Matematika, 1994, Jilid 10, bil. 1, hlm. 17–36
©Jabatan Matematik, UTM.

KAJIAN PERBANDINGAN TRANSFOMASI PENOMALAN DAN PERSENTIL HAMPIRAN TABURAN GAUSSIAN SONGSANG

FAUZIAH MAAROF
Jabatan Matematik
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Pertanian Malaysia
43400 Serdang, Selangor Darul Ehsan.
Malaysia

Abstrak. Transformasi pernormalan pembolehubah rawak Gaussian songsang oleh Folks & Chhikara [1] dan Whitmore & Yalkovsky [8] dipertimbangkan semula. Transformasi oleh Whitmore & Yalovsky kemudian diuabhsuaikan dengan melenyapkan sebutan pemalarnya. Penumpuan segi taburan setiap pembolehubah rawak tertransformasi ke pembolehubah rawak normal piawai serta persentil hampiran yang diperolehi dari transformasi songsangan yang berpadanan dibandingkan. Didapati transformasi oleh Whitemore & Yalovsky menghasilkan pembolehubah rawak yang bertaburan paling hampir kepada taburan normal piawai bagi setiap nilai $\theta = \lambda/\mu$ yang dipertimbangkan. Persentil hampiran daripada setiap transformasi songsangan diperolehi bagi setiap kes.

1 PENGENALAN

Taburan Gaussian songsang (GS) telah diketahui banyak penggunaannya dalam berbagai bidang (lihat [4]). Folks & Chhikara [2] telah mencadangkan taburan GS ini sebagai satu model masa hayat yang penting dalam kajian kebolehpercayaan. Ciri statistik taburan ini didokumentasikan dengan lengkap dalam Folks & Chhikara ([3],[4]).

Bentuk piawai fungsi ketumpatan kebarangkalian (f.k.k) bagi taburan GS dengan dua parameter diberikan oleh Johnson & Kotz [5] sebagai

$$f(x;\mu,\lambda) = \sqrt{\lambda/(2\pi x^3)}\exp\{-\lambda(x-\mu)^2/(2\mu^2 x)\} \qquad x>0, \mu>0, \lambda>0 \tag{1.1}$$

manakala Folks & Chhikara [1] menulis fungsi kebarangkalian longgokannya dalam bentuk berikut :

$$F(x;\mu,\lambda) = \phi(a(x)) + e^{2\lambda/\mu}\phi(b(x)), \qquad x>0 \tag{1.2}$$

dengan

$$\begin{aligned} a(x) &= \sqrt{\lambda/x}(x/\mu - 1), \\ b(x) &= -\sqrt{\lambda/x}(x/\mu + 1), \\ \phi(u) &= \int_{-\infty}^{u} f_{N(0,1)}(z)dz. \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Min dan varians bagi pembolehubah rawak GS ialah μ dan μ^3/λ dengan ν parameter lokasinya dan λ parameter bentuk.

Sepertimana yang telah dinyatakan oleh Folks & Chhikara [4], adalah mustahil untuk mentrasnformasikan terus satu pembolehubah rawak GS kepada pembolehubah rawak normal piawai. Walau bagaimanapun, bagi $\theta = \lambda/\mu$ yang cukup besar, Folks & Chhikara [1] dan Whitemore & Yalovsky [8] telah menerbitkan transformasi penormalan bagi pembolehubah rawak GS. Sehingga kini kedua-dua transformasi tersebut belum pernah dibandingkan secara terperinci.

Dalam makalah ini kedua-dua transformasi tersebut dipertimbangkan semula. Kemudian, sedikit pengubahsuaian dilakukan ke atas transformasi Whitmore & Yalovsky dengan melenyapkan sebutan pemalarnya untuk mendapatkan transformasi ketiga. Lengkung fungsi ketumpatan bagi ketiga-tiga pembolehubah rawak yang telah ditransformasikan dibandingkan untuk memerhatikan perbezaan kadar penumpuan kepada pembolehubah rawak normal piawai.

Bagi setiap taburan pembolehubah rawak yang ditransformasikan, ungkapan yang akan digunakan untuk mengira persentil hampirannya boleh didapati dengan mengambil transformasi songsangannya. Semua ungkapan akan dikemukakan dalam bahagian yang berikutan.

2 TRANSFORMASI PENOMALAN DAN SONGSANGANNYA

Biarkan X satu pembolehubah rawak GS dengan f.k.k $f(x;\mu,\lambda)$ seperti (1.1) dan biarkan $\theta = \lambda/\mu$. Maka pembolehubah rawak $W = X/\mu$ bertaburan Wald (lihat Johnson & Kotz [5]) dengan f.k.k

$$f(w;\theta) = \sqrt{\theta/2\pi w^3}e^{\theta}\exp\left\{-\frac{\theta}{2}(w+w^{-1})\right\} \qquad w>0, \theta>0.$$

Sekarang pertimbangkan transformasi-transformasi berikut :

$$Y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\log W \tag{2.1}$$

$$Y_2 = \sqrt{\theta}\log W \tag{2.2}$$

$$Y_3 = \sqrt{\theta}(W-1)/\sqrt{W} \tag{2.3}$$

Persamaan (2.1) ialah transformasi Whitmore & Yalovsky [8], persamaan (2.2) pula ialah $Y_1 - 1/(2\sqrt{Q})$, dan persamaan (2.3) ialah transformasi Folks & Chhikara [1]. Biarkan $f_{Y_i}(y_i;\theta)$ mewakili f.k.k bagi pembolehubah rawak Y_i. Whitmore & Yalovsky [8] dan Folks & Chhikara [4] telah menunjukkan bahawa

$$f_{Y_1}(y_1;\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} f_Z(z), \qquad Z\sim N(0,1)$$

dengan

$$f_{Y_1}(y_1;\theta) = (2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1/\sqrt{\theta}-1/2\theta) - \theta\cosh(y_1/\sqrt{\theta}-1/2\theta)+\theta\right\},$$
$$-\infty<y_1<\infty, \quad \theta>0 \tag{2.4}$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-y_1^2/2 + 1/8\theta - \frac{\theta}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(y_1/\sqrt{\theta}-1/2\theta)^{2k}/(2k)!\right\},$$
$$-\infty<y_1<\infty, \quad \theta>0 \tag{2.5}$$

Oleh itu, persentil hampiran bagi satu taburan GS(μ, λ) boleh dikira menggunakan ungkapan

$$x_\alpha = \mu \exp\{z_\alpha/\sqrt{\theta} - \frac{1}{2\theta}\}$$

di mana x_α dan z_α adalah masing-masing persentil ke 100α bagi taburan $GS(\mu, \lambda)$ dan normal piawai.

