Matematika, 2002, Jilid 18, bil. 1, hlm. 63–66

Kumpulan Gambar Rajah Hasil Darab Langsung

Abd Ghafur Bin Ahmad
Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor

Abstrak Kertas ini membincangkan sifat-sifat kumpulan gambar rajah hasil darab langsung monoid jenis homotopi terhingga.

Katakunci Monoid, Kumpulan Gambar Rajah, Homotopi Terhingga

Abstract *This paper discusses properties of direct products of monoid with finite homotopy group diagrams.*

Keywords *Monoids, Diagram Groups, Finite Homotopy.*

1 Pengenalan

Andaikan M dan N dua monoid yang masing-masing ditakrifkan oleh persembahan monoid terhingga $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}|\boldsymbol{r}]$ dan $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}]$. Maka *hasil darab langsung monoid M dan N*, $M \times N$, ditakrifkan oleh persembahan monoid

$$\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}].$$

Campbell, Robertson, Ruskuc dan Thomas [2] telah menunjukkan bahawa jika M dan N merupakan monoid yang automatik dan terhuraikan, maka $M \times N$ juga adalah automatik. Rujuk [1] untuk sifat-sifat automatik dan [6] untuk sifat terhuraikan dengan lebih mendalam. Maka permasalahan perkataan bagi monoid $M \times N$ boleh ditentukan jika$M \times N$ adalah jenis homotopi terhingga. Wang [8] telah menunjukkan bahawa jika M dan N adalah jenis homotopi terhingga maka begitu juga $M \times N$. Satu monoid M adalah *jenis homotopi terhingga* jika wujud suatu asas yang terhingga untuk gambar-gambar sfera dalam $\boldsymbol{M}$. Rujuk misalnya [4,5,8]. Gambar-gambar sfera ini dianggapkan sebagai lintasan tertutup satu graf $\Gamma(\boldsymbol{M})$ yang terbentuk daripada $\boldsymbol{M}$. Maka kita boleh anggapkan graf $\Gamma(\boldsymbol{M})$ sebagai kompleks Squier[7]. Maka wujud kumpulan gambar rajah $D(\boldsymbol{M})$ (Rujuk[3]). Kumpulan gambar rajah ini berisomorfisma dengan kumpulan asasi graf $\Gamma(\boldsymbol{M})$ iaitu $\pi_1(\Gamma(\boldsymbol{M}))$. Maka monoid M adalah jenis homotopi terhingga jika $D(\boldsymbol{M})$ dijana oleh suatu set terhingga.

Kita akan buktikan bahawa jika M dan N dua monoid yang tak terhuraikan maka $M \times N$ berisomorfisma dengan suatu kumpulan Abelan bebas. Ini bermaksud $M \times N$ adalah jenis homotopi terhingga. Pembuktian akan ditunjukkan dalam bahagian 3. Bahagian 2 membincangkan kumpulan gambar rajah yang diperlukan dalam pembuktian.

2 Kumpulan Gambar Rajah

Andaikan $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}|\boldsymbol{r}]$ persembahan yang menakrifkan monoid M. Suatu unsur $m \in M$ adalah *terhuraikan* jika $m = m_1 m_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in M$. Jika $m \neq m_1 m_2$ untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$, maka m adalah *tak terhuraikan* jika semua penjana $X \in \boldsymbol{x}$ tak terhuraikan.

Setiap $R \in \boldsymbol{r}$ merupakan pasangan (R^{+1}, R^{-1}) ditulis $R^{+1} = R^{-1}$. Andaikan F monoid bebas dalam $\boldsymbol{x}$. Untuk setiap perkataan $W \in F$ yang berbentuk $W = UR^{\varepsilon}V$ $(U, V \in F, R \in \boldsymbol{r}, \varepsilon = \pm 1)$ boleh diwakilkan secara geometri oleh satu gambar atom $A = (U, R, V, \varepsilon)$. Anggapkan gambar A sebagai sisi yang bermula di titik awalan $\iota(A) = UR^{\varepsilon}V$ dan berakhir di titik terminal $\tau(A) = UR^{-\varepsilon}A$. Maka diperoleh graf $\Gamma(\boldsymbol{M})$. Andaikan X sebarang perkataan positif dalam $\boldsymbol{x}$. Maka merupakan satu bucu dalam graf $\Gamma(\boldsymbol{M})$, lalu diperoleh kumpulan asasi dengan titik asasi X, ditandakan $\pi_1(\Gamma(\boldsymbol{M}),X)$. Jadi kumpulan ini remeh jika $\Gamma(\boldsymbol{M})$ merupakan pokok. Secara geometri lintasan tertutup dalam $\Gamma(\boldsymbol{M})$, adalah gambar sfera. Set kelas kesetaraan gambar sfera membentuk kumpulan yang dinamakan kumpulan gambar rajah $D(\boldsymbol{M},X)$. Jadi boleh ditunjukkan yang $\pi_1(\Gamma(\boldsymbol{M}),X)$ dan $D(\boldsymbol{M},X)$ adalah berisomorfisma.

