Matematika, 2003, Jilid 19, bil. 2, hlm. 121–138

Pembinaan Homeomorfisma dari Sfera ke Elipsoid

Liau Lin Yun & Tahir Ahmad
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai
Johor Darul Takzim
Malaysia

Abstrak Dalam makalah ini dipaparkan pembinaan homeomorfisma dari sfera berunit satu; S^2 ke elipsoid berunit satu pada satah-xy serta berkutub di $z = 2$ dan $z = -2$; E^2 melalui struktur permukaan Riemann. Pembuktian secara pembinaan dan percanggahan diketengahkan.

Katakunci Permukaan Riemann, homeomorfisma

Abstract *In this paper, we present the construction of homeomorphism from unit sphere; S^2 to ellipsoid which is one unit in xy-axis and its poles are at $z = 2$ and $z = -2$; E^2 through Riemann surface structures. Proving techniques by construction and contradiction are highlighted.*

Keywords *Riemann surface, homeomorphism*

1 Pengenalan

Sfera dan elipsoid merupakan dua bentuk geometri yang sering kita temui bukan sahaja secara formal dalam pengajian kalkulus, bahkan di alam sekeliling kita. Contohnya, sebutir telur adalah lebih hampir berbentuk elipsoid daripada sfera. Walau bagaimanapun, kedua-dua bentuk tersebut adalah setara jika dilihat dari kaca mata topologi [11]. Dengan kata lain, wujudnya homeomorfisma iaitu pemetaan yang bijeksi, terbuka dan selanjar antara sfera dan elipsoid. Dalam makalah ini, kita akan binakan homeomorfisma antara sfera dan elipsoid.

2 Pembuktian Permukaan Riemann E^2

Teori permukaan Riemann sudah berkembang sehingga ke tahap hipermukaan Riemann dan klasifikasi permukaan Riemann, tetapi penggunaanya masih ke belakang lagi. Secara formalnya, konsep ini ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 1 *[4] Suatu permukaan Riemann ialah suatu ruang topologi; dengan famili fungsi serta memenuhi syarat-syarat berikut:*

(1) E ialah Hausdorff yang terkait.

(2) Setiap α_i ialah homeomorfisma dari domain E_i ke subset terbuka D_i pada C (satah kompleks).

(3) $\{E_i : i \in I\}$ ialah tudung terbuka untuk E.

(4) Fungsi transisi $t_{12} : \alpha_2(E_1 \cap E_2) \to \alpha_1(E_1 \cap E_2)$ yang ditakrifkan adalah holomorfi.

Sebelum kita membuktikan bahawa E^2 (lihat Rajah 1) ialah suatu permukaan Riemann, terlebih dahulu nyatakan E^2 sebagai

$$E^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\} \tag{1}$$

Kita akan buktikan bahawa E^2 ialah sebuah permukaan Riemann. Jalan pembuktian yang berpandukan Takrif 1 akan diambil. Pembuktian ini termasuklah:

- menunjukkan bahawa E^2 ialah ruang topologi Hausdorff yang terkait,
- menunjukkan bahawa setiap α_i ialah homeomorfisma dari domain E_i ke subset terbuka D_i pada C (satah kompleks) untuk $[i : 1, 2]$,
- menunjukkan bahawa set $\{E_i : i \in I\}$ ialah tudung terbuka untuk E^2
- menunjukkan bahawa fungsi transisi $t_{12} : \alpha_2(E_1 \cap E_2) \to \alpha_1(E_1 \cap E_2)$ bersifat holomorfi (lihat Rajah 2)

Teorem 1 $E^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\}$ *ialah permukaan Riemann.*

Bukti

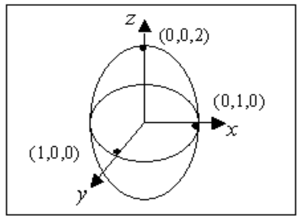
Pertimbangkan $E_1 = E^2 - \{(0, 0, 2)\}$ dan $E_2 = E^2 - \{(0, 0, -2)\}$ (lihat Rajah 3) serta dua fungsi yakni, $\alpha_1(x, y, z) = \dfrac{x + iy}{1 - \frac{z}{2}}$ untuk E_1 dan $\alpha_2(x, y, z) = \dfrac{x - iy}{1 + \frac{z}{2}}$ untuk E_2. Takrifkan set terbuka v pada E^2 dalam bentuk $v = \theta \cap E^2$ dengan θ ialah set terbuka bagi $\mathbb{R}^3$.

Sekarang kita akan tunjukkan bahawa E^2 ialah sebuah permukaan Riemann.

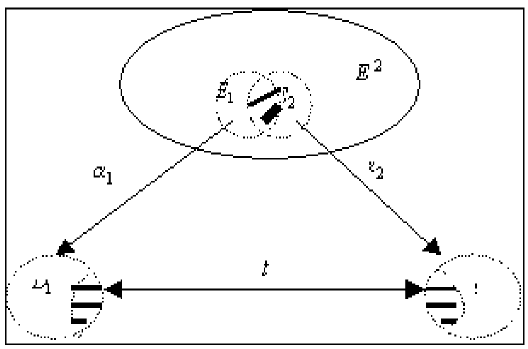
Bukti: Hausdorff

Takrif 2 *[9] Biarkan (χ, τ) suatu ruang topologi. (χ, τ) dipanggil suatu ruang T_2 atau suatu ruang Hausdorff jika dan hanya jika dengan $p \neq q$ mengimplikasikan wujudnya jiranan tidak bercantum U dan V bagi p dan q masing-masing (iaitu, $U \cap V = \emptyset$).*

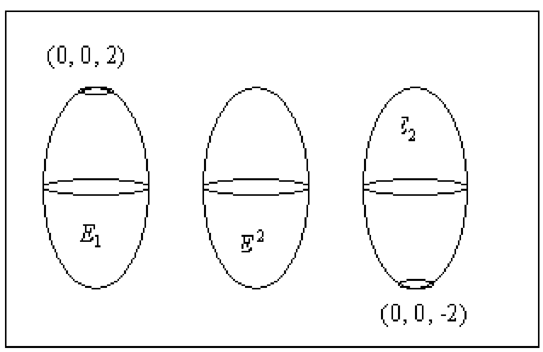
Sekarang, kita akan buktikan bahawa E^2 ialah ruang topologi Hausdorff dengan menggunakan pembuktian secara percangghan. Teknik pembuktian ini sama seperti yang dilakukan oleh Ahmad [2,3].