Dengan menggunakan persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) tidak sukar untuk menerbitkan f.k.k bagi Y_2 dan menjelaskan (mengikut garis panduan yang diberikan oleh Folks & Chhikara [4]) bahawa

$$f_{Y_2}(y_2;\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} f_Z(z), \qquad Z \sim N(0,1)$$

di mana

$$f_{Y_2}(y_2;\theta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-y_2/2\sqrt{\theta} - \theta\cosh(y_2/\sqrt{\theta}) + \theta\right\} \tag{2.7}$$

Dengan itu persentil hampiran bagi taburan $GS(\mu, \lambda)$ boleh juga dikira menggunakan ungkapan yang lebih ringkas, iaitu

$$x_\alpha = \mu \exp\{z_\alpha/\sqrt{\theta}\} \tag{2.8}$$

Dari Chhikara & Folks [1], dengan $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$ f.k.k bagi Y_3 adalah

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-y_3^2/2\} - (y_3/\sqrt{4\theta + y_3^2})[(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-y_3^2/2\}]$$
$$-\infty < y_3 < \infty, \quad \theta > 0 \tag{2.9}$$

Dengan meneliti ungkapan bagi $f_{Y_3}(y_3;\theta)$ yang diberikan oleh (2.9) jelaslah bahawa

$$f_{Y_3}(y_3;\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} f_Z(z), \quad Z \sim N(0,1)$$

Selepas beberapa langkah manipulasi aljabar dan penggunaan rumus kuadratik terhadap persamaan yang terhasil apabila transformasi songsangan bagi Y_3 diambil, maka puncapunca berikut diperolehi:

$$x = (\mu y_3^2/2\theta + \mu) \pm \sqrt{(\mu y_3^2/2\theta)^2 + (\mu y_3/\sqrt{\theta})^2} \tag{2.10}$$

Dengan mensimulasikan nilai-nilai yang dijanakan oleh ungkapan-ungkapan dalam persamaan (2.10) dengan z_α menggantikan Y_3, dapat dirumuskan bahawa persentil hampiran bagi taburan $GS(\mu, \alpha)$ boleh juga dikira seperti berikut:

$$x_\alpha \approx \begin{cases} U_1 + U_2, & \alpha \le 0.5 \\ U_1 - U_2, & \alpha > 0.5 \end{cases} \tag{2.11}$$

di mana

$$U_1 = (\mu z_\alpha^2/2\theta + \mu) \quad \text{dan} \quad \mu_2 = \sqrt{(\mu z_3^2/2\theta)^2 + (\mu z_3/\sqrt{\theta})^2}$$

3 GRAF FUNGSI KETUMPATAN KEBARANGKALIAN

Bahagian ini memperihalkan

A. lengkung $f(y_i)$ untuk nilai-nilai $\theta = 5, 10, 30, 50$ dan 100 yang diplot bertindih bagi setiap $i = 1, 2, 3$.

B. lengkung $f(y_i)$, $i = 1, 2, 3$ yang diplot bertindih bagi setiap nilai $\theta = 5, 10, 30, 50$ dan 100.

Lengkung f.k.k bagi setiap pembolehubah Y_1, Y_2, dan Y_3 digrafkan menggunakan ungkapan (2,4), (2,6) dan (2,9). Untuk menjana nilai-nilai yang diperlukan fungsi-fungsi dalam pakej SAS telah digunakan dan semua graf diplot menggunakan kemudahan grafik dalam perisian LOTUS Freelance. Variat-variat GS telah dijana menggunakan kaedah Micheal et. al. [7].

Dari Rajah 1, 2 dan 3 dapat dirumuskan bahawa $f(y_3)$ menuju kepada $f_{N(0,1)}(z)$ dengan kadar tercepat apabila dibandingkan dengan pergerakan $f(y_1)$ dan $f(y_2)$. Kadar pergerakan $f(y_1)$ dan $f(y_2)$ menuju ke $f_{N(0,1)}(z)$ kelihatan sama dari Rajah 2 dan 3, dan juga dalam Rajah 4 dan 5. Namun demikian, apabila diteliti dengan lebih terperinci Rajah 6, bagi nilai $\theta = 30$ $f(y_3)$ mula menuju $f_{N(0,1)}(z)$ lebih cepat daripada $f(y_2)$, dan seterusnya bagi $\theta = 50$ dan 100, $f(y_3)$ menghampiri $f_{N(0,1)}$ dengan kadar setanding dengan $f(y_1)$. Ini jelas dipaparkan dalam Rajah 7 dan 8. Walau bagaimanapun, sehingga pada $\theta = 100$ $f(y_2)$, masih tidak menepati $f_{N(0,1)}(z)$. Mungkin $f(y_2)$ memerlukan nilai θ yang lebih besar dari 100 untuk ianya benar-benar menepati fungsi ketumpatan normal piawai.

Di dalam makalahnya, Whitmore & Yalovsky [8] mendakwa bahawa transformasi yang mereka bina, iaitu tranformasi seperti pada ungkapan (2.1) menghasilkan satu pembolehubah yang menepati pembolehubah normal piawai pada nilai $\theta = 10$, tetapi dari Rajah 5 ini kelihatan tidak benar kerana lengkung $f(y_1)$ masih lagi tidak menepati $f_{N(0,1)}(z)$, terutamanya di bahagian atas dan ekor kiri dan kanan graf. Dengan itu, untuk Y_1 benar-benar menepati $Z \sim N(0,1)$ nilai θ perlu lebih besar daripada 10.

4 PERSENTIL HAMPIRAN BAGI KES-KES YANG DIPERTIMBANGKAN

Kes-kes yang dipertimbangkan ialah seperti dalam jadual 1.

