Matematika, 2003, Jilid 19, bil. 1, hlm. 71–81

Pengawalan Lengkung Kubik Nisbah Alternatif

Azhar Ahmad
Kolej Matrikulasi Pulau Pinang
Pongsu Seribu, Kepala Batas, Pulau Pinang
Malaysia

Jamaludin Md. Ali
Pusat Pengajian Sains Matematik
Universiti Sains Malaysia, 11800, Minden
Pulau Pinang.

Abstrak Dalam kertas ini perbincangan berkisar kepada tajuk mengawal lengkung kubik nisbah alternatif secara geometri untuk rekabentuk geometri berbantukan komputer (RGBK). Dengan kaedah ini kita mampu mengekalkan lengkung yang cembung dan berlengkok balas, dengan menentukan kekangan pemberat terhadap titik kawalan. Lengkung nisbah kubik dicirikan oleh dua titik hujung, dua tangen hujung dan titik perantaraan. Kajian menunjukkan pemberat berperanan mengawal bentuk lengkung. Dengan menggunakan koordinat barispusat, pemahaman persamaan dan ketaksamaan menjadi lebih mudah dan senang diubahsuaikan.

Katakunci lengkung kubik nisbah alternatif, pengawalan, koordinat barispusat.

Abstract *In this paper the discussion is around the topic of geometrical control of rational alternative cubic curve in computer aided geometric design (CAGD). With this method we are able to preserve convexity of curves and inflecting curves, by determining the constraints of corresponding scalar weights with respect to the control points. The rational cubic curve is characterised by two end points, two end slopes and an intermediate point. This study shows the weights play important role in controlling the shape of curve segment. By using the barycentric coordinate, it will make related equations and inequations easier to understand and to be manipulated.*

Keywords *rational alternative cubic curve, controlling, barycentric coordinate*

1 Pengenalan

Kertas ini membincangkan berkenaan satu kaedah pengawalan bentuk lengkung satah secara geometri ke atas satu perwakilan lengkung berparameter iaitu lengkung kubik nisbah alternatif. Kaedah yang dipertimbangkan bagi kajian ini diperkenalkan oleh Jamaludin [1]. Dengan kaedah ini, kita dengan mudah dapat mengawal secara geometri suatu tembereng lengkung supaya ia cembung atau berlengkok balas.

Pembinaan lengkungan adalah berasaskan daripada tiga syarat iaitu tembereng lengkung menginterpolasi dua titik hujung, dua tangen hujung dan satu titik tertentu yang disebut sebagai titik perantaraan. Pengawalan bentuknya hanya akan dilakukan menerusi perubahan nilai pemberat-pemberat yang sejajar dengan titik-titik kawalan.

Kajian menunjukkan bahawa pemberat-pemberat titik hujung berperanan kepada pembinaan lengkung yang menginterpolasi syarat di atas. Manakala pemberat-pemberat pendalaman pula bergantung kepada pemberat-pemberat titik hujung untuk menentukan sama ada lengkung adalah berkeadaan cembung atau berlengkokbalas. Penggunaan koordinat barispusat dalam kertas ini bertujuan meringkaskan persamaan-persamaan yang diperolehi dan memudahkan kita memanipulasikan persamaan-persamaan yang ada.

2 Lengkung kubik nisbah alternatif

Persamaan lengkung kubik nisbah alternatif oleh Jamaludin[2] diberikan seperti berikut

$$r(t) = \frac{F_0(t)w_0P_0 + F_1(t)w_1P_1 + F_2(t)w_2P_2 + F_3(t)w_3P_3}{F_0(t)w_0 + F_1(t)w_1 + F_2(t)w_2 + F_3(t)w_3}; \qquad 0 \le t \le 1 \tag{1}$$

dengan fungsi pengadun

$$\begin{aligned} F_0(t) &= (1-t)^2\,(1+(2-\alpha)t) \\ F_1(t) &= \alpha(1-t)^2 t \\ F_2(t) &= \beta t^2\,(1-t) \\ F_3(t) &= t^2\,(1+(2-\beta)\,(1-t)) \end{aligned} \tag{2}$$

