

PENENTUAN DOMAIN TARIKAN BAGI SISTEM SKALAR BERUBAH MASA

MALIK HJ. ABU HASSAN
Jabatan Matematik
Universiti Pertanian Malaysia
43400 UPM Serdang, Selangor

Abstrak. Satu pendekatan berangka bagi menentukan domain tarikan atau domain kestabilan asimptot bagi sistem skalar berubah masa dikemukakan. Beberapa sistem skalar berubah masa dipertimbangkan dan didapati bahawa masalah penumpuan tak seragam tidak timbul dengan menggunakan pendekatan ini. Sempadan kestabilan yang diperoleh menumpu kepada sempadan kestabilan sebenar.

Kata Kunci. Zubov, kestabilan, domain tarikan, Liapunov, tak berautonomi

1 PENGENALAN

Kajian dan analisis telatah asimptot, kestabilan, domain tarikan atau domain kestabilan asimptot (DKA) sistem berautonomi merupakan bidang yang penting dalam teori kestabilan. Beberapa teknik telah dihasilkan untuk menentukan DKA bagi sistem tersebut. Gless [4], El-Abiad dan Nagappan [2], Fallside dan Patel [3] dan Prusty dan Sharma [9] memperoleh rantau kestabilan yang dibatasi oleh fungsi Liapunov $V(\underline{x}) = V(\underline{x}_c)$ dan tembereng garis pada titik $\underline{x} = \underline{x}_c$ dengan $\underline{x}_c$ menunjukkan keadaan keseimbangan tak stabil. Bagaimanapun tiada jaminan bahawa domain tarikan lengkap boleh diperolehi dengan menggunakan kaedah tersebut.

Kaedah Zubov yang diilustrasikan oleh Margolis dan Vogt [7], Yu dan Vongsuriya [11] dan De Sarkar dan Rao [1] mengalami keburukan di mana penumpuannya tak seragam. Miyagi dan Taniguchi [8] dengan bantuan kaedah Lagrange-Charpit telah menyelesaikan persamaan pembezaan separa Zubov tetapi sempadan kestabilan tepat tidak dapat diperolehi kerana teori Zubov tidak digunakan. White [10] berjaya mengatasi masalah penumpuan tak seragam bagi kaedah Zubov dan memberi anggaran DKA yang lebih baik untuk sistem berautonomi. Kaedah berangka White bermula dekat sempadan DKA dan mengira trajektori-trajektori yang menghampiri asalan. Rantau kestabilan yang dipertimbangkan ialah penghampiran kepada $S_R \cap D(f)$ di mana $D(f)$ adalah DKA dan

$$S_R = \{\underline{x} : |\underline{x}| < R\} \quad (1.1)$$

dengan R nombor positif.

Hassan [6] telah memperluaskan kaedah Zubov kepada sistem skalar berubah masa melalui teknik penyelesaian bersiri dan didapati penumpuan tak seragam juga berlaku dalam sistem tak berautonomi. Penentuan domain tarikan bagi sistem tak berautonomi belum banyak menerima perhatian berbanding sistem berautonomi. Dalam kertas ini, kita

akan mengira domain tarikan bagi sistem skalar berubah masa dengan kaedah yang dibincangkan oleh Hassan [5]. Beberapa sistem skalar berubah masa dipertimbangkan dan didapati sempadan kestabilan yang dihasilkan menumpu kepada sempadan kestabilan sebenar.

2 PENENTUAN DOMAIN TARIKAN BAGI SISTEM SKALAR BERUBAH MASA

Kaedah ini diberi secara ringkas, walau bagaimanapun penerangan lanjut boleh diperoleh dalam Hassan [5].