Lema 1 *Andaikan M monoid yang ditakrif oleh $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}|\boldsymbol{r}]$. Jika $X \in \boldsymbol{x}$ adalah tak terhuraikan, maka $D(\boldsymbol{M},X)$ remeh.*

Bukti Andaikan $X \in \boldsymbol{x}$ tak terhuraikan. Maka $X \neq m_1 m_2$ untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$. Jadi tidak wujud sebarang subgambar $(X, m_1 m_2)$ seperti dalam Rajah 1. Oleh itu tidak wujud sebarang sisi yang bermula atau berakhir di X. Jadi $D(\boldsymbol{M},X)$ remeh.

3 Pembuktian Teorem

Kita akan buktikan teorem berikut.

Teorem 1 *Andaikan M dan N monoid yang tak terhuraikan, masing-masing ditakrifkan oleh persembahan monoid terhingga $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}|\boldsymbol{r}]$ dan $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}]$. Jika $X \in \boldsymbol{x}$ dan n bilangan unsur $\boldsymbol{s}$ yang berbentuk $(S^{+1}, 1)$ atau $(1, S^{-1})$ maka*

$$D(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}, X) \cong \boldsymbol{Z}^n.$$

Bukti Andaikan M dan N monoid yang tak terhuraikan, masing-masing ditakrifkan oleh persembahan monoid terhingga $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{x}|\boldsymbol{r}]$ dan $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}]$. Untuk setiap $S \in \boldsymbol{s}$ yang berbentuk $(S^{+1}, 1)$ atau $(1, S^{-1})$, wujud suatu lintasan terhingga dalam graf $\Gamma(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N})$, ditanda XS seperti dalam Rajah 2. Di sini $S^{+1} = y_1 y_2 \ldots y_{k-1} y_k$ atau $y_1 y_2 \ldots y_{k-1} y_k = S^{-1}$. Rujuk Lema Prinsipal Wang [8]. Perhatikan bahawa jika $S \in \boldsymbol{s}$, tetapi $S^{+1} \neq 1$ dan $1 \neq S^{-1}$, maka lintasan tertutup yang diperkenalkan oleh Wang hampir menyerupai XS tetapi tidak melalui bucu X. Untuk setiap XS, lema di atas menunjukkan bahawa tidak wujud sebarang lintasan lain yang menyentuh bucu-bucu dalam XS (kecuali di X) kerana M dan N tak terhuraikan. Maka $D(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}, X)$ dijana oleh n gambar sfera A_i yang sepadan dengan XS_i. Perhatikan bahawa setiap gabungan gambar sfera–(X, X) adalah kalis tukar tertib dan tidak wujud sebarang sel–2 yang lain. Maka $D(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}, X) \cong \boldsymbol{Z}^n$.

Rujukan

[1] C.M. Campbell, E.F. Robertson, N. Ruskuc & R.M. Thomas, *Automatic semigroups*, Theoritical Computer Science, 250, 365–391, 2001.

[2] C.M. Campbell, E.F. Robertson, N. Ruskuc & R.M. Thomas, *Direct products of automatic semigroups,* J. Australian Math. Soc. (Series A), 69 19–24, 2000.

[3] V. Guba & M. Sapir, ,*Diagram groups,* Memoirs of the Amer. Math. Soc., 620, 1997.

[4] S.J. Pride, *Low dimensional homotopy theory for monoids,* Inter. J. Alg. Comput.,5, 631–649, 1995.

[5] S.J. Pride, *Low dimensional homotopy theory for monoids II: groups,* Glasgow Math. J., 41, 1–11, 1999.

[6] E.F. Robertson, N. Ruskuc & J. Weigold, *Generators and relations of direct products of semigroups,* Trans. Amer. Math. Soc., 350, 2665–2685, 1998.

[7] C.C. Squier, *A fitness conditions for rewriting system,* revision by F. Otto & Y. Kobayashi, Theoretical Computer Science, 131, 271–294, 1994.

[8] J. Wang, *Finite derivative type for semi-direct products of monoids,* Theoretical Computer Science, 191, 219–228, 1998.