dengan α dan β adalah parameter bentuk dengan kedua-duanya tidak sifar. Manakala w_0, w_1, w_2, w_3 adalah pemberat yang selaras dengan titik kawalan P_0, P_1, P_2, P_3 . Bagi kertas ini $P_1 = P_2 = H$, ini dilakukan bagi mengurangkan pemalar-pemalar anu dan persamaan lengkung dapat ditulis semula sebagai

$$r(t) = \frac{F_0(t)w_0P_0 + F_1(t)w_1H + F_2(t)w_2H + F_3(t)w_3P_3}{F_0(t)w_0 + F_1(t)w_1 + F_2(t)w_2 + F_3(t)w_3}; \qquad 0 \le t \le 1 \tag{3}$$

Perbincangan tidak menghadkan nilai tertentu bagi pemberat. Cuma satu andaian yang digunakan adalah penyebut bagi persamaan (3) tidak sifar, ini kerana $r(t)$ akan tidak tertakrif pada keadaan tersebut.

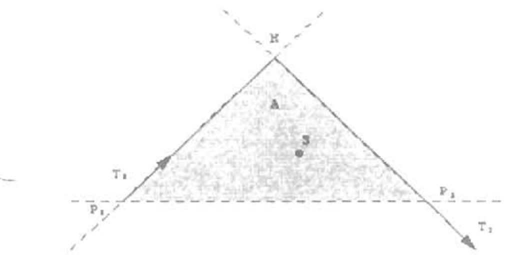
3 Kawalan secara geometri lengkung kubik nisbah alternatif

Teknik pengawalan lengkung boleh dihasilkan mengikut langkah-langkah berikut.

Langkah 1:

Langkah pertama adalah mendapatkan hubungan-hubungan antara syarat yang diberi dengan titik-titik kawalan perwakilan lengkung secara geometri. Ini bertujuan untuk memperolehi kaitan antara pemalar-pemalar yang ada serta dapat mengurangkan penggunaan pemalar anu.

Daripada syarat pembinaan lengkung, dua kes yang dipertimbangkan adalah seperti ditunjukkan dengan Rajah 3.1 dan 3.2. Kes 1 adalah apabila sudut putaran θ iaitu sudut di antara vektor unit tangen T_0 dan T_1 berada dalam selang $0 < \theta < 180^\circ$. Manakala kes 2 adalah apabila sudut putaran dalam selang $180^\circ < \theta < 360^\circ$. Biarkan titik-titik hujung sebagai $P_0(x_0, 0), P_3(x_3, 0)$, dengan $x_0 < x_3$ serta vektor unit tangen adalah $T_0 = (m_0, n_0)$ dan $T_1 = (m_1, n_1)$, di mana $n_1, n_0 \neq 0$ dan T_0 adalah tidak selari dengan T_1. Dengan itu H yang merupakan titik kawalan kedua diperolehi dengan mudah. Titik perantaraan pula disimbolkan sebagai $S(x_s, y_s)$.



Rajah 3.1

Rajah 3.2

Dengan menggunakan kaedah vektor, kita andaikan $\overrightarrow{P_0H} = \lambda_0 T_0$ dan $\overrightarrow{P_3H} = \lambda_1 T_1$ dengan λ_0 dan λ_1 adalah skalar. Titik H boleh dinyatakan sebagai

$$H(x_0 + \lambda_0 m_0, \lambda_0 n_0) \quad @ \quad H(x_3 + \lambda_1 m_1, \lambda_1 n_1) \tag{4}$$

Bandingan koordinat H membolehkan λ_0 dan λ_1 diperolehi sebagai

$$\lambda_0 = \frac{(x_3 - x_0)n_1}{m_0 n_1 - m_1 n_0} \quad \text{dan} \quad \lambda_1 = \frac{(x_3 - x_0)n_0}{m_0 n_1 - m_1 n_0}$$

Kesimpulannya koordinat H boleh ditentukan secara terus apabila koordinat P_0, P_3, T_0 dan T_1 diketahui.