Jadual 1. Nilai-nilai θ, λ dan μ yang dipertimbangkan

$\theta = 10$		$\theta = 30$		$\theta = 100$	
λ	μ	λ	μ	λ	μ
10	1	30	1	100	1
20	2	60	2	200	2
30	3	90	3	300	3
50	4	150	5	500	5

Persentil hampiran yang diperolehi diberikan di dalam Jadual 2, 3 dan 4 di mana

t = persentil tepat yangdiperolehi berdasarkan (1.2)

wy = persentil hampiran menggunakan (2.6)

wytp = persentil hampiran menggunakan (2.8)

fc = persentil hampiran menggunakan (2.11)

Kajian awal penghampiran persentil taburan GS menggunakan ketiga-tiga transformasi yang dibincangkan dalam makalah ini dimulakan oleh Maarof [6].

Kehampiran anggaran persentil yang telah diperolehi menggunakan setiap transformasi songsangan lebih jelas dilihat dengan meneliti nilai-nilai ralat penghampiran yang diberikan di dalam Jadual 5, 6 dan 7 di mana

$$\text{Ralat Penghampiran} = \text{NPH} - \text{NPT}$$

dengan NPH = Nilai Persentil Hampiran dan NPT = Nilai Persentil Tepat. NPT diperolehi dengan menjana $F(x;\mu,\lambda)$, bagi $X \sim GS(\mu,\lambda)$ menggunakan ungkapan (1.2) bagi pertambahan x sebanyak 0.0001.

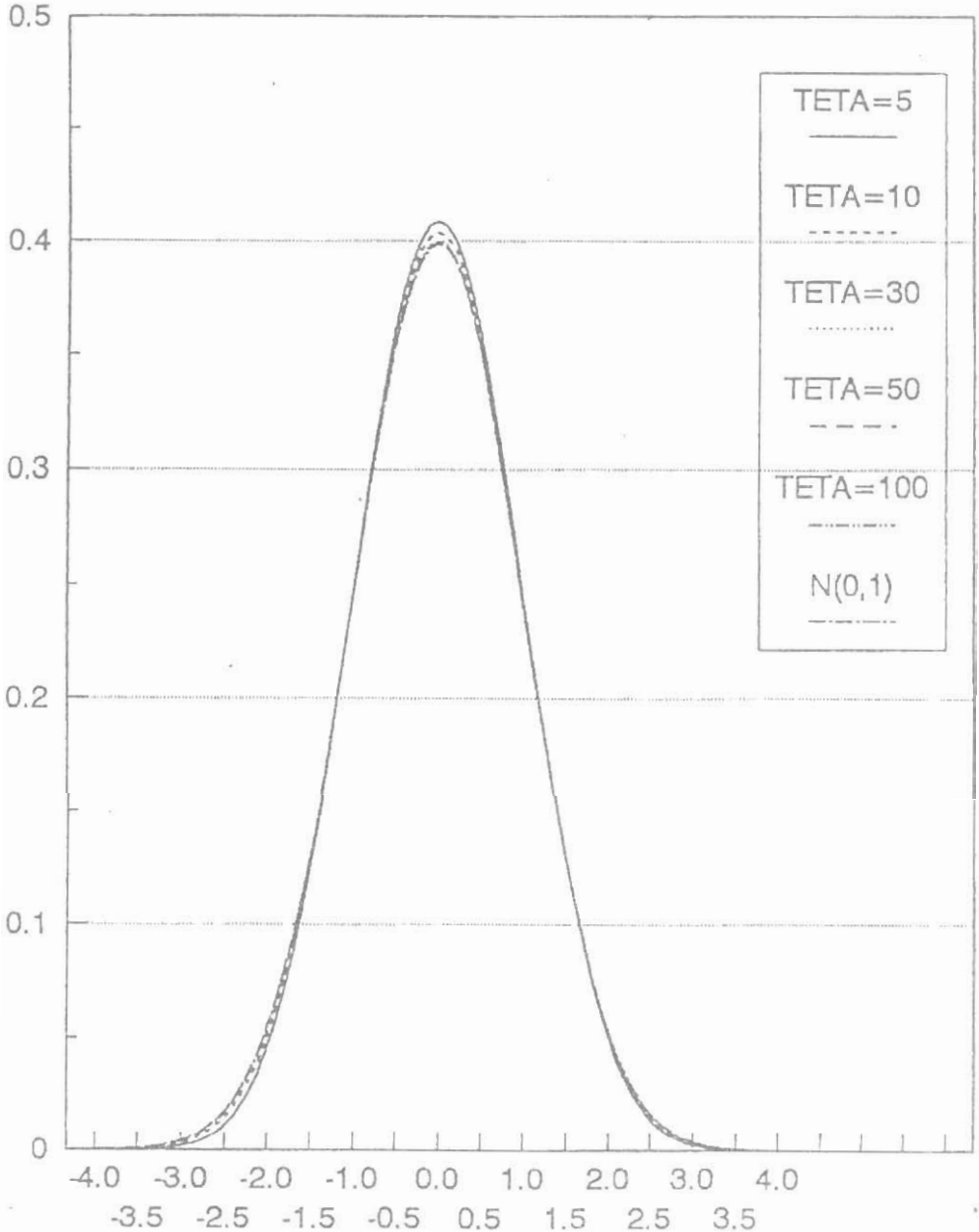
Secara keseluruhannya, apa yang ketara dari Jadual 5, 6, dan 7 ialah

a) bagi $\theta = 10$ dan 30, transformasi songsangan Whitmore & Yalovsky lebih baik menganggar persentil hampiran bagi taburan $GS(\mu,\lambda)$ untuk nilai-nilai μ dan λ yang dipertimbangkan.
b) bila transformasi songsangan Whitmore dan Yalovsky (Tanpa Pemalar) dan transformasi songsangan Folks & Chhikara jelas lebih baik digunakan untuk menghampirkan persentil bagi taburan $GS(\mu,\lambda)$ untuk nilai-nilai μ dan λ yang dipertimbangkan di sini.
c) tanda pada nilai-nilai ralat penghampiran menunjukkan bahawa penggunaan transformasi songsangan Whitmore & Yalovsky cenderung kepada terkurang anggaran manakala transformasi Whitmore & Yalovsky (Tanpa Pemalar) dan transformasi Folks & Chhikara pula cenderung kepada terlebih anggaran.