Rajah 1: Set E^2



Rajah 2: Struktur Permukaan Riemann



Rajah 3: E^2, E_1 dan E_2

Ambil $p_1, p_1 \in E^2$ dengan $p_1 \neq p_2$ serta $p_i = (x_i, y_i, z_i)$. Seterusnya, takrifkan jiranan P_i bagi $i = 1, 2$ sebagai $N(p_i, \varepsilon_i) = \{p \in \mathbb{R}^3 : [(x - x_i) + (y - y_i) + (z - z_i)]^{1/2} < \varepsilon_i\}$ dan $N^0(p_i, \varepsilon_i) = N(p_i, \varepsilon_i) \cap E^2$. Kedua-dua set ini digambarkan dalam Rajah 4 berikut.

Biarkan $d(p_1, p_2) = [(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} = \varepsilon_3$ ialah metrik ruang Euklidean yang biasa serta $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, 2, 3\}$. Takrifkan set terbuka V_i sebagai $V_i = N(p_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap E^2$ bagi $i = 1, 2$. Seterusnya, kita akan tunjukkan bahawa V_1 dan V_2 tidak bercantum. Katakan $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, maka wujud $p_3 \in V_1 \cap V_2$ dengan $d(p_1, p_3) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(p_2, p_3) < \frac{\varepsilon}{2}$. Menggunakan ketaksamaan segitiga,

$$\varepsilon_3 = d(p_1, p_2) \leq d(p_1, p_3) + d(p_3, p_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sehubungan itu, didapati $\varepsilon_3 < \varepsilon$ tetapi $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, 2, 3\}$, yakni suatu percanggahan. Justeru itu, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Lantas E^2 ialah ruang topologi Hausdorff menggunakan Takrif 2.

Bukti: Terkait

Takrif 3 *[8] Suatu ruang topologi X, ditulis sebagai (X, τ), dikatakan terkait secara lintasan jika setiap dua titik $p_1, p_2 \in X$ dapat disambungkan dengan suatu lintasan dalam ruang topologi tersebut.*

Teorem 2 *[8] Jika (X, τ) terkait secara lintasan, maka (X, τ) terkait.*

Sekarang, kita akan buktikan bahawa E^2 terkait. Takrif 3 dan Teorem 2 diperlukan untuk membuktikan bahawa E^2 terkait. Pembuktian secara pembinaan dan koordinat sfera bagi E^2 digunakan untuk membina lintasan tersebut. Teknik pembuktian ini adalah sama seperti yang dilakukan oleh Ahmad [2,3].

Takrifkan komponen koordinat $P(\rho, \theta, \phi)$ dengan

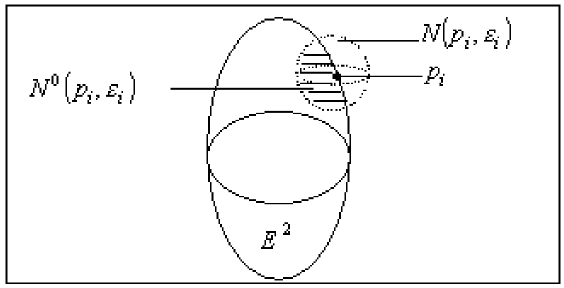
$$\begin{aligned} \rho &= \text{jarak dari P ke asalan} \\ \theta &= \text{sudut dari paksi-x positif ke garis OQ} \\ \phi &= \text{sudut dari paksi-z positif ke garis OP} \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (lihat Rajah 5). Sekarang, kita akan tentukan ρ bagi kes E^2. Dari Rajah 5, didapati $r = \rho \sin\phi$, $\theta = \theta$ dan $z = \rho\,\mathrm{kos}\phi$, tetapi diketahui $x = r\,\mathrm{kos}\theta$, dan $y = r \sin\theta$. Justeru itu, kita boleh tulis

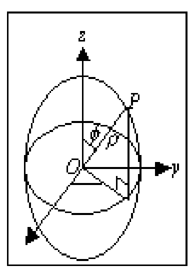
$$x = \rho \sin\phi\,\mathrm{kos}\theta, y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho\,\mathrm{kos}\phi. \tag{3}$$

Gantikan 3 ke dalam 1, didapati

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \tfrac{z^2}{4} &= 1 \\ (\rho \sin\phi\,\mathrm{kos}\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 + \frac{(\rho\,\mathrm{kos}\phi)^2}{4} &= 1 \\ \rho^2 \sin^2\phi\,\mathrm{kos}^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \frac{\rho^2 \mathrm{kos}^2\phi}{4} &= 1 \\ \rho = \frac{2}{\sqrt{3\sin^2\phi + 1}}. \end{aligned} \tag{4}$$



Rajah 4: $N(p_i,\varepsilon_i)$ dan $N^0(p_i,\varepsilon_i)$



Rajah 5: Koordinat sfera untuk ellipsoid

Biarkan $P_a\left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\phi_a+1}},\theta_a,\phi_a\right)$ dan $P_b\left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\phi_b+1}},\theta_b,\phi_b\right)$ sebarang dua titik pada E^2. Takrifkan fungsi $f:[0,1]\to R^3$ dengan

$$f(n)=\left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}},(1-n)\,\theta_a+n\theta_b,(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right).$$

Masalahnya sekarang untuk menunjukkan bahawa $f(n)\in E^2$ untuk setiap $n\in[0,1]$. Dengan menggunakan 3 dan 4 serta takrifan $f(n)$, didapati

$$x=\frac{2\sin\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]\text{kos}\left[(1-n)\,\theta_a+n\theta_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}},$$

$$y=\frac{2\sin\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]\sin\left[(1-n)\,\theta_a+n\theta_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}}$$

dan

$$z=\frac{2\text{kos}\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}}. \tag{5}$$

Lihat bahawa $f(n)\in E^2$ kerana

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\\
&=\left(\frac{2\sin\left[(1-n)\,\theta_a+n\theta_b\right]\text{kos}\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}}\right)^2\\
&\quad+\left(\frac{2\sin\left[(1-n)\,\theta_a+n\theta_b\right]\sin\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}}\right)^2+\frac{\left(\frac{2\text{kos}\left[(1-n)\phi_a+n\phi_b\right]}{\sqrt{3\sin^2\left[(1-n)\phi_a+n\phi_b\right]+1}}\right)^2}{4}\\
&=\frac{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]}{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}+\frac{\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+\text{kos}^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]}{3\sin^2\left[(1-n)\,\phi_a+n\phi_b\right]+1}\\
&=1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Dengan menggunakan Takrif 3, E^2 terkait secara lintasan. Lantas E^2 terkait mengikut Teorem 2.