Olehkerana koordinat barispusat digunakan di dalam kertas ini , kaedah memperolehi koordinat titik S adalah seperti berikut. Merujuk kepada Rajah 3.1 dan 3.2, bagi sebarang titik S dalam rantau A pada segitiga P_0HP_3 ia boleh dinyatakan dalam gabungan linear koordinat barispusat (Farin, [3]) sebagai

$$S = (x_s, y_s) = \tau_0 P_0 + \tau_1 H + \tau_2 P_3;$$

dengan $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1$. Nilai (τ_0, τ_1, τ_2) boleh diperolehi menerusi penyelesaian sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} x_s &= \tau_0 x_0 + \tau_1(x_0 + \lambda_0 m_0) + \tau_2 x_3 \\ y_s &= \tau_1(\lambda_0 n_0) \\ 1 &= \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 \end{aligned}$$

Untuk kes 1, semua koordinat barispusat bagi titik S di dalam segitiga P_0HP_3 adalah bernilai positif. Manakala bagi kes 2 pula, koordinat τ_1 bagi sebarang titik S dalam rantau A adalah negatif sementara τ_0 dan τ_2 adalah positif.

Langkah 2:

Oleh kerana peranan parameter α dan β pemberat-pemberat adalah untuk menentukan bentuk sesuatu lengkungan, maka langkah kedua adalah mendapatkan persamaan yang melibatkan parameter α, β serta pemberat-pemberat. Proses ini boleh dilakukan melalui pembinaan sistem persamaan linear dari syarat lengkung melalui titik perantaraan S.

Bagi memudahkan pengiraan, titik perantaraan S dipilih pada ketika $t = 0.5$, ini boleh dilakukan kerana lengkung kubik nisbah adalah takberubah kepada perskalaan pemberat dan ia juga takberubah dengan tranformasi bilinear (Farin,[3]), (March [4]). Apabila $t = 0.5$, koordinat titik S adalah

$$S(x_s, y_s) = r(0.5) = \frac{(4-\alpha)w_0P_0 + \alpha w_1 H + \beta w_2 H + (4-\beta)w_3P_3}{(4-\alpha)w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 + (4-\beta)w_3};$$

Koordinat bagi S dapat dinyatakan seperti berikut dengan menggantikan koordinat titik-titik hujung dan H dari (4)

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{(4-\alpha)w_0x_0 + (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_0 + \lambda_0 m_0) + (4-\beta)w_3x_3}{(4-\alpha)w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 + (4-\beta)w_3} \\ y_s &= \frac{(\alpha w_1 + \beta w_2)\lambda_0 m_0}{(4-\alpha)w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 + (4-\beta)w_3} \end{aligned}$$

Dengan mengandaikan bahawa penyebutnya

$$(4-\alpha)w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 + (4-\beta)w_3 = 1 \tag{5}$$

Diperolehi

$$x_s = (4-\alpha)w_0x_0 + (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_0 + \lambda_0 m_0) + (4-\beta)w_3x_3 \tag{6}$$

dan

$$y_s = (\alpha w_1 + \beta w_2)\lambda_0 n_0. \tag{7}$$

Dengan menggunakan (7) yang ditulis sebagai

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \frac{y_s}{\lambda_0 n_0} \tag{8}$$

dan menggantikannya ke dalam (5) dan (6), penyelesaian kedua-duanya membolehkan α dan β ditulis sebagai

$$\alpha = \frac{4w_0n_1(x_3 - x_0) - n_1(x_3 - x_s) - y_s m_1}{w_0 n_1(x_3 - x_0)} \tag{9}$$

$$\beta = \frac{4w_3n_0(x_3 - x_0) - n_0(x_s - x_0) - y_s m_0}{w_3 n_0(x_3 - x_0)} \tag{10}$$

Ketiga-tiga persamaan iaitu (8), (9) dan (10) adalah kunci utama bagi menentukan kekangan bagi pemberat untuk bentuk-bentuk lengkung yang diingini. Selanjutnya dengan penggantian koordinat barispusat , persamaan (8), (9) dan (10) boleh diringkaskan sebagai

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \tau_1 \tag{11}$$

$$\alpha = 4 - \frac{\tau_0}{w_0} \tag{12}$$

$$\beta = 4 - \frac{\tau_2}{w_3} \tag{13}$$

Langkah 3:

Langkah seterusnya adalah memparameterkan semula lengkung kubik nisbah dengan parameter u daripada hubungan $t = \dfrac{u}{1+u}$. Ini bertujuan bagi memudahkan kita menganalisa ciri-ciri lengkung yang dibina. Dengan penggantian parameter tersebut, daripada (3) komponen-komponen bagi $r(u)$ diberi sebagai

$$x(u) = \frac{[1+u(3-\alpha)]\, w_0 x_0 + (\alpha u w_1 + \beta u^2 w_2)(x_0 + \lambda_0 m_0) + \left[u^2(u+3-\beta)\right] w_3 x_3}{[1+u(3-\alpha)]\, w_0 + \alpha u w_1 + \beta u^2 w_2 + [u^2(u+3-\beta)]\, w_3} \tag{14}$$

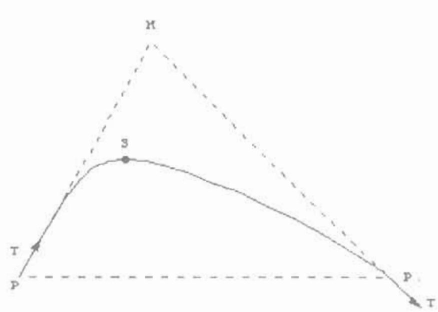
$$y(u) = \frac{(\alpha u w_1 + \beta u^2 w_2)\lambda_0 n_0}{[1+u(3-\alpha)]\, w_0 + \alpha u w_1 + \beta u^2 w_2\, [u^2(u+3-\beta)]\, w_3} \tag{15}$$

Langkah 4:

Langkah terakhir adalah menaksirkan ciri-ciri lengkung daripada gambaran geometri bagi mendapatkan kekangan bagi pemberat w_0 dan w_3 yang sesuai dan seterusnya mendapatkan kekangan bagi pemberat w_1 dan w_2 untuk kawalan bentuk lengkungan.

4 Lengkung cembung melalui titik perantaraan

Rajah 4.1 menunjukkan suatu tembereng lengkungan cembung yang melalui S, menginterpolasikan titik-titik hujung dan tangen-tangen hujung. Berpandukan gambarajah tersebut ciri pertama lengkung cembung yang ingin dibina adalah lengkung tersebut tidak bersilang dengan garis selari dengan T_0.



Rajah 4.1: Tembereng lengkung cembung melalui titik perantaraan S

Jika diandaikan bahawa lengkung bersilang dengan garis yang selari dengan tangen hujung T_0 maka wujud suatu nilai u tertentu di mana hasildarab vektor T_0 dengan $[r(u) - P_0]$ adalah sifar

$$\begin{aligned} T_0 \times [r(u) - P_0] &= 0 \\ y(u)m_0 - [x(u) - x_0]\, n_0 &= 0 \\ \frac{-n_0\left[u^2(u+3-\beta)(x_3 - x_0)\right]}{[1+u(3-\alpha)]\, w_0 + \alpha u w_1 + \beta u^2 w_2 + [u^2(u+3-\beta)]\, w_3} &= 0 \end{aligned}$$

Diketahui $n_0 \neq 0$ dan $(x_3 - x_0) \neq 0$ maka bagi u yang bukan sifar, diperolehi

$$u = \beta - 3 \tag{16}$$

Ini menunjukkan bahawa lengkung memotong garis tangen ketika $u = \beta - 3$. Jika lengkung tidak bersilang dengan garis yang selari dengan T_0, maka $u \leq 0$. Selang bagi β yang sesuai bagi memuaskan ketaksamaan di atas adalah

$$\beta \leq 3 \tag{17}$$

Dengan cara yang sama untuk ciri kedua iaitu lengkung berbentuk cembung tidak bersilang dengan garis yang selari dengan T_1. Diperolehi lengkung bersilang dengan garis tangen T_1 pada ketika

$$u = \frac{1}{\alpha - 3} \tag{18}$$

oleh itu kekangan bagi α yang sesuai bagi memuaskan ketaksamaan di atas adalah

$$\alpha < 3. \tag{19}$$

Seterusnya dengan menggantikan α daripada (12) kepada (17) serta β daripada (13) digantikan pada (19), kekangan w_0 dan w_3 yang sesuai apabila τ_0 dan τ_2 bernilai positif adalah

$$0 < w_0 \leq \tau_0 \tag{20}$$
$$0 < w_3 \leq \tau_2 \tag{21}$$

Ketaksamaan (20) dan (21) ini boleh digambarkan dengan jelas sebagai rantau R di dalam graf w_3 lawan w_0 (Rajah 4.2). Pemilihan (w_0, w_3) dari R akan menghasilkan lengkungan yang menginterpolasi syarat yang diberi.