Pertimbangkan sistem skalar berubah masa

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (2.1)$$

Persamaan Zubovnya ialah

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = -\phi(x, t)(1 - eV(x, t)), \quad (2.2)$$

yang berperingkat satu dengan $V(x, t)$ fungsi Liapunov, $\phi(x, t)$ fungsi tentu positif dan 'decrecent' dan e mengambil nilai 0 atau 1. Jika $e = 1$, persamaan (2.2) dikenali sebagai persamaan sekata Zubov manakala $e = 0$ memberi persamaan Zubov terubahsuai. Mengikut Zubov [12] fungsi $V(x, t)$ mesti mempunyai sifat tentu positif dan 'decrecent' dalam rantau kestabilan jika $\phi(x, t)$ tentu positif dan 'decrecent'.

Persamaan bantu bagi (2.2) ialah

$$\frac{dx}{f(x, t)} = dt = \frac{dV}{-\phi(x, t)(1 - eV(x, t))} \quad (2.3)$$

Penyusunan semula memberi

$$\frac{dx}{dV} = -\frac{f(x, t)}{\phi(x, t)(1 - eV(x, t))} \quad (2.4)$$

dan

$$\frac{dt}{dV} = -\frac{1}{\phi(x, t)(1 - eV(x, t))}. \quad (2.5)$$

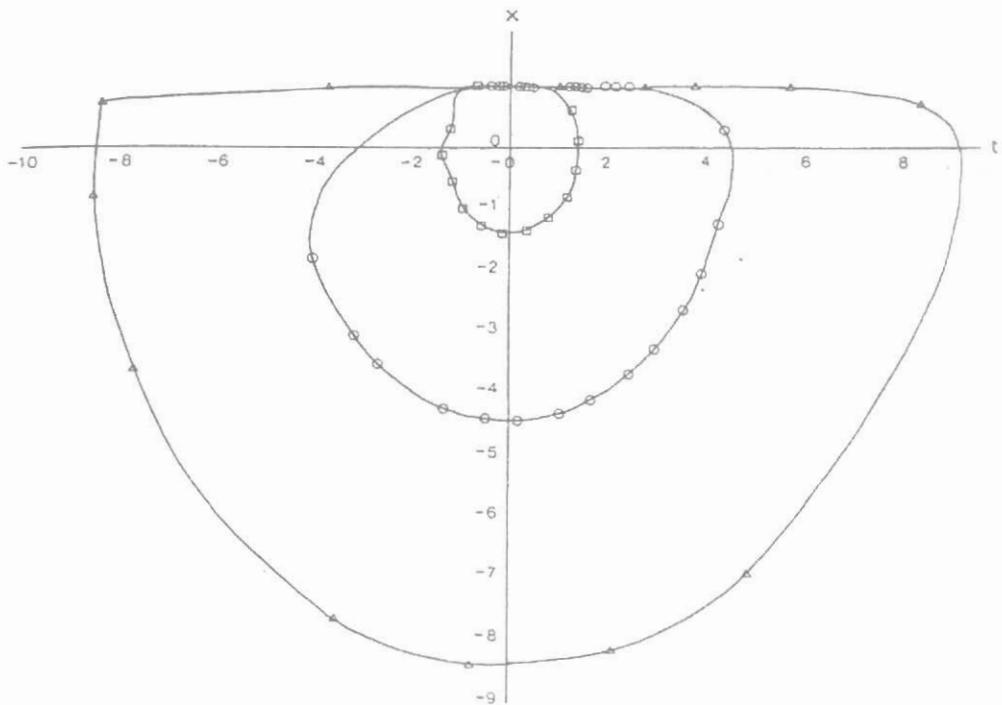
Titik awal (x_0, t_0) sekarang di pertimbangkan untuk berubah di sepanjang garisan jejari daripada asalan. Jadi kita tulis

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos \theta \\ t_0 &= r_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan θ tetap dan r_0 dibenarkan berubah. Kaedah Runge- Kutta peringkat keempat atau sebarang kaedah berangka akan digunakan bagi mengamirkan (2.4) dan (2.5) untuk memperoleh $\hat{x}^{(n)}, \hat{t}^{(n)}$ sebagai penghampiran bagi $x(V_0 - p), t(V_0 - p)$ untuk x_0, t_0, p dan saiz langkah h yang diberi, dengan $p = nh$.