Bukti: Domain

E_i dinamakan domain jika ia terbuka dan terkait untuk $i=1,2$ [2,3]. Dalam seksyen ini, dipaparkan pembuktian E_i terbuka untuk $i=1,2$ dituruti dengan pembuktian E_i terkait untuk $i=1,2$.

Kita tahu bahawa $E_1=E^2-\{(0,0,2)\}$. Pilih $k\in E_1$. Jelas $k\neq(0,\,0,\,2)$ dan $d(k,(0,\,0,\,2))=r$ dengan $r>0$. Kemudian, kita dapati

$$N(k,r)=\left\{p\in E^2:d(k,p)<r\right\}\subset E_1$$

kerana jika $(0,\,0,\,2) \in N(k,r)$ maka $d(k,(0,\,0,\,2)) < r$. Ini adalah suatu percanggahan. Justeru itu, E_1 terbuka. Dengan cara yang sama seperti di atas, kita dapat tunjukkan bahawa $E_2 = E^2 - \{(0,0,-2)\}$ terbuka.

Seterusnya kita akan tunjukkan bahawa E_1 adalah terkait. Kita akan gunakan langkah yang sama seperti pada E^2 tetapi dengan sedikit ubah suaian. Menggunakan 2 dan 3 serta takrifkan $\rho = \frac{2}{\sqrt{3\sin^2\phi+1}}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$ supaya $P(\rho,\theta,\varphi) \ne (0,0,2)$. Kemudian takrifkan semula

$$E_1 = E^2 - \{(0,0,2)\} = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ dan } z \ne 2\right\}.$$

Seterusnya menggunakan $f(n)$ dan 5, kita dapat tunjukkan 6. Masalah kita cuma untuk menunjukkan bahawa $z \ne 2$. Katakanlah $z = 2$, maka $\text{kos}\,[(1-n)\,\phi_a + n\phi_b] = \pm 1$. Oleh sebab $z = 2$, maka $\text{kos}\,[(1-n)\,\phi_a + n\phi_b] = 1$. Ini membawa erti

$$(1-n)\,\phi_a + n\phi_b = \text{kos}^{-1}1 = 0,\ 2\pi.$$

Jika $(1-n)\,\phi_a + n\phi_b = 0$, maka $(1-n)\,\phi_a = -n\phi_b$. Tetapi $0 \le n \le 1$ yang memberikan

$$1 \ge 1 - n \ge 0$$

atau dengan kata lain $1-n$ adalah sentiasa positif. Kita juga sedia maklum bahawa $(1-n)\,\phi_a = -n\phi_b$ jika dan hanya jika $\phi_a = \phi_b = 0$. Ini adalah suatu percanggahan kerana $\phi_i > 0$ untuk $i = a, b$. Jika itulah keadaannya, maka $(1-n)\,\phi_a + n\phi_b \ne 0$. Kita tahu bahawa $\text{kos}\,0 = \text{kos}\,2\pi = 1$ dan oleh sebab $(1-n)\,\phi_a + n\phi_b \ne 0$, kita boleh membuat kesimpulan bahawa $(1-n)\,\phi_a + n\phi_b \ne 2\pi$. Jadi, $\text{kos}\,[(1-n)\,\phi_a + n\phi_b] \ne 1$. Oleh yang demikian,

$$z = \frac{2\text{kos}\,((1-n)\,\phi_a + n\phi_b)}{\sqrt{3\text{sin}^2\,((1-n)\,\phi_a + n\phi_b) + 1}} \ne 2\,.$$

Justeru itu, $f(n) \in E_1, \forall n \in [0,1]$. Dengan menggunakan Takrif 3, E_1 terkait secara lintasan. Lantas, E_1 terkait menggunakan Teorem 2.

Sekarang kita akan gunakan takrif dan teorem berikut untuk menunjukkan bahawa E_2 terkait.

Takrif 4 *[1] Fungsi $f : D \subset R_p \to R_q$ dikatakan selanjar pada titik $a \in D$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, wujud $\delta > 0$ sehingga $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ apabila $x \in D$ dan $\|x - a\| < \delta$. Fungsi f dikatakan selanjar pada suatu set $s \subset D$ jika f selanjar pada semua titik dalam S.*

Teorem 3 *[7] Jika A adalah terkait dan $f : A \to B$ adalah selanjar, maka $f(A)$ adalah terkait.*

Takrifkan $f : E_1 \to E_2$ seperti berikut:

$$f(x,y,z) = (x,y,-z) \qquad ,\forall\,(x,y,z) \in E_1$$

yakni refleksif relatif terhadap satah-xy.

Pembuktian kita seterusnya berbeza dan lebih terperinci daripada apa yang telah diambil oleh Ahmad [2,3]. Biarkan $(x_1, y_1, z_1) \in E_1$. Kita akan tunjukkan bahawa f selanjar di (x_1, y_1, z_1). Biarkan $\varepsilon > 0$, kita hendak carikan $\delta > 0$ sehinggakan

$$\|f(x, y, z) - f(x_1, y_1, z_1)\| < \varepsilon$$

apabila $\|(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\| < \delta$ dan $(x, y, z) \in E_1$. Oleh sebab

$$\|f(x, y, z) - f(x_1, y_1, z_1)\| = \|(x, y, -z) - (x_1, y_1, -z_1)\| = \|(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\| ,$$

maka dengan memilih $\delta = \varepsilon$ apabila $\|(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\| < \delta$, kita memperolehi

$$\|f(x, y, z) - f(x_1, y_1, z_1)\| = \|(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\| < \delta = \varepsilon.$$

Daripada keputusan ini, jelaslah bahawa f selanjar di (x_1, y_1, z_1). Oleh sebab (x_1, y_1, z_1) dipilih sebarangan, maka f selanjar di setiap titik dalam E_1. Justeru itu, f selanjar apabila Takrif 4 digunakan.