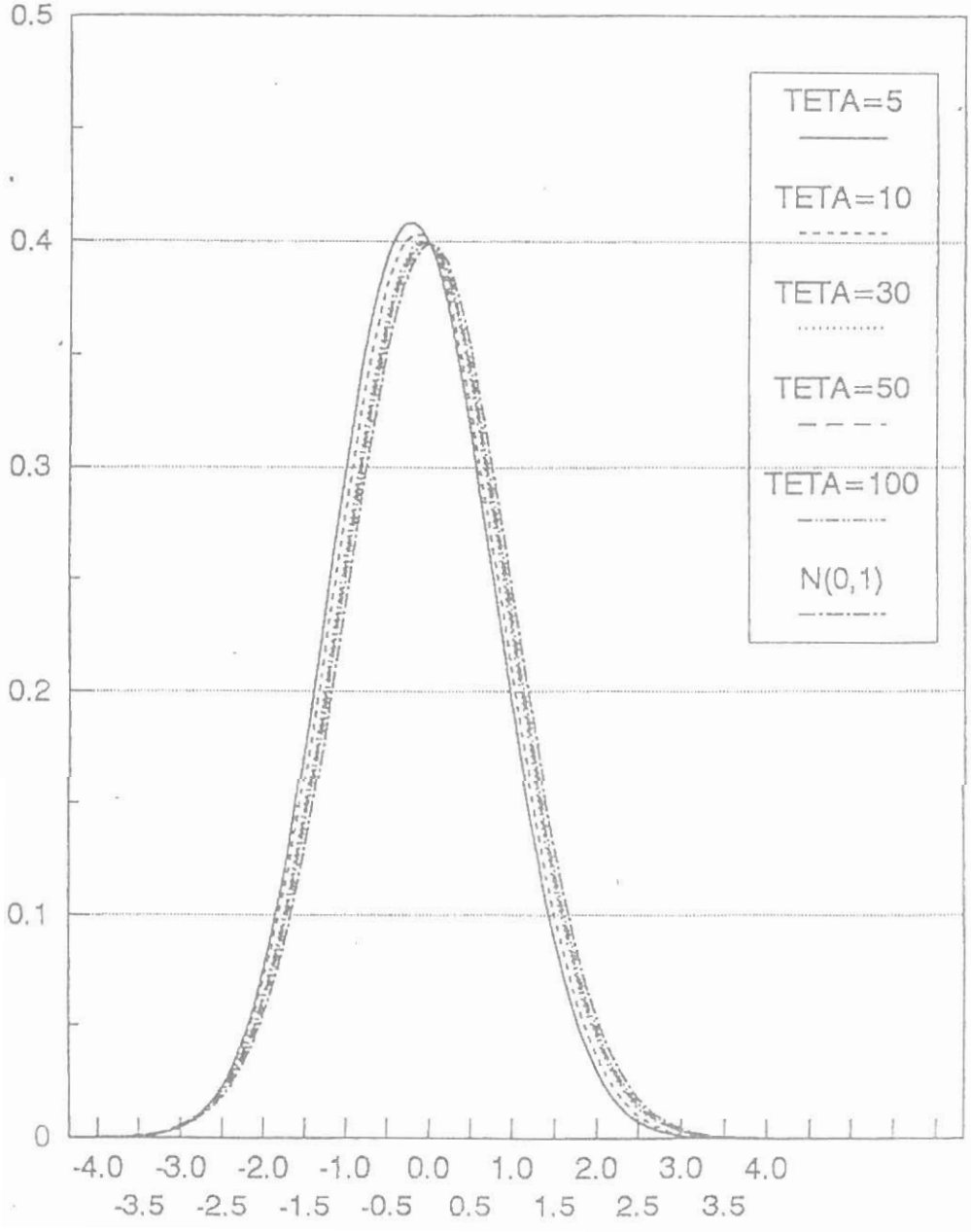
5 KESIMPULAN

Penumpuan taburan satu pembolehubah rawak terpiawai atau tertransformasi kepada taburan normal piawai adalah salah satu ciri penting yang dapat menentukan kegunaan taburan itu untuk pentadbiran. Bagi pembolehubah rawak $GS(\mu,\lambda)$, ini hanya diperolehi bagi nilai θ tertentu ($\theta > 10$) dengan menggunakan transformasi tertentu pula. Bagi transformasi yang berlainan kadar penumpuan taburan pembolehubah rawak tertransformasi juga berbeza. Keputusan kajian perbandingan jelas menunjukkan bahawa transformasi Whitmore & Yalovsky adalah yang terbaik dilakukan ke atas pembolehubah rawak $GS(\mu,\lambda)$ untuk mencapai kenormalan piawai tercepat dan terhampir. Walau bagaimanapun, transformasi songsangan yang diterbitkan cenderung kepada terkurang anggaran akan nilai-nilai persentil. Bagi nilai θ yang agak besar, di sini $\theta = 100$, transformasi songsangan Whitmore & Yalovsky (Tanpa Pemalar) dan Folks & Chhikara lebih baik digunakan untuk penganggaran nilai-nilai persentil bagi taburan $GS(\mu,\lambda)$.