Takrifkan

$$W(r_0, \theta, h, p) = \|(\hat{x}^{(n)}, \hat{t}^{(n)})\|. \quad (2.7)$$



Rajah 1

Kemudian ubahan bagi W terhadap r_0 untuk θ, h, p tetap dianalisiskan. Setelah memperoleh telatah W , kita kira $r_0(\theta, h, p)$ yang ditakrifkan sebagai

$$r_0(\theta, h, p) = \text{maks } r_0 \in \left\{ r_0 : \frac{\partial W(r_0, \theta, h, p)}{\partial r_0} = 0 \right\} \quad (2.8)$$

Kita mula dengan mengira $W(R, \theta, h, p)$ di mana R adalah seperti (1.1). Kemudian kira W untuk r_0 menyusut sehingga W menokok semula, dan selepas itu kurangkan selang sebanyak setengah untuk memperoleh $\hat{r}_0$ dengan jituanya. $\hat{r}_0$ adalah penghampiran kepada suatu titik di atas kontur $V = p$, dan p mesti dipilih sedemikian hingga kontur $V = p$ cukup dekat kepada kontur $v = \infty$ atau $V = 1$ (masing-masing untuk $e = 0$ atau 1). Untuk mendapat titik sempadan dengan lebih jitu kita guna

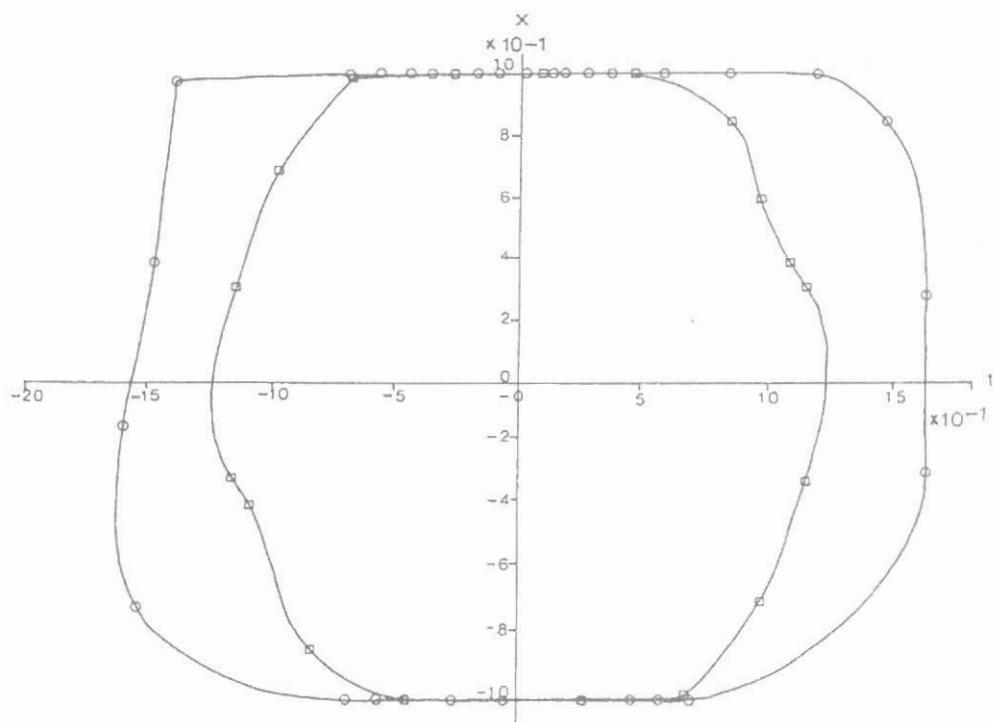
$$r^*(\theta, p) = \underset{h}{\text{optimum}} \hat{r}_0(\theta, h, p) \quad (2.9)$$

untuk suatu nilai khusus bagi θ dan p .