Seterusnya kita akan tunjukkan bahawa f menyeluruh. Untuk sebarang $(a, b, c) \in E_2$ yang diberi, maka wujudnya suatu $(a, b, -c) \in E_1$ sehinggakan

$$f(a, b, -c) = (a, b, -(-c)) = (a, b, c) .$$

Justeru itu, f menyeluruh. Jelas f selanjar lagi menyeluruh dan dengan menggunakan Teorem 3, $f(E_1) = E_2$ terkait.

Bukti: Julat Terbuka

Ingat $\alpha_i : E_i \to D_i$ dengan $\alpha_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{x_i + iy_i}{1 - \frac{z_i}{2}} \in C$ untuk $i = 1, 2$. Jelas $D_i = C$ untuk $i = 1, 2$. Kita sedia maklum bahawa C adalah terbuka kerana untuk sebarang $p \in C$ dan untuk sebarang $r > 0$, $N(p, r) \in C$ kerana setiap unsur dalam $N(p, r)$ berbentuk $a + ib$.

Bukti: Homeomorfisma

Kita memerlukan takrif-takrif berikut untuk menunjukkan bahawa α_i ialah homeomorfisma untuk $i = 1, 2$.

Takrif 5 *[6] Suatu pemetaan $f : X \to Y$ antara ruang-ruang topologi adalah terbuka jika imej $f(U)$ bagi setiap subset terbuka U dalam X adalah terbuka dalam Y, dan tertutup jika imej $f(E)$ bagi setiap subset tertutup E dalam X adalah tertutup dalam Y.*

Teorem 4 *[6] Suatu pemetaan $f : X \to Y$ dari suatu ruang topologi X ke suatu ruang topologi Y adalah selanjar jika dan hanya jika imej songsangan $f^{-1}(V)$ bagi setiap subset terbuka V dari Y adalah terbuka di dalam X.*

Korolari 1 *[5] Suatu homeomorfisma ialah suatu pemetaan yang bijeksi, terbuka dan selanjar.*

Teorem 5 *[6] Pemetaan identiti $i : X \to X$ untuk sebarang ruang topologi X ialah suatu homeomorfisma $i : X \cong X$. Jika $f : X \cong Y$ ialah suatu homeomorfisma, maka songsangannya $f^{-1} : Y \cong X$ ialah suatu homeomorfisma. Jika $f : X \cong Y$, $g : Y \cong Z$ ialah homeomorfisma, maka gabungan mereka $g \circ f : X \cong Z$ ialah suatu homeomorfisma.*

Pertama, kita akan tunjukkan bahawa α_1 adalah bijeksi. Ambil $a \in \alpha_1(E_1)$, maka

$$a = \alpha_1(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right) \in C.$$

Lantas $\alpha_1(E_1) \subset C$. Untuk akasnya, ambil $b \in C$, maka $b = A + iB$. Kita boleh ungkapkan b dalam bentuk seperti berikut,

$$\begin{aligned} b &= \frac{x}{1-\frac{z}{2}} + i\frac{y}{1-\frac{z}{2}}, \quad \text{untuk suatu}\,(x,y,z) \in E_1 \\ &= \frac{x+iy}{1-\frac{z}{2}}. \end{aligned}$$

Nilai-nilai x, y dan z untuk suatu $(x,y,z) \in E_1$ ditentukan dengan menyelesaikan tiga persamaan berikut:

$$\frac{x}{1-\frac{z}{2}} = A, \quad \text{untuk suatu}\,(x,y,z) \in E_1,$$

$$\frac{y}{1-\frac{z}{2}} = B, \quad \text{untuk suatu}\,(x,y,z) \in E_1$$

dan

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, \quad \text{untuk suatu}\,(x,y,z) \in E_1.$$

Jadi $\alpha_1(E_1) \subset C$. Justeru itu $\alpha_1(E_1) = C$. Lantas α_1 adalah menyeluruh.

Seterusnya kita akan tunjukkan bahawa α_1 adalah satu ke satu. Pertimbangkan

$$k = \alpha_1(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-\frac{z}{2}} = \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

untuk suatu $(x,y,z) \in E_1$. Kita akan ungkapkan z dalam sebutan $\|k\|^2$. Perhatikan bahawa

$$\|k\|^2 = \left\|\left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right)\right\|^2 = \left(\left[\left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}.$$

Oleh sebab $(x,y,z) \in E_1$, maka $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ dan $z \neq 2$. Jadi,

$$\|k\|^2 = \frac{1-\frac{z^2}{4}}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)}{\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{\left(1+\frac{z}{2}\right)}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}.$$

Jadi, $z = \frac{2\left(\|k\|^2-1\right)}{\|k\|^2+1}$. Maka

$$\begin{aligned} k = \alpha_1(x,y,z) &= \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right) = \left(\frac{x}{1-\frac{\|k\|^2-1}{\|k\|^2+1}}, \frac{y}{1-\frac{\|k\|^2-1}{\|k\|^2+1}}\right) \\ &= \left(\frac{\|k\|^2+1}{2}x, \frac{\|k\|^2+1}{2}y\right). \end{aligned}$$

Sekarang katakanlah bahawa

$$\begin{aligned} k = \alpha_1(x,y,z) &= \tfrac{x+iy}{1-\frac{z}{2}} = \left(\tfrac{x}{1-\frac{z}{2}}, \tfrac{y}{1-\frac{z}{2}}\right) = \left(\tfrac{\|k\|^2+1}{2}x, \tfrac{\|k\|^2+1}{2}y\right) \\ &= \left(\tfrac{\|k'\|^2+1}{2}x', \tfrac{\|k'\|^2+1}{2}y'\right) = \left(\tfrac{x'}{1-\frac{z'}{2}}, \tfrac{y'}{1-\frac{z'}{2}}\right) = \alpha_1(x',y',z') = k' \in C. \end{aligned}$$

Oleh kerana $k = k'$, maka

$$\frac{\left(\|k\|^2+1\right)x}{2} = \frac{\left(\|k'\|^2+1\right)x'}{2} \Rightarrow x = x',$$

$$\frac{\left(\|k\|^2+1\right)y}{2} = \frac{\left(\|k'\|^2+1\right)y'}{2} \Rightarrow y = y'$$

dan

$$\frac{2\left(\|k\|^2-1\right)}{\|k\|^2+1} = \frac{2\left(\|k'\|^2-1\right)}{\|k'\|^2+1} \Rightarrow z = z'.$$

Jika itulah keadaannya maka kita dapati bahawa α_1 adalah satu ke satu. Lantas α_1 adalah bijeksi.