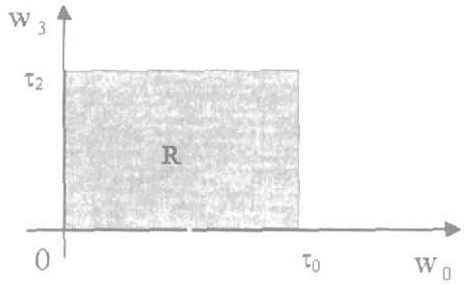
Ciri ketiga bagi suatu lengkung cembung adalah tembereng lengkung tidak akan memotong perentas P_0P_3. Bermula dengan andaian bahawa lengkung bersilang dengan perentas P_0P_3, maka $y(u) = 0$. Oleh itu daripada persamaan (15)

$$\frac{(\alpha u w_1 + \beta u^2 w_2)\lambda_0 n_0}{[1+u(3-\alpha)]\, w_0 + \alpha u w_1 + \beta u^2 w_2 + [u^2(u+3-\beta)]\, w_3} = 0,$$

$$u(\alpha w_1 + \beta u w_2)\lambda_0 n_0 = 0$$

untuk u tidak sifar, $\lambda_0 \neq 0$ dan $n_0 \neq 0$ maka lengkung bersilang dengan perentas P_0P_3 ketika

$$u = -\frac{\alpha w_1}{\beta w_2}. \tag{22}$$



Rajah 4.2: Graf w_3 lawan w_0

Oleh itu untuk suatu lengkung cembung tidak memotong perentas P_0P_3, maka $u < 0$ dan dengan hubungan (11) diperolehi kekangan bagi pemberat w_1 dan w_2 adalah seperti berikut

$$\frac{\tau_1}{\alpha} < w_1 < 0 \text{ apabila } \frac{\tau_1}{\alpha} \text{ bernilai negatif atau } 0 < w_1 < \frac{\tau_1}{\alpha} \text{ apabila } \frac{\tau_1}{\alpha} \text{ adalah positif.} \tag{23}$$

$$\frac{\tau_1}{\beta} < w_2 < 0 \text{ apabila } \frac{\tau_1}{\beta} \text{ bernilai negatif atau } 0 < w_2 < \frac{\tau_1}{\beta} \text{ apabila } \frac{\tau_1}{\beta} \text{ adalah positif.} \tag{24}$$

Kesimpulannya ialah apabila kita ingin membina suatu lengkung cembung yang menginterpolasi titik-titik hujung dan melalui suatu titik perantaraan, pertamanya kita tentukan pemberat w_0 dan w_3 dari selang (20) dan (21) atau pasangan tertib (w_0, w_3) daripada rantau R pada Rajah 4.2. Seterusnya pemilihan nilai w_1 yang bergantung kepada $\frac{\tau_1}{\alpha}$ dari (23). Susulan itu w_2 akan didapati secara terus melalui persamaan (11) mengikut ketetapan (24). Peranan w_1 dan w_2 adalah untuk menentukan sama ada lengkung tersebut cembung atau berlengkokbalas.

Membina lengkung cembung yang dibincangkan sebelum ini bukanlah pembinaan secara automatik, pemberat w_0 dan w_3 perlu ditentukan terlebih dahulu kemudian diikuti dengan penentuan w_2 atau w_1 daripada selangnya. Kita boleh permudahkan sedikit dengan memperincikan kekangan w_0 melalui pengkelasan nilai α, iaitu apabila $\alpha < 0$ dan $0 < \alpha \leq 3$, begitu juga bagi kekangan w_3 ketika $\beta < 0$ dan $0 < \beta \leq 3$. Ini bertujuan untuk mengenalpasti pasangan nilai w_1 dan w_2 yang diperlukan apabila sebarang (w_0, w_3) dipilih daripada rantau R. Dari (12) dan (13) hasil pengkelasan adalah seperti berikut,

$$\text{apabila } \alpha < 0 \text{ maka } 0 < w_0 < \frac{1}{4}\tau_0 \text{ dan}$$

$$\text{apabila } 0 < \alpha \leq 3 \text{ maka } \frac{1}{4}\tau_0 < w_0 \leq \tau_0,$$