Kemudian kita ingin tahu sama ada titik yang diperoleh itu stabil atau tidak. Takrifkan $J(\theta)$ sebagai

$$J(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{jika rantau tak selanjar bagi lengkung } W \text{ lawan } r_0 \text{ tidak ditemui,} \\ 1 & \text{jika rantau tak selanjar bagi lengkung } W \text{ lawan } r_0 \text{ ditemui.} \end{cases}$$

Jika $J(\theta) = 0$ untuk semua θ , maka sistem tidak stabil. Sementara $J(\theta) = 1$ untuk sebarang θ memberi suatu sistem stabil. Dengan menggunakan $J(\theta)$ dan $r^*(\theta, p)$ sempadan bagi DKA dapat dikira.



Rajah 2

3 CONTOH DAN KEPUTUSAN

i) Pertimbangkan sistem skalar berubah masa

$$\dot{x} = -tx(1-x). \quad (3.1)$$

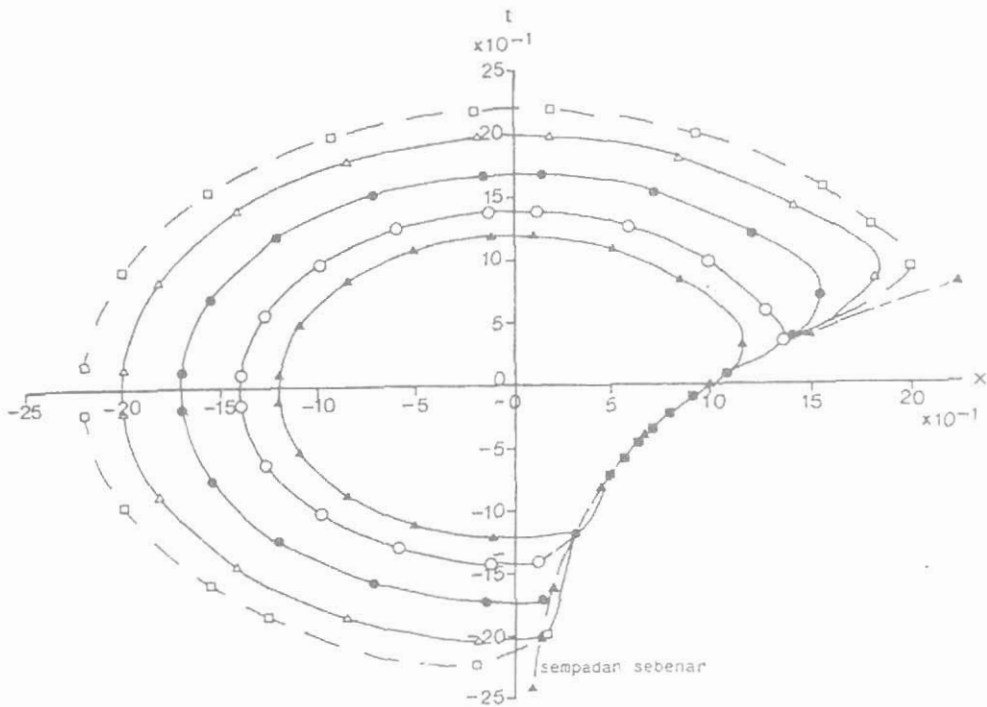
Penyelesaian ialah

$$x(t, x_0, t_0) = \frac{1}{1 + \{(1-x_0)/x_0\} \exp\{(t^2 - t_0^2)/2\}}$$

untuk x_0, t_0 yang diberi.