Seterusnya, kita akan gunakan Takrif 5 untuk membuktikan bahawa α_1 terbuka. Ambil sebarang $(a,b) \in \alpha_1(A)$ dengan A sebarang set terbuka pada E_1 . Pertimbangkan

$$\alpha_1(A) = \{\alpha_1(x,y,z) : (x,y,z) \in A\}.$$

Oleh sebab α_1 adalah bijeksi, maka wujud satu dan hanya satu $(x,y,z) \in A$ sehingga $\alpha_1(x,y,z) = (a,b)$. Untuk tujuan ringkasan, kita maksudkan

$$N(x,y,z) = N((x,y,z);r) \cap E_1$$

bagi suatu $r > 0$. Oleh sebab A terbuka, maka $N(x,y,z) \subset A$ wujud. Pertimbangkan $\alpha_1(N(x,y,z)) = \{\alpha_1(x',y',z') : (x',y',z') \in N(x,y,z)\}$. Jelas

$$(a,b) = \alpha_1(x,y,z) \in \alpha_1(N(x,y,z)).$$

Ambil sebarang $p \in \alpha_1(N(x,y,z))$. Oleh sebab α_1 adalah bijeksi, maka wujud satu dan hanya satu $(x',y',z') \in N(x,y,z)$ sehingga $\alpha_1(x',y',z') = p$. Oleh sebab

$$N(x,y,z) \subset A,$$

maka $(x',y',z') \in A$. Oleh itu, $p = \alpha_1(x',y',z') \in \alpha_1(A)$ dan ini mengimplikasikan $\alpha_1(N(x,y,z)) \subset \alpha_1(A)$. Oleh sebab $(a,b) \in \alpha_1(A)$ dipilih sebarangan, maka

$$(a,b) \in \alpha_1(N(x,y,z)) \subset \alpha_1(A)$$

untuk setiap $(a,b) \in \alpha_1(A)$ dengan suatu $(x,y,z) \in A$ yang sepadan. Justeru itu, $\alpha_1(A)$ adalah terbuka. Oleh sebab A dipilih sebarangan, maka $\alpha_1(A)$ adalah terbuka dalam D_1 untuk setiap set terbuka A pada E_1. Lantas α_1 terbuka.

Seterusnya, kita akan buktikan bahawa α_1 selanjar dengan menggunakan Teorem 4. Dengan menggantikan α_1,E_1,D_1 dan set terbuka A dalam pembuktian α_1 terbuka dengan α_1^{-1},D_1,E_1 dan set terbuka B masing-masing, kita dapat buktikan bahawa $\alpha_1^{-1}(B)$ terbuka dalam E_1 untuk setiap set terbuka B pada D_1. Lantas α_1 selanjar. Kita telah buktikan bahawa α_1 ialah suatu pemetaan dari ruang topologi E_1 ke ruang topologi D_1 yang bijeksi, terbuka dan selanjar. Dengan menggunakan Korolari 1, α_1 ialah suatu homeomorfisma. Begitu juga dengan songsangan α_1, iaitu $\alpha_1^{-1} : D_1 \subset C \to E_1$ yang ditakrifkan seperti berikut,

$$\alpha_1^{-1}(x', y') = \left(\frac{2x'}{\|(x', y')\|^2 + 1}, \frac{2y'}{\|(x', y')\|^2 + 1}, \frac{2\left(\|(x', y')\|^2 - 1\right)}{\|(x', y')\|^2 + 1} \right) \quad ,\forall (x', y') \in D_1$$

ialah suatu homeomorfisma apabila Teorem 5 digunakan. Dengan langkah yang sama kita dapat tunjukkan bahawa α_2 adalah suatu homeomorfisma.

Bukti: Tudung Terbuka

Berdasarkan syarat (3) dalam Takrif 1, kita harus buktikan bahawa $\{E_i : i = 1, 2\}$ ialah tudung terbuka untuk E^2. Kita sudah buktikan bahawa E_i terbuka untuk $i = 1, 2$. Kita juga sedia maklum bahawa $\bigcup_{i=1}^{2} E_i = E^2$, lantas $\{E_i : i = 1, 2\}$ ialah tudung terbuka untuk E^2.

Bukti: Holomorfi

Berdasarkan syarat (4) dalam Takrif 1, kita harus buktikan bahawa setiap fungsi transisi yang ditakrifkan adalah holomorfi. Kita akan gunakan teknik pembuktian yang telah dilakukan oleh Ahmad [2,3].

Pertama sekali, kita takrifkan fungsi $t_{12} : \alpha_2(E_1 \cap E_2) \to \alpha_1(E_1 \cap E_2)$ sebagai fungsi transisi dengan $t_{12} = \alpha_1\left(\alpha_2^{-1}\right)$. Kita dapat lihat bahawa

$$\alpha_1(x, y, z)\alpha_2(x, y, z) = \left(\frac{x + iy}{1 - \frac{z}{2}}\right)\left(\frac{x - iy}{1 + \frac{z}{2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = 1$$

memberikan $\alpha_1(x, y, z) = \frac{1}{\alpha_2(x,y,z)}$ dan $\alpha_2(x, y, z) = \frac{1}{\alpha_1(x,y,z)}$. Dengan kata lain, α_1 dan α_2 merupakan salingan antara satu sama lain. Jelas bahawa t_{12} ialah pemetaan pada $C - \{0\}$ dengan $s \to \frac{1}{s}$. Akan tetapi, kita sedia maklum bahawa $s = a + ib$, lantas

$$\begin{aligned} t_{21}(s) = \alpha_2\left(\alpha_1^{-1}\right)(s) &= \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib}\left(\frac{a - ib}{a - ib}\right) = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \\ &= u + iv. \end{aligned}$$

serta holomorfi sekiranya ia memuaskan syarat Cauchy-Riemann. Lihat bahawa

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{b^2 - a^2}{(a^2 + b^2)^2};\ \frac{\partial u}{\partial b} = \frac{-2ab}{(a^2 + b^2)^2};\ \frac{\partial v}{\partial a} = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2};\ \frac{\partial v}{\partial b} = \frac{b^2 - a^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Jelas bahawa $\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b}$dan $\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{-\partial v}{\partial a}$. Oleh itu, t_{12} adalah holomorfi.