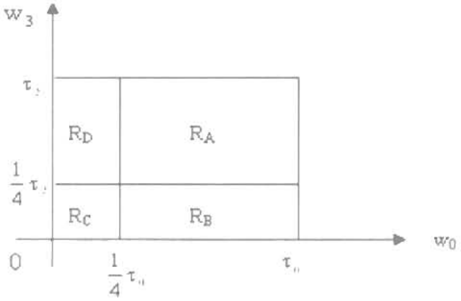
$$\text{apabila } \beta < 0 \text{ maka } 0 < w_3 < \frac{1}{4}\tau_2 \text{ dan}$$

$$\text{apabila } 0 < \beta \leq 3 \text{ maka } \frac{1}{4}\tau_2 < w_3 \leq \tau_2.$$

Merujuk Rajah 4.2, graf w_3 lawan w_0, kita boleh bahagikan rantau

$$R = \{(w_0, w_3) : 0 < w_0 \leq \tau_0, 0 < w_3 \leq \tau_2\}$$

kepada beberapa rantau kecil , Rajah 4.3



Rajah 4.3: Graf w_3 lawan w_0, rantau-rantau kecil hasil pengkelasan α dan β

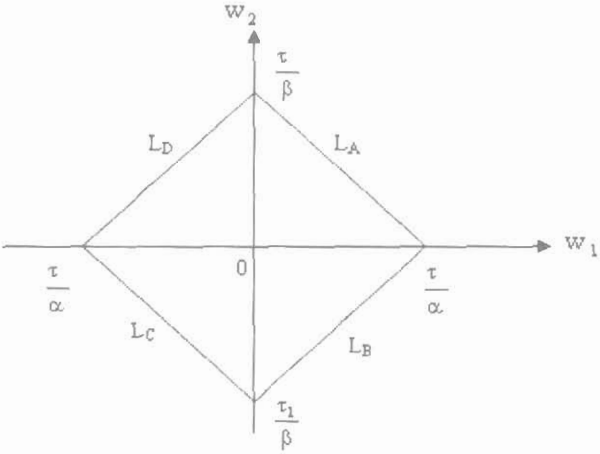
Dengan rantau-rantau berikut,

$$\begin{aligned}
\text{Rantau } R_A &= \left\{(w_0, w_3) : \frac{1}{4}\tau_0 < w_0 \leq \tau_0, \frac{1}{4}\tau_2 < w_3 \leq \tau_2\right\} \\
\text{Rantau } R_B &= \left\{(w_0, w_3) : \frac{1}{4}\tau_0 < w_0 \leq \tau_0, 0 < w_3 < \frac{1}{4}\tau_2\right\} \\
\text{Rantau } R_C &= \left\{(w_0, w_3) : 0 < w_0 < \frac{1}{4}\tau_0, 0 < w_3 < \frac{1}{4}\tau_2\right\} \qquad (25) \\
\text{Rantau } R_D &= \left\{(w_0, w_3) : 0 < w_0 < \frac{1}{4}\tau_0, \frac{1}{4}\tau_2 < w_3 \leq \tau_2\right\}
\end{aligned}$$

Seterusnya katakan kita ingin membina tembereng lengkung yang cembung merujuk kepada kes 1 (Rajah 3.1), di mana nilai τ_1 adalah positif. Apabila pemilihan (w_0, w_3) dibuat daripada rantau R_A, kita akan memperolehi selang bagi w_2 adalah $0 < w_2 < \frac{\tau_1}{\beta}$, kerana α serta β bernilai positif. Semua nilai w_2 dalam selang tersebut akan menghasilkan w_1 terangkum dalam $0 < w_1 < \frac{\tau_1}{\alpha}$, pasangan nilai w_1 dan w_2 daripada hubungan (11) boleh diwakili oleh titik-titik pada tembereng garis L_A pada graf w_2 lawan w_1, Rajah 4.4. Dan L_A boleh ditulis sebagai $\left\{(w_1, w_2) : 0 < w_1 < \frac{\tau_1}{\alpha}, 0 < w_2 < \frac{\tau_1}{\beta}, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha > 0, \beta > 0\right\}$. Sesungguhnya persamaan bagi tembereng L_A diterbitkan daripada persamaan (11) apabila kita menulisnya dalam bentuk pintasan iaitu

$$\frac{w_1}{\left(\frac{\tau_1}{\alpha}\right)} + \frac{w_2}{\left(\frac{\tau_1}{\beta}\right)} = 1$$