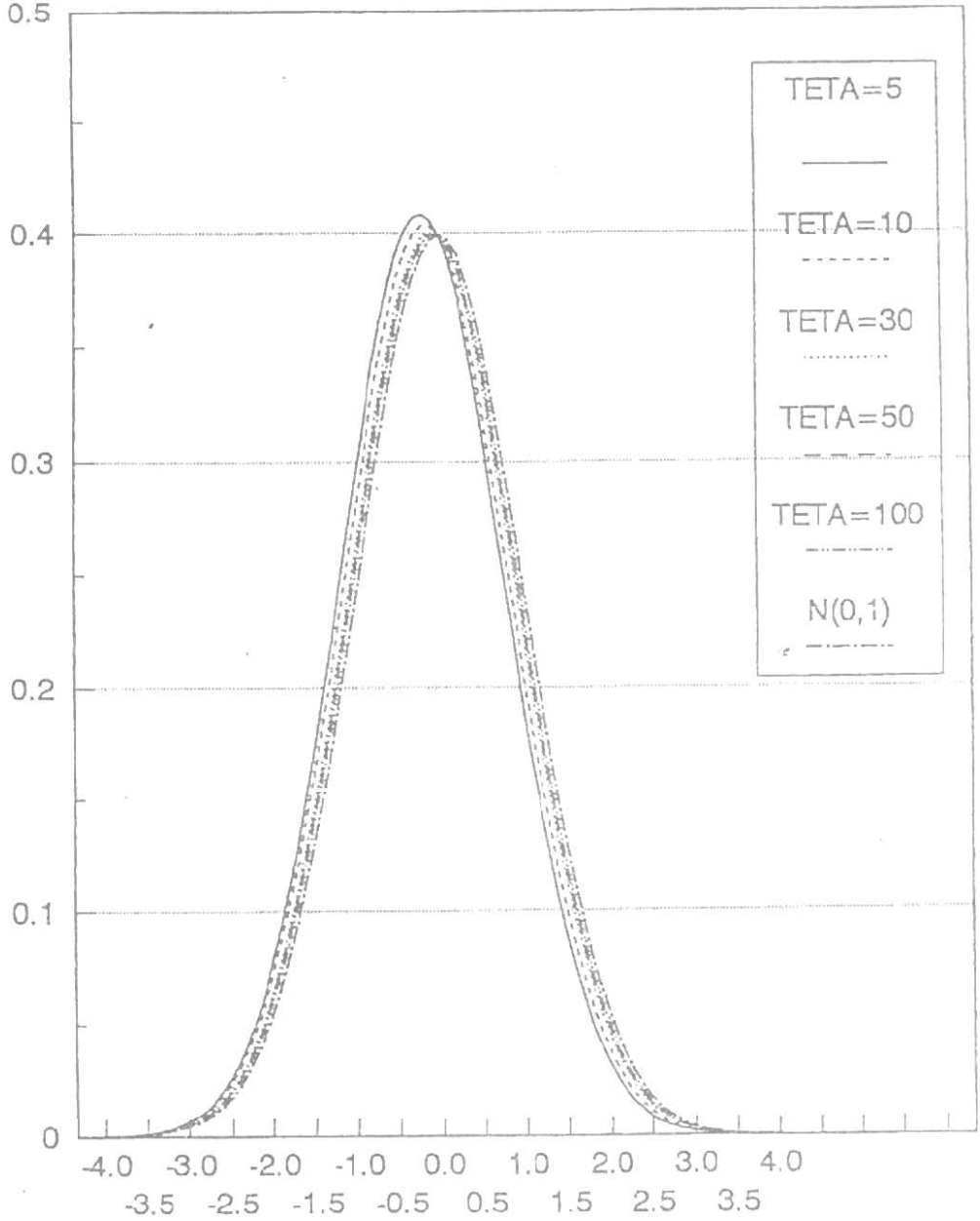
Rajah 1. f.k.k menggunakan transformasi (2.1)
Teta = 5, 10, 30, 50, 100



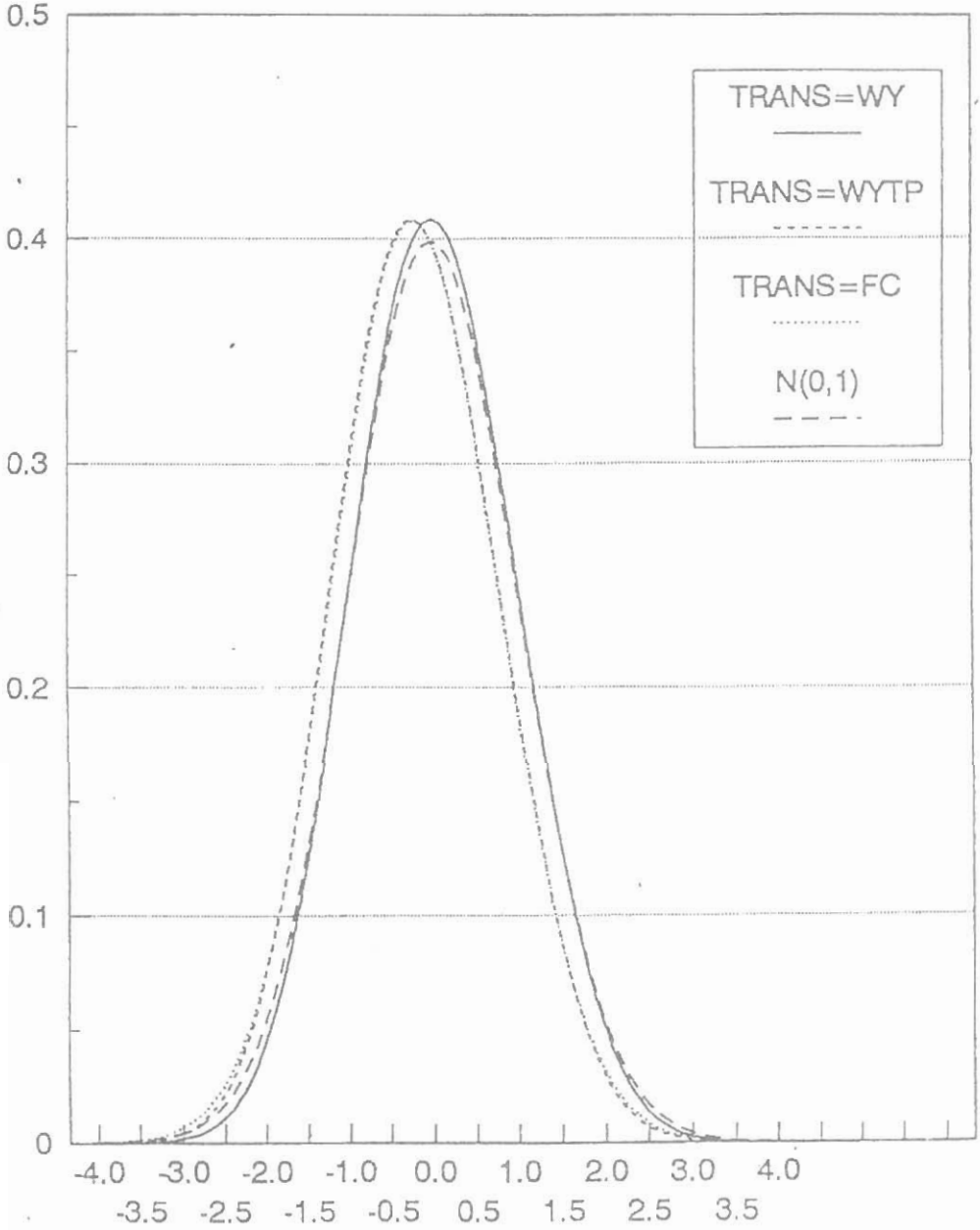
Rajah 2. f.k.k menggunakan transformasi (2.2)
Teta = 5, 10, 30, 50, 100