Domain tarikan bagi titik keseimbangan ialah $-\infty < x < 1$. Penyelesaian bersiri yang diperoleh oleh Hassan [5] menunjukkan bahawa hasil tambah separa ganjil memberi $|x| < 1$ sebagai rantau tarikan dan hasil tambah separa genap sebagai memberi domain tarikan $-\infty < x < 1$. Rajah 1 menunjukkan domain tarikan yang diperoleh daripada kaedah berangka untuk $R = 1.4, 4.4$ dan 8.4 . Walaupun nilai R besar, kaedah ini masih lagi memberi domain tarikan di mana x kurang dari satu.

ii) Sekarang kita pertimbangkan sistem yang mempunyai domain tarikan tepat untuk setiap hasil tambah separa bagi penyelesaian siri. Sistem itu ialah



Rajah 3

$$\dot{x} = -tx(1 - x^2) \quad (3.2)$$

dengan penyelesaian

$$x^2(t, x_0, t_0) = \frac{1}{1 + \{(1 - x_0^2)/x_0^2\} \exp\{t^2 - t_0^2\}}$$

untuk syarat awal x_0, t_0 sebarang. Domain tarikannya ialah $|x| < 1$. Penyelesaian bersiri yang diperoleh oleh Hassan [5] menunjukkan bahawa hasil tambah separa memberi domain tarikan tepat, $-1 < x < 1$. Rajah 2 menunjukkan domain tarikan bagi titik keseimbangan yang diperoleh dengan menggunakan $R = 1.2$ dan 1.7 . Rantau yang diperoleh bagi nilai R tersebut masih lagi termasuk dalam domain tarikan dan dalam julat $-1 < x < 1$.

iii) Pertimbangan sistem berubah masa tak linear

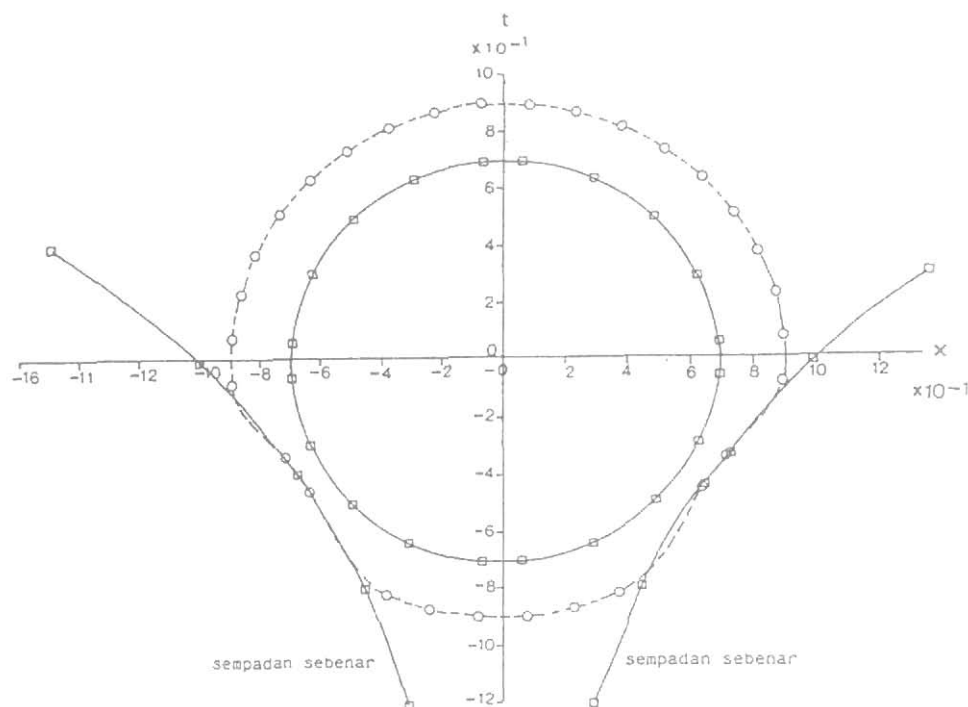
$$\dot{x} = -x + 2x^2e^{-t} \quad (3.3)$$

yang stabil secara asimptot. Penyelesaiannya ialah

$$x(t, x_0, t_0) = \frac{1}{e^{-t} + (x_0^{-1}e^{-t_0} - e^{-2t_0})e^t}$$

untuk x_0, t_0 yang diberi. Domain tarikan bagi titik keseimbangan ialah $-\infty < x < e^t$. Penyelesaian bersiri yang diperoleh oleh Hassan [5] menunjukkan bahawa hasil tambah se-

para genap memberi domain tarikan $-\infty < x < e^t$ dan hasil tambah separa ganjil memberi rantau penumpuan $|x| < e^t$. Rajah 3 menunjukkan domain tarikan yang diperoleh dengan menggunakan $R = 1.2, 1.4, 1.7, 2.0$ dan 2.2 bersama-sama dengan sempadan kestabilan sebenar. Kaedah berangka ini mengira sempadan kestabilan yang hampir sama dengan sempadan sebenar di dalam rantau ujian.