Pintasan pada paksi w_1 adalah $\frac{\tau_1}{\alpha}$ dan pintasan pada paksi w_2 pula ialah $\frac{\tau_1}{\beta}$. Nilai w_1 serta w_2 tidak tertakrif apabila $\alpha = 0$ iaitu $w_0 = \frac{1}{4}\tau_0$ atau apabila $\beta = 0$ iaitu $w_3 = \frac{1}{4}\tau_2$.



Rajah 4.4: Graf w_2 lawan w_1

Begitu juga apabila kita memilih pasangan (w_0, w_3) daripada rantau R_B, R_C atau R_B daripada Rajah 4.3 maka pasangan (w_1, w_2) pula adalah pada tembereng garis L_B, L_C atau L_D daripada Rajah 4.4, dengan

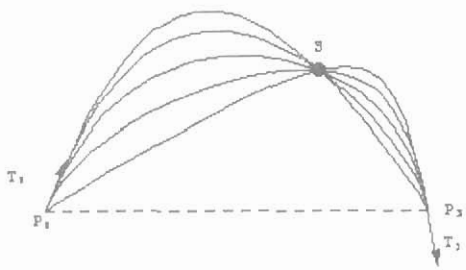
$$\begin{aligned} L_B &= \left\{(w_1, w_2) : 0 < w_1 < \frac{\tau_1}{\alpha}, \frac{\tau_1}{\beta} < w_2 < 0, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha > 0, \beta < 0\right\} \\ L_C &= \left\{(w_1, w_2) : \frac{\tau_1}{\alpha} < w_1 < 0, \frac{\tau_1}{\beta} < w_2 < 0, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha < 0, \beta < 0\right\} \\ L_D &= \left\{(w_1, w_2) : \frac{\tau_1}{\alpha} < w_1 < 0, 0 < w_2 < \frac{\tau_1}{\beta}, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha < 0, \beta > 0\right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Penentuan di atas adalah bergantung kepada tandaan pada α dan β. Keseluruhannya akan menghasilkan lengkungan yang berbentuk cembung dan dengan cara ini kita akan lebih mudah menentukan pemberat pendalamannya apabila perubahan pemberat hujung berlaku.

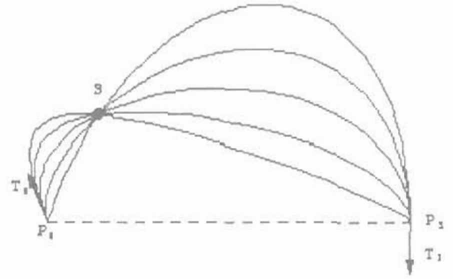
Berbeza daripada keadaan pada kes 1, pembinaan tembereng lengkung cembung yang dilakukan merujuk kepada kes 2 (Rajah 3.2), memerlukan kita memilih (w_1, w_2) yang berlainan setelah pemilihan (w_0, w_3) daripada rantau R_A, R_B, R_C atau R_D. Ini disebabkan oleh τ_1 yang bernilai negatif bagi kes 2. Ringkasnya pembinaan lengkungan yang cembung adalah seperti berikut, apabila kita memilih

$$\begin{aligned} &(w_0, w_3) \text{ daripada rantau } R_A, (w_1, w_2) \text{ dipilih daripada } L_C. \\ &(w_0, w_3) \text{ daripada rantau } R_C, (w_1, w_2) \text{ dipilih daripada } L_A. \\ &(w_0, w_3) \text{ daripada rantau } R_B, (w_1, w_2) \text{ dipilih daripada } L_D. \\ &(w_0, w_3) \text{ daripada rantau } R_D, (w_1, w_2) \text{ dipilih daripada } L_B. \end{aligned} \quad (27)$$

Rajah 4.5 dan 4.6 menunjukkan beberapa tembereng lengkung cembung yang dibina apabila satu koordinat (w_0, w_3) ditetapkan dalam rantau R dan dengan beberapa (w_1, w_2) daripada tembereng lengkung yang sama mengikut ketetapan (20) serta (27) yang dinyatakan sebagaimana di atas.