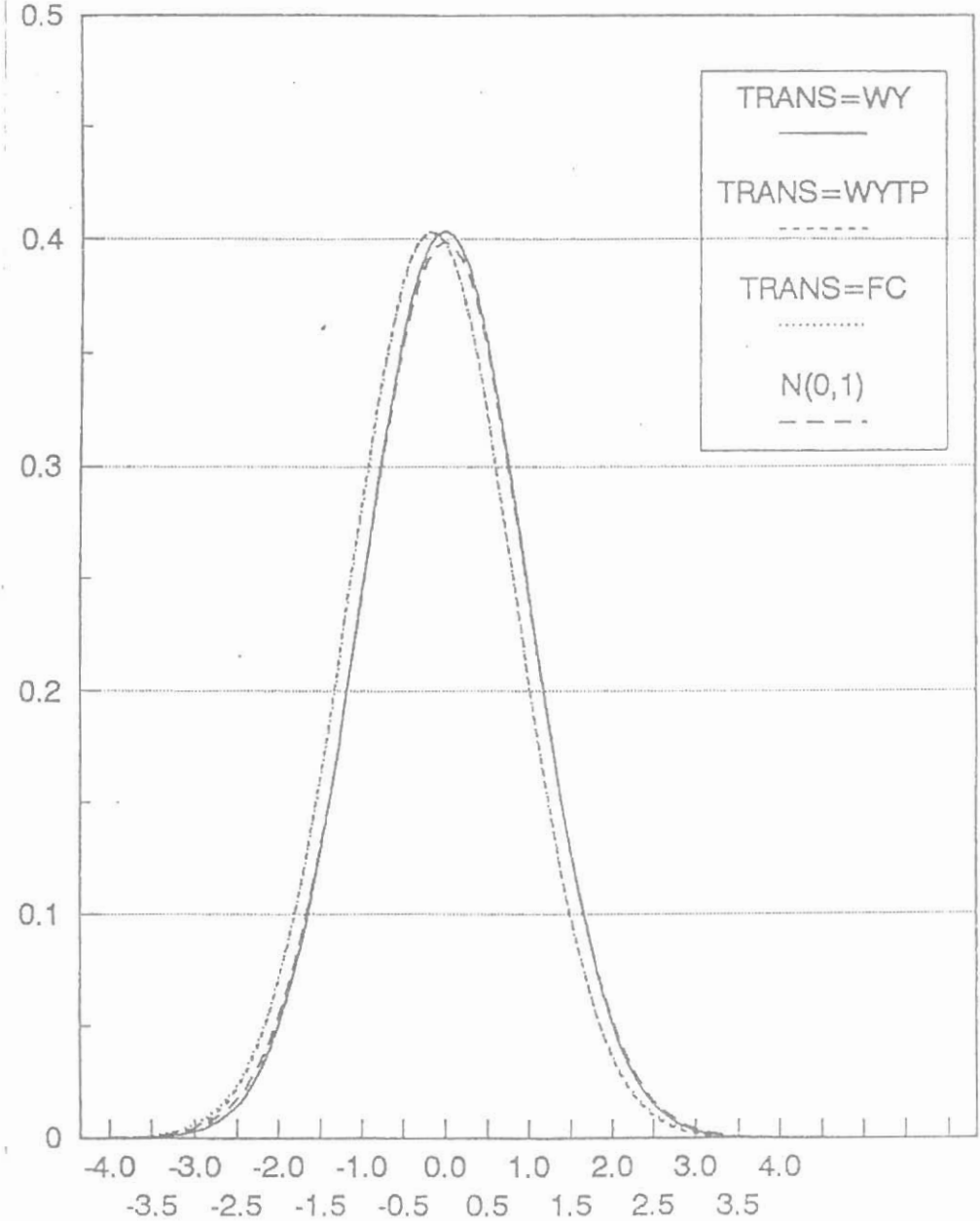
Rajah 3. f.k.k menggunakan transformasi (2.3)
Teta = 5, 10, 30, 50, 100



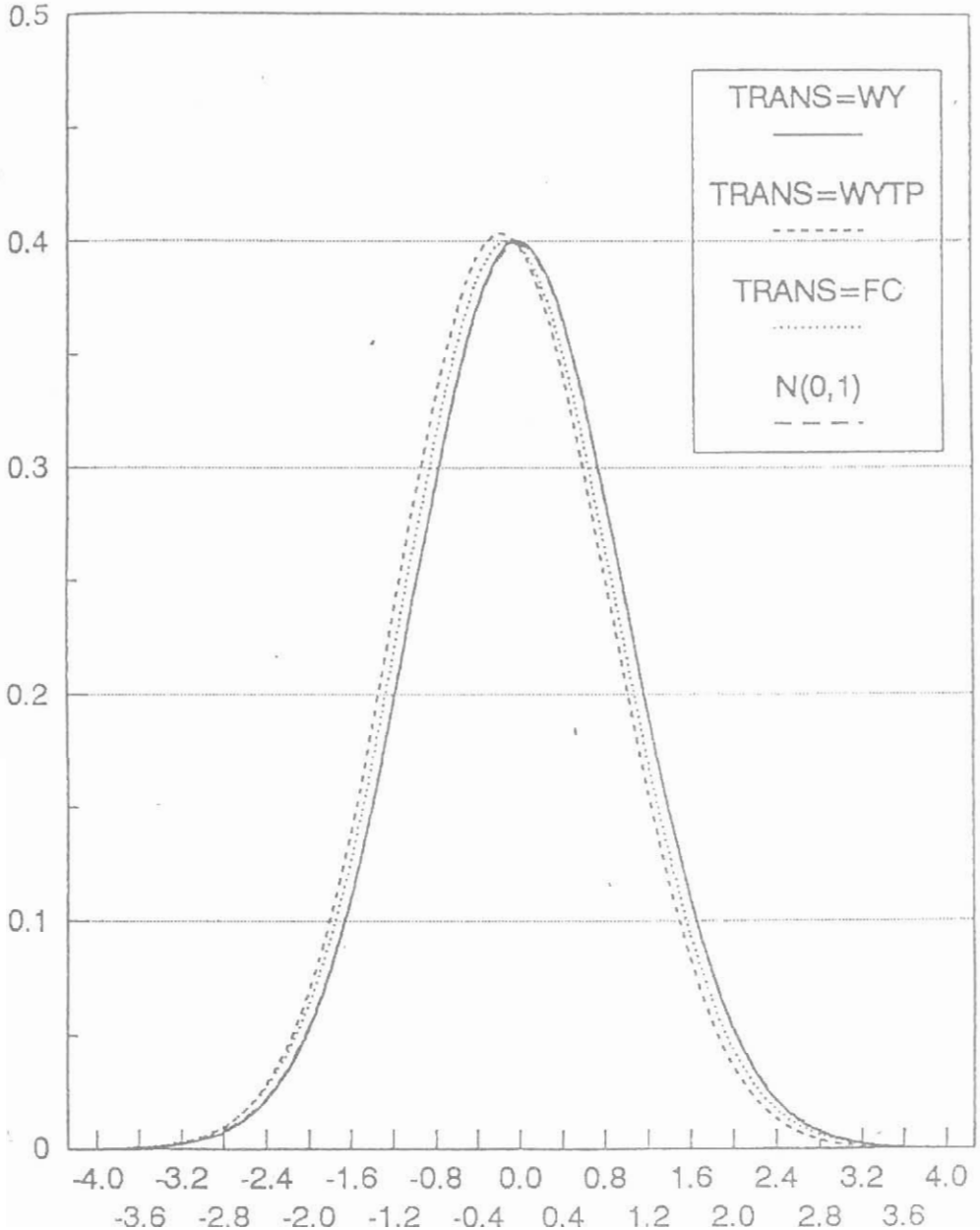
Rajah 4. f.k.k menggunakan semua transformasi di teta = 5