3 Homeomorfisma Dari S^2 Ke E^2

Dua homeomorfisma dari S^2 ke E^2 dapat dibina melalui struktur permukaan Riemann bagi S^2 dan E^2. Dalam makalah ini, kita hanya paparkan pembinaan salah satu homeomorfisma dari S^2 ke E^2.

Teorem 6 *$S^2 \cong E^2$.*

Bukti. Pertimbangkan ruang topologi

$$\begin{aligned} S^2 &= \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}, \\ U_1 &= S^2 - \{(0,\ 0,\ 1)\},\ \ C_1 = C \end{aligned}$$

dengan set terbuka U pada S^2 adalah dalam bentuk $U = \theta \cap S^2$ dengan θ ialah set terbuka dalam R^3 serta fungsi yakni

$$\gamma_1 (x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}$$

untuk $(x, y, z) \in U_1$ dengan γ_1 ialah suatu homeomorfisma dari U_1 ke subset terbuka C_1 pada C [2,3]. Pertimbangkan juga ruang topologi

$$\begin{aligned} E^2 &= \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\right\} \\ E_1 &= E^2 - \{(0,\ 0,\ 2)\},\ \ D_1 = C \end{aligned}$$

dengan set terbuka V pada E^2 adalah dalam bentuk $V = \theta \cap E^2$ dengan θ ialah set terbuka dalam R^3 serta fungsi yakni,

$$\alpha_1 (x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - \frac{z}{2}}$$

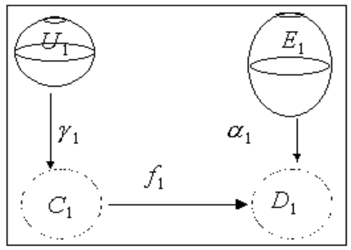
untuk $(x, y, z) \in E_1$ dengan α_1 ialah suatu homeomorfisma dari E_1 ke subset terbuka D_1 pada C. Pembinaan homeomorfisma dari S^2 ke E^2 dirangka khas supaya dibahagikan kepada tiga peringkat, iaitu pembinaan homeomorfisma dari C_1 ke D_i, pembinaan homeomorfisma dari U_1 ke E_1 dan pembinaan homeomorfisma dari S^2 ke E^2. Sekarang kita akan binakan homeomorfisma dari S^2 ke E^2 melalui struktur permukaan Riemann bagi S^2 dan E^2.

Bukti: Homeomorfisma Dari C_1 Ke D_1

Dalam seksyen ini, kita akan binakan suatu homeomorfisma $f_1 : C_1 \to D_1$ (lihat Rajah 6). Pertama sekali, kita akan takrifkan $f_1 : C_1 \to D_1$.

Pertimbangkan set-set

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ dan } z \neq 1\right\}, \\ E_1 &= \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ dan } z \neq 2\right\}, \\ C_1 &= \left\{(x', y') \in R^2 : x' = \frac{x}{1 - z}, y' = \frac{y}{1 - z}, \gamma_1 (x, y, z) = (x', y') \,\forall\, (x, y, z) \in U_1\right\}, \\ D_1 &= \left\{(x', y') \in R^2 : x' = \frac{x}{1 - \frac{z}{2}}, y' = \frac{y}{1 - \frac{z}{2}}, \alpha_1 (x, y, z) = (x', y') \,\forall\, (x, y, z) \in E_1\right\} \end{aligned}$$



Rajah 6: Pemetaan dari C_1 ke D_1

serta dua fungsi yakni,

$$\gamma_1(x,y,z)=\frac{x+iy}{1-z},\forall(x,y,z)\in U_1 \quad \text{dan} \quad \alpha_1(x,y,z)=\frac{x+iy}{1-\frac{z}{2}},\forall(x,y,z)\in E_1.$$

Ambil sebarang $(x',y')\in C_1$, maka $x'=\frac{x}{1-z}$ dan $y'=\frac{y}{1-z}$ serta $\gamma_1(x,y,z)=(x',y')$ untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$. Kita akan petakan $(x',y')\in C_1$ ke suatu $(x',y')\in D_1$ dengan $x'=\frac{x}{1-\frac{z}{2}}$ dan $y'=\frac{y}{1-\frac{z}{2}}$ serta $\alpha_1(x,y,z)=(x',y')$ untuk suatu $(x,y,z)\in E_1$. Secara umumnya, $\frac{x}{1-z}\mapsto\frac{x}{1-\frac{z}{2}}$, untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$ melalui pendaraban $\frac{x}{1-z}$ dengan $\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}$, iaitu $\frac{x}{1-z}\times\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}=\frac{x}{1-\frac{z}{2}}$ untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$ dan $\frac{y}{1-z}\mapsto\frac{y}{1-\frac{z}{2}}$ untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$ melalui pendaraban $\frac{y}{1-z}$ dengan $\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}$, iaitu $\frac{y}{1-z}\times\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}=\frac{y}{1-\frac{z}{2}}$, untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$. Katakah $(a,b)=\left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}},\frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right)$ untuk suatu $(x,y,z)\in U_1$. Oleh sebab α_1 adalah bijeksi, maka wujud satu dan hanya satu $(x,y,z)\in E_1$ sehingga $\alpha_1(x,y,z)=(a,b)$. Jadi, $(a,b)\in D_1$. Oleh itu, kita mentakrifkan $f_1:C_1\to D_1$ seperti berikut,

$$f_1(x',y')=\tfrac{1-z}{1-\frac{z}{2}}(x',y') \qquad ,\forall(x',y')\in C_1 \text{ dengan suatu } z \text{ yang sepadan}$$
$$\text{serta memenuhi } x^2+y^2+z^2=1 \text{ dan } z\neq 1\ .$$