Rajah 4.5



Rajah 4.6

5 Lengkung lengkokbalas melalui titik perantaraan

Lengkung berlengkokbalas juga boleh diperolehi apabila sebarang nilai (w_0, w_3) daripada rantau R dipilih dan nilai (w_1, w_2) daripada garis lurus $\frac{w_1}{\left(\frac{\tau_1}{\alpha}\right)} + \frac{w_2}{\left(\frac{\tau_1}{\beta}\right)} = 1$ tetapi bukan pada tembereng -tembereng garis L_A, L_B, L_C atau L_D. Contohnya, apabila kita memilih nilai (w_0, w_3) daripada R_A dan nilai (w_1, w_2) adalah daripada

$$\left\{(w_1, w_2) : w_1 < 0, w_2 > \frac{\tau_1}{\beta}, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha > 0, \beta > 0\right\}$$

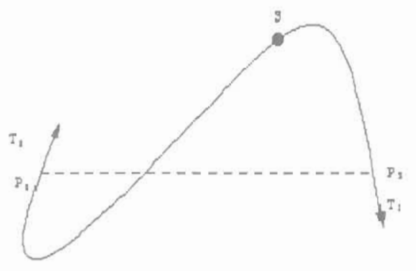
kita akan perolehi lengkung lengkok balas sebagaimana Rajah 5.1. Manakala apabila nilai (w_1, w_2) adalah daripada

$$\left\{(w_1, w_2) : w_1 > \frac{\tau_1}{\alpha}, w_2 < 0, w_2 = \frac{\tau_1 - \alpha w_1}{\beta}, \alpha > 0, \beta > 0\right\}$$

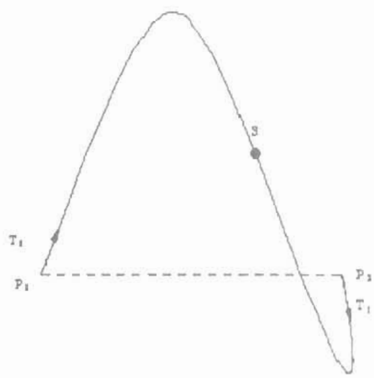
bentuk lengkung lengkokbalas adalah seperti Rajah 5.2. Lengkung yang berlengkokbalas tersebut menginterpolasi titik-titik hujung dan tidak memotong tangen-tangen hujung sebaliknya memintas perentas P_0P_3. Pelarasan nilai (w_1, w_2) dalam selangnya akan menghasilkan famili lengkung lengkokbalas yang mempunyai ciri yang sama.

6 Kesimpulan

Dengan teknik di atas kita berjaya menentukan kekangan pemberat-pemberat w_0, w_1, w_2, w_3 bagi mengawal lengkung kubik nisbah alternatif yang menginterpolasi dua titik hujung, dua tangen hujung dan satu titik perantaraan. Jelas sekali bahawa pembinaan tembereng lengkung ditentukan oleh pasangan nilai pemberat-pemberat hujung iaitu w_0 dan w_3. Manakala pengawalan bentuknya sama ada ia cembung atau berlengkokbalas adalah melalui pasangan nilai pemberat-pemberat pendalaman w_1 dan w_2 yang sesuai.



Rajah 5.1



Rajah 5.2

Rujukan

[1] Jamaludin M. Ali . *Geometric Control of Planar Curves. PhD thesis: School of Manufacturing*, The University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham, U.K. 1994.

[2] Jamaludin M. Ali, *An Alternative Derivation of Said Basic Function, Sains Malaysiana*, Universiti Kebangsaan Malaysia, Vol 23(3), 1994.

[3] Gerald E. Farin, *Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, New York: Academic Press, 1996.

[4] Duncan Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, London: Springer-Verlag Limited, 1999.