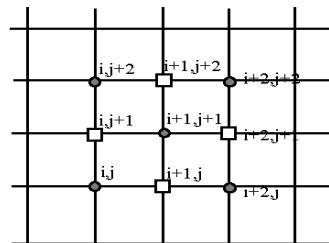
Rajah 3: Molekul pengiraan pada titik-titik: (a) (i, j) , (b) $(i + 1, j + 1)$, (c) $(i + 1, j)$ (d) $(i, j + 1)$.



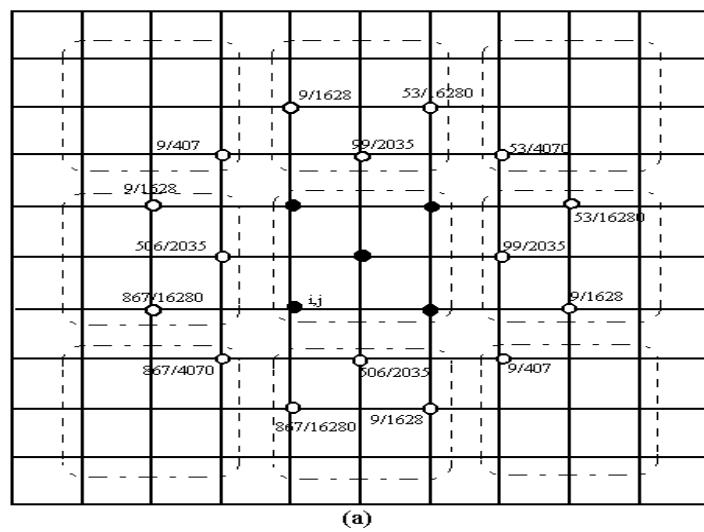
Rajah 4: Kedudukan titik grid yang terlibat bila menilaikan U_{11} .

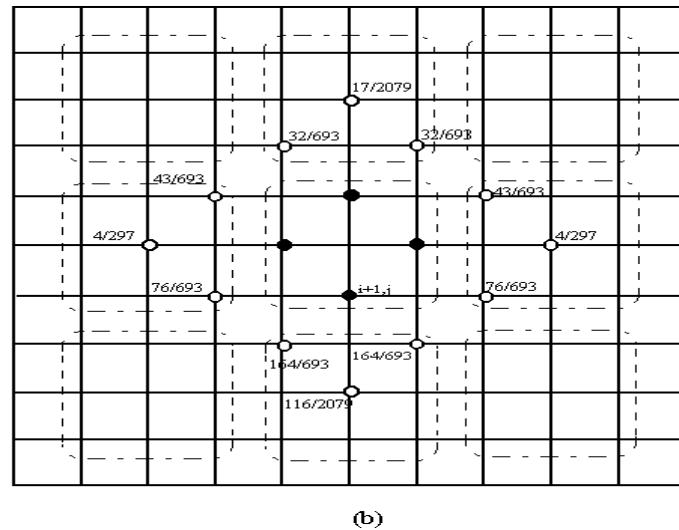


- - gunakan rumus 5-titik putaran pada titik-titik ini

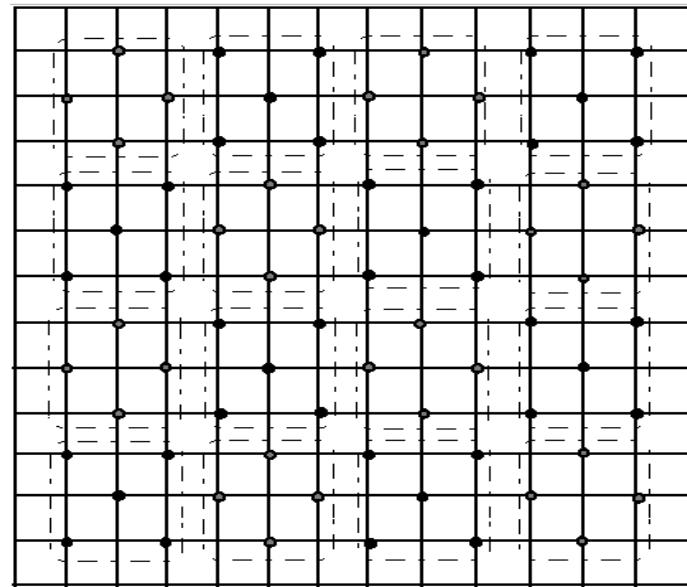
Rajah 5: Kedudukan titik-titik yang menggunakan rumus 5-titik *putaran*.

Rajah 6: Satu kumpulan mesy 9-titik.