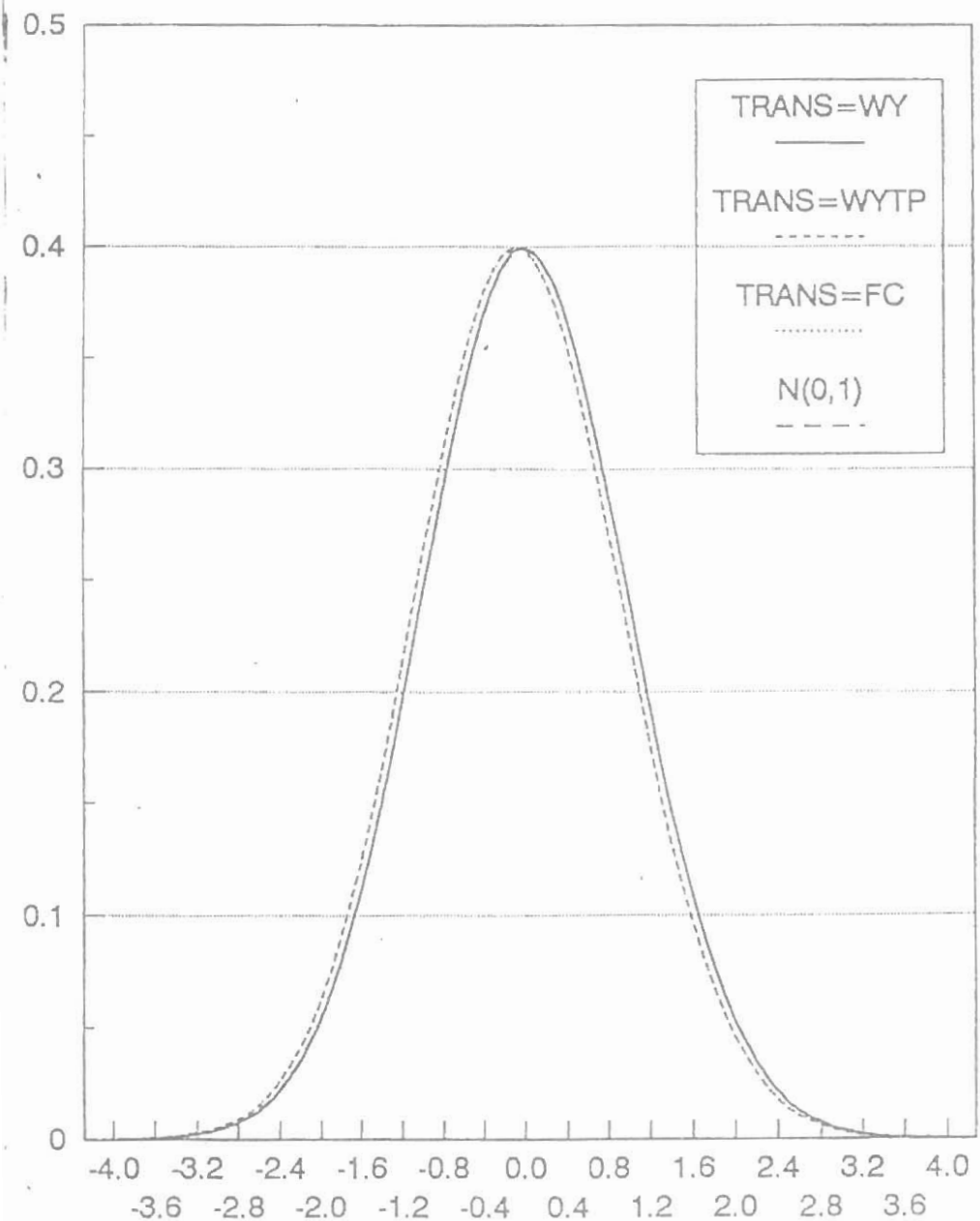
Rajah 5. f.k.k menggunakan semua transformasi di teta = 10