Rajah 4

iv) Pertimbangkan pula suatu sistem yang mempunyai domain tarikan yang dibatasi oleh $|x| < e^t$. Sistem berubah masa

$$\dot{x} = -x + 2x^3 e^{-2t}$$

mempunyai penyelesaian dalam bentuk

$$x^2(t, x_0, t_0) = \frac{1}{e^{-2t} + e^{2t}(x_0^{-2} e^{-2t_0} - e^{-4t_0})}$$

untuk x_0, t_0 sebarang. Domain tarikan bagi titik keseimbangan ialah $e^{-t} < x < e^t$. Rajah 4 menunjukkan domain tarikan yang diperoleh dengan menggunakan $R = 0.7$ dan 0.9 bersama-sama dengan sempadan kestabilan sebenar. Sempadan yang diperoleh menumpu kepada sempadan kestabilan sebenar.

4 KESIMPULAN

Domain tarikan bagi beberapa sistem skalar berubah masa ditentukan dan didapati bahawa

masalah penumpuan tak seragam yang di alami dalam teknik penyelesaian siri Zubov tidak berlaku dalam kaedah berangka. Sempadan kestabilan yang diperoleh menumpu kepada sempadan kestabilan sebenar dan dengan demikian domain tarikan tepat dihasilkan.

RUJUKAN

- [1] A.K.De Sarkar dan M.D. Rao, *Zubov method and transient stability problems of power systems*, Proc. I.E.E., vol. 118, 1971, pp. 1035-1040.
- [2] A.H. El-Abiad dan K. Nagappan, *Transient stability region of multimachine power systems*, I.E.E.E. Trans. PAS-85, 1966, pp. 169-179.
- [3] F. Fallside dan M.R. Patel, *On the application of the Liapunov method to synchronous machine stability*, I.J.C., vol. 4, 1966, pp. 501-513.
- [4] G.E. Gless, *Direct method of Liapunov applied to transient power system stability*, I.E.E.E. Trans. PAS-85, 1966, pp. 159-168.
- [5] M.A. Hassan, *Extensions of Zubov's Method for the determination of domains of attraction*, Tesis Ph.D, LUT, 1982.
- [6] M.A. Hassan, *Pertuasan kaedah Zubov kepada sistem skalar berubah masa*, MATEMATIKA, vol. 7 no.1, 1991, pp. 63-74.
- [7] S.G. Margolis dan W.G. Vogt, *Control Engineering applications of V.I. Zubov's construction procedure for Liapunov functions*, I.E.E.E. Trans. AC 8, 1963, pp. 104-113.
- [8] H. Miyagi dan T. Taniguchi, *Application of the Lagrange-Charpit method to analyse the power system's stability*, I.J.C. 32, 1980, pp. 371-379.
- [9] S. Prusty dan G.D. Sharma, *Power system transient stability regions : transient stability limits involving saliency and the optimized Szego's Liapunov function*, I.J.C. 19, 1974, pp. 373-384.
- [10] P. White, *Computation of domains of attraction of ordinary differential equations using Zubov's method*, Tesis Ph.D, LUT, 1979.
- [11] Y.N. Yu dan K. Vongsuriya, *Nonlinear power system stability study by Liapunov function and Zubov's method*, I.E.E.E. Trans. PAS-86, 1967, pp. 1480-1484.
- [12] V.I. Zubov, *Methods of A.M. Liapunov and their application*, Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1969.