Sekarang, kita akan buktikan bahawa f_1 adalah bijeksi. Ambil $a\in f_1(C_1)$, maka

$$\begin{aligned}
a &= f_1(x',y'), && \text{untuk suatu}\,(x',y')\in C_1\\
&= \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right), && \text{untuk suatu}\,(x,y,z)\in U_1\\
&= \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}},\frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right)\\
&= \alpha_1(x,y,z)\in D_1, && \text{untuk suatu}\,(x,y,z)\in E_1 \text{ kerana } \alpha_1 \text{ adalah bijeksi}
\end{aligned}$$

Jadi, $f_1(C_1)\subset D_1$. Untuk akasnya, ambil $b\in D_1$, maka

$$\begin{aligned}
b &= (x', y'), && \text{untuk suatu}\,(x', y') \in D_1 \\
&= \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right), && \text{untuk suatu}\,(x, y, z) \in E_1 \\
&= \alpha_1 (x, y, z), && \text{untuk suatu}\,(x, y, z) \in E_1 \\
&= \left(\frac{x}{1-\frac{z}{2}}, \frac{y}{1-\frac{z}{2}}\right), && \text{untuk suatu}\,(x, y, z) \in U_1 \text{ kerana } \alpha_1 \text{ adalah bijeksi} \\
&= \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \\
&= f_1 (x', y') \in f_1 (C_1).
\end{aligned}$$

Jadi, $D_1 \subset f_1 (C_1)$. Justeru itu, $f_1 (C_1) = D_1$. Lantas f_1 adalah surjeksi.

Sekarang, kita akan gunakan teknik pembuktian yang sama seperti yang ambil dalam [2, 3] untuk membuktikan bahawa f_1 adalah injeksi. Katakanlah bahawa $f_1 = f_1^*$ dan

$$\begin{aligned}
f_1 (x', y') = \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} (x', y') &= \left(\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} x', \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} y'\right) \\
&= \left(\frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} x'^*, \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} y'^*\right) = \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} (x'^*, y'^*) = f_1^* (x'^*, y'^*)
\end{aligned}$$

untuk $(x', y'), (x'^*, y'^*) \in C_1$ dengan z dan z^* yang sepadan serta memenuhi $x^2+y^2+z^2 = 1$ dan $z \neq 1$. Dengan menggunakan Teorem 2.6 dalam [3], maka

$$\begin{aligned}
J(f_1) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} x'\right) & \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} x'\right) \\ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} y'\right) & \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} y'\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} \end{bmatrix} = \\
J(f_1^*) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^*}\left(\frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} x'^*\right) & \frac{\partial}{\partial y'^*}\left(\frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} x'^*\right) \\ \frac{\partial}{\partial x'^*}\left(\frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} y'^*\right) & \frac{\partial}{\partial y'^*}\left(\frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} y'^*\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Dari (3.1), kita mendapati

$$\begin{aligned}
&\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} \\
&(1-z)\left(1-\frac{z^*}{2}\right) = (1-z^*)\left(1-\frac{z}{2}\right) \\
&z = z^*.
\end{aligned}$$

Dari komponen-komponen matriks Jakobian di atas, bolehlah dirumuskan bahawa

$$\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} \Rightarrow z = z'.$$

Oleh itu,

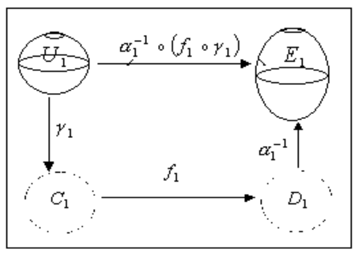
$$\frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} x = \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} x' \Rightarrow x = x' \quad \text{dan} \quad \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}} y = \frac{1-z^*}{1-\frac{z^*}{2}} y' \Rightarrow y = y'.$$

Jika itulah keadaannya maka kita dapati bahawa f_1 adalah injeksi.

Seterusnya, dengan menggantikan α_1, E_1, D_1 dan set terbuka A dalam pembuktian α_1 terbuka (lihat Seksyen 2) dengan f_1, C_1, D_1 dan set terbuka E masing-masing, kita juga dapat buktikan bahawa f_1 terbuka. Seterusnya, kita akan buktikan bahawa f_1 selanjar. Dengan menggantikan α_1, E_1, D_1 dan set terbuka B dalam pembuktian $\alpha_1^{-1}(B)$ terbuka dalam E_1 untuk setiap set terbuka B pada D_1 (lihat Seksyen 2) dengan f_1, C_1, D_1 dan set terbuka F masing-masing, kita dapat buktikan bahawa $f_1^{-1}(F)$ terbuka dalam C_1 untuk setiap set terbuka F pada D_1. Lantas f_1 selanjar. Oleh kerana f_1 adalah bijeksi, terbuka dan selanjar, menggunakan Korolari 1 ia adalah suatu homeomorfisma.

Bukti: Homeomorfisma Dari U_1 Ke E_2

Dalam seksyen ini, kita akan binakan suatu homeomorfisma dari U_1 ke E_1 (lihat Rajah 7).



Rajah 7: Pemetaan dari U_1 ke E_1

Pertimbangkan

$$\gamma_1 : U_1 \to C_1 \ni \gamma_1(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} \quad , \forall (x, y, z) \in U_1,$$

$$f_1 : C_1 \to D_1 \ni f_1(x', y') = \frac{1 - z}{1 - \frac{z}{2}}(x', y') \quad , \forall \ (x', y') \in C_1$$

dengan suatu z yang sepadan serta memenuhi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dan $z \neq 1$, dan

$$\alpha_1^{-1} : D_1 \to E_1 \ni \alpha_1^{-1}(x', y')$$
$$= \left(\frac{2x'}{\|(x', y')\|^2 + 1}, \frac{2y'}{\|(x', y')\|^2 + 1}, \frac{2\left(\|(x', y')\|^2 - 1\right)}{\|(x', y')\|^2 + 1} \right), \forall \ (x', y') \in D_1 .$$

Ahmad [2, 3] telah buktikan bahawa $\gamma_1 : U_1 \to C_1$ ialah suatu homeomorfisma. Kita telah buktikan bahawa $f_1 : C_1 \to D_1$ dan $\alpha_1^{-1} : D_1 \to E_1$ masing-masing ialah suatu homeomorfisma. Dengan menggunakan Teorem 5, $f_1 \circ \gamma_1 : U_1 \to C_1$ ialah suatu homeomorfisma dan seterusnya $\alpha_1^{-1} \circ (f_1 \circ \gamma_1) : U_1 \to E_1$ juga ialah suatu homeomorfisma.