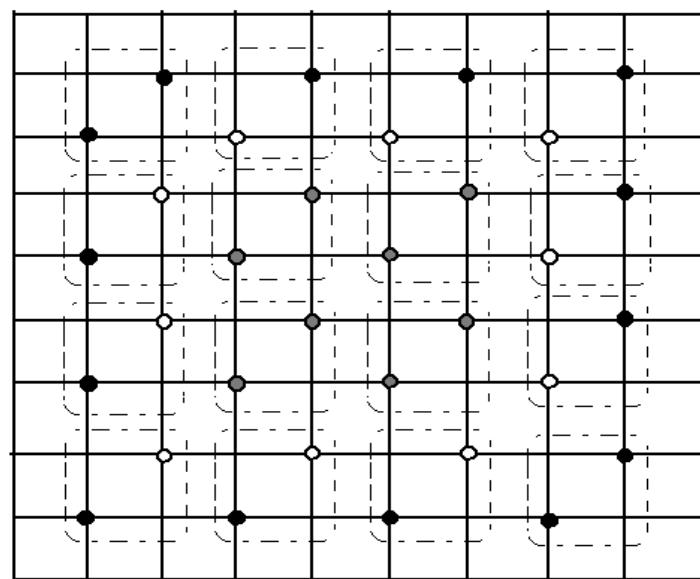




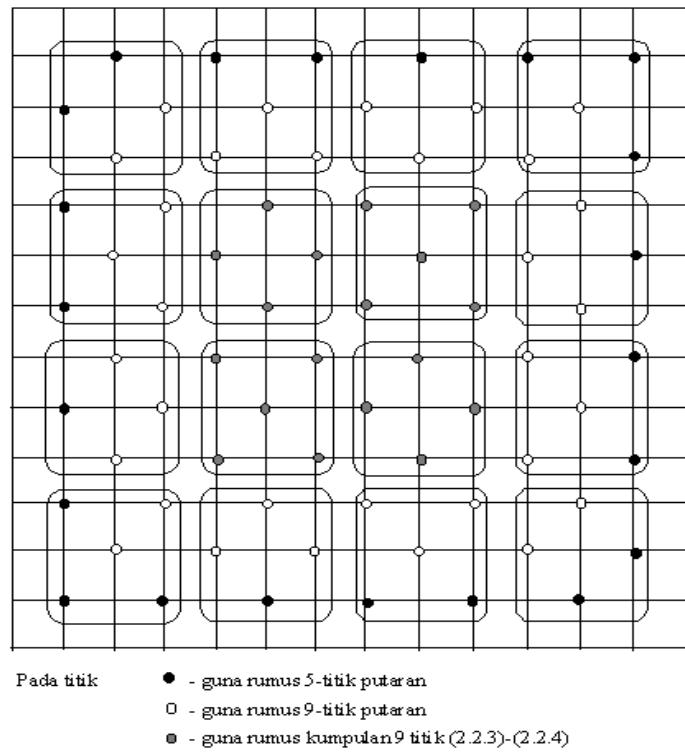
(b)

Rajah 7: Molekul pengiraan pada titik-titik: (a) (i, j) & (b) $(i + 1, j)$.

Rajah 8: Tertib bagi skema kumpulan 9 titik.



Rajah 9: Titik-titik yang menggunakan rumus-rumus yang berbeza dalam proses lelaran (Kumpulan 4-titik).



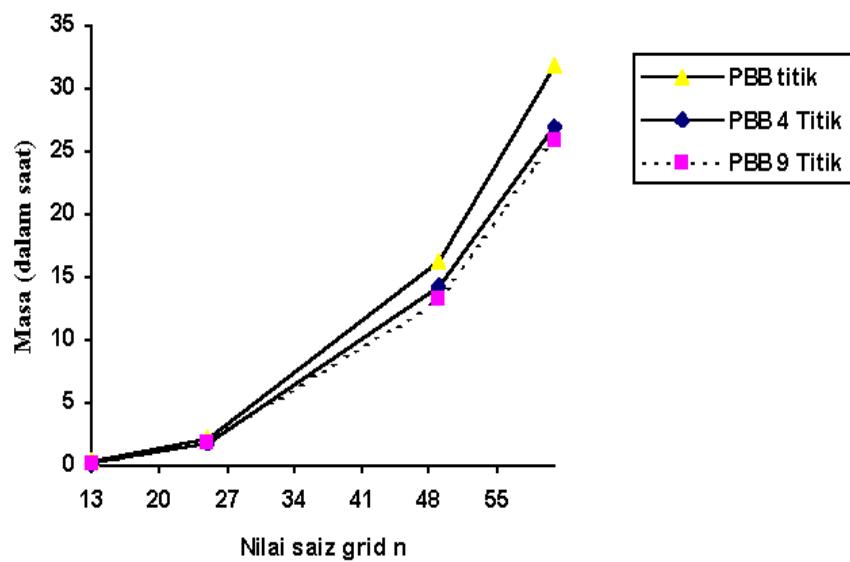
Rajah 10: Titik yang menggunakan rumus berbeza dalam proses lelaran (Kaedah Kumpulan 9-titik).

h^{-1}	Kaedah Titik (PBB)			Kaedah Kumpulan 4-Titik(PBB)			Kaedah Kumpulan 9-Titik(PBB)		
	ϖ	Bilangan Lelaran	Masa (dalam saat)	ϖ	Bilangan Lelaran	Masa (dalam saat)	ϖ	Bilangan Lelaran	Masa (dalam saat)
25	1.70	37	2.13	1.66	33	1.83	1.61	30	1.75
49	1.83	71	16.19	1.81	63	14.27	1.78	54	13.27
61	1.86	88	31.71	1.84	76	26.99	1.81	67	25.95

Rajah 11: Keputusan larian ketiga-tiga kaedah untuk beberapa nilai n .

m	Kaedah Titik (PBB)	Kaedah Kumpulan 4-Titik(PBB)	Kaedah Kumpulan 9-Titik(PBB)
24	142,402	140,394	139,548
48	1,118,630	1,115,334	1,085,292
60	2,176,480	2,119,496	1,915,080

Rajah 12: Kompleksiti Pengiraan bagi ketiga-tiga kaedah.

Rajah 13: Masa larian bagi ketiga-tiga kaedah untuk beberapa nilai n .