Bukti: Homeomorfisma Dari S_2 Ke E_2

Dalam seksyen ini, dipaparkan pembinaan homeomorfisma dari S^2 ke E^2 menerusi struktur permukaan Riemann bagi S^2 dan E^2 (lihat Rajah 8).

Ahmad [2, 3] telah buktikan bahawa $\gamma_1 : U_1 \to C_1$ dengan $C_1 = C$ ialah suatu homeomorfisma. Kita telah buktikan bahawa $f_1 : C_1 \to D_1$ dan $\alpha_1^{-1} : D_1 \to E_1$ dengan $D_1 = C$ masing-masing ialah suatu homeomorfisma. Hujah bagi pemetaan dari E^2 ke $C \cup \infty$ mengekalkan homeomorfisma α_1 adalah sama dengan hujah yang telah digunakan oleh Rao dan Stetkaer [10] bagi pemetaan dari S^2 ke $C \cup \infty$. Hujah yang sama boleh digunakan untuk homeomorfisma f_1. Dengan menggunakan Teorem 5, pemetaan dari $C \cup \infty$ ke E^2 juga merupakan suatu homeomorfisma. Pemetaan-pemetaan ini dipaparkan secara terperinci dalam Rajah 9.

Secara formal,

$$\gamma_1^* : S^2 \to C \cup \infty \ni \gamma_1^*(x,y,z) = \begin{cases} \gamma_1(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z} & \text{untuk } (x,y,z) \in U_1 \\ \infty & \text{untuk } (x,y,z) = (0,0,1), \end{cases}$$

$$f_1^* : C \cup \infty \to C \cup \infty \ni$$

$$f_1^*(x',y') = \begin{cases} f_1(x',y') = \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}(x',y') & \begin{array}{l}\text{untuk } (x',y') \in C \text{ dengan suatu } z \\ \text{yang sepadan serta memenuhi} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ dan } z \neq 1\end{array} \\ \infty & \text{untuk } (x',y') = \infty \end{cases}$$

dan

$$\alpha_1^{-1^*} : C \cup \infty \to E^2 \ni \alpha_1^{-1^*}(x',y')$$

$$= \begin{cases} \alpha_1^{-1}(x',y') = \left(\frac{2x'}{\|(x',y')\|^2+1}, \frac{2y'}{\|(x',y')\|^2+1}, \frac{2\left(\|(x',y')\|^2-1\right)}{\|(x',y')\|^2+1}\right) & \text{untuk } (x',y') \in C \\ (0,0,2) & \text{untuk } (x',y') = \infty. \end{cases}$$

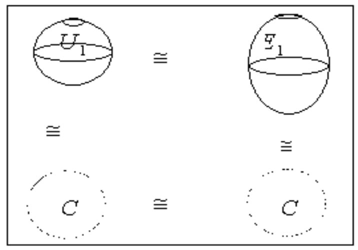
Oleh sebab $\gamma_1^* : S^2 \to C\cup\infty$, $f_1^* : C\cup\infty \to C\cup\infty$ dan $\alpha_1^{-1^*} : C\cup\infty \to E^2$ masing-masing ialah suatu homeomorfisma, menggunakan Teorem 5, $f_1^* \circ \gamma_1^* : S^2 \to C \cup \infty$ ialah suatu homeomorfisma dan seterusnya $\alpha_1^{-1^*} \circ (f_1^* \circ \gamma_1^*) : S^2 \to E^2$ juga ialah suatu homeomorfisma. Hasil pembuktian seksyen ini dirumuskan dalam Rajah 10.

4 Penutup

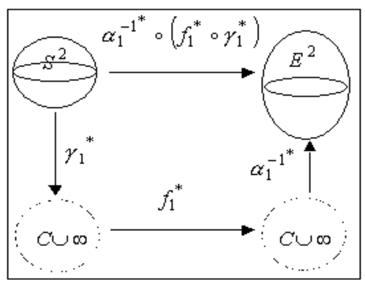
Makalah ini memaparkan pembinaan homeomorfisma dari S^2 ke E^2 melalui struktur permukaan Riemann bagi S^2 dan E^2. Hasil dari kajian ini amatlah penting bagi aplikasi dalam pemprosesan imej dan khususnya isyarat Magnetoencephalography (MEG) bagi otak manusia.

5 Penghargaan

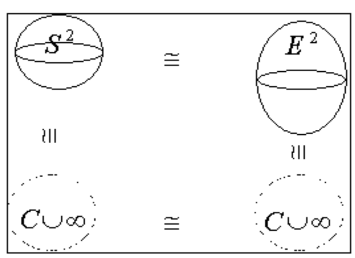
Penulis merakamkan penghargaan kepada sokongan kewangan melalui anugerah penyelidikan IRPA Vot 72303.



Rajah 8: U_1 homeomorfisma ke E_1



Rajah 9: Pemetaan Dari S^2 Ke E^2



Rajah 10: S^2 homeomorfisma ke E^2

Rujukan

[**1**] I. Abdullah, *Analisis Nyata*, Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur, 1995.

[**2**] T. Ahmad, *The Riemann Surface:* S^2, Disertasi Sarjana, California State University, 1989.

[**3**] T. Ahmad, *Permukaan Riemann:* S^2, Matematika. **9**(1). 9 - 17, 1993.

[**4**] A. F. Beardon, *A Primer on Riemann Surfaces*, Cambridge University Press, London, 1984.

[**5**] D. E. Christie, *Basic Topology*, Estate of Dan E. Christie, USA, 1976.

[**6**] M. Eisenberg, *Topology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[**7**] J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman, San Francisco, 1974.

[**8**] A. O. Md. Tap, *Topologi*, Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur, 1989.

[**9**] T. O. Moore, *Elementery General Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J, 1964.

[**10**] M. Rao and H. Stetkaer, *Complex Analysis An Invitation*, World Scientific Publishing, Singapore, 1991.

[**11**] A. L. Samian, *Sejarah Matematik*, Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur, 1992.