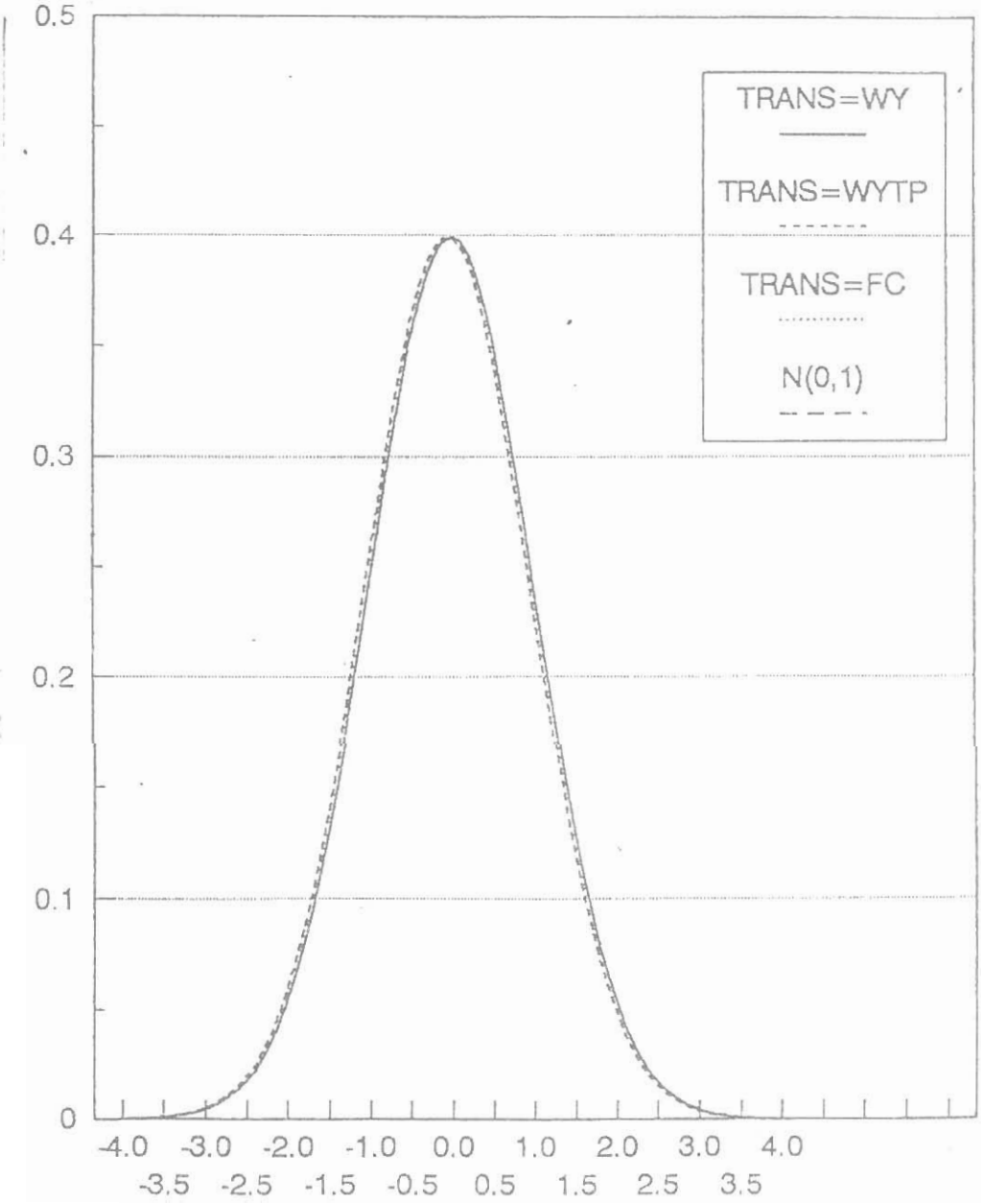
Rajah 6. f.k.k menggunakan semua transformasi di teta = 30



Rajah 7. f.k.k menggunakan semua transformasi di teta = 50



Rajah 8. f.k.k menggunakan semua transformasi di teta = 100



Jadual 2 Persentil hampiran bagi taburan GS
$\theta = 10$

	α	(t)	(wy)	(wytp)	(fc)
	0.05	0.5741	0.5645	0.5935	0.5969
	0.10	0.6408	0.6346	0.6681	0.6689
$\mu = 1$	0.50	0.9527	0.9512	1.0000	1.0000
$\lambda = 10$	0.90	1.4198	1.4259	1.4990	1.4949
	0.95	1.5871	1.6028	1.6850	1.6754
	0.99	1.9489	1.9874	2.0893	2.0567
	0.05	1.1482	1.1290	1.1869	1.1938
	0.10	1.2817	1.2692	1.3343	1.3379
$\mu = 2$	0.50	1.9054	1.9025	2.0000	2.0000
$\lambda = 20$	0.90	2.8395	2.8517	2.9979	2.9898
	0.95	3.1743	3.2057	3.3700	3.3507
	0.99	4.8976	3.9747	4.1785	4.1133
	0.05	1.7224	1.6937	1.7804	1.7907
	0.10	1.9227	1.9038	2.0014	2.0068
$\mu = 3$	0.50	2.8582	2.8540	3.0000	3.0000
$\lambda = 30$	0.90	4.2592	4.2776	4.4969	4.4847
	0.95	4.7614	4.8085	4.0551	5.0261
	0.99	5.8465	5.9621	6.2678	6.1700
	0.05	2.8707	2.8226	2.9673	2.9844
	0.10	3.2043	3.1730	3.3356	3.3447
$\mu = 5$	0.50	4.7636	4.7562	5.0000	5.0000
$\lambda = 50$	0.90	7.0988	7.1293	7.4948	7.4745
	0.95	7.9380	8.0142	8.4251	8.3768
	0.99	9.7438	9.9368	10.4463	10.2833

Jadual 3 Persentil hampiran bagi taburan GS
$\theta = 30$

	α	(t)	(wy)	(wytp)	(fc)
	0.05	0.7302	0.7277	0.7399	0.7407
	0.10	0.7796	0.7785	0.7916	0.7920
$\mu = 1$	0.50	0.9837	0.9835	1.0000	1.0000
$\lambda = 30$	0.90	1.2414	1.2424	1.2633	1.2626
	0.95	1.3254	1.3292	1.3515	1.3500
	0.99	1.4978	1.5049	1.5302	1.5254
	0.05	1.4607	1.4553	1.4798	1.4805
	0.10	1.5594	1.5570	1.5832	1.5840
$\mu = 2$	0.50	1.9673	1.9670	2.0000	2.0000
$\lambda = 60$	0.90	2.4826	2.4848	2.5265	2.5252
	0.95	2.6509	2.6584	2.7031	2.7000
	0.99	2.9952	3.0098	3.0604	3.0508
	0.05	2.1911	2.1830	2.2197	2.2222
	0.10	2.3391	2.3356	2.3748	2.3761
$\mu = 3$	0.50	2.9509	2.9504	3.0000	3.0000
$\lambda = 90$	0.90	3.7239	3.7271	3.7898	3.7878
	0.95	3.9763	3.9876	4.0546	4.0501
	0.99	4.4929	4.5147	4.5906	4.5762
	0.05	3.6518	3.6383	3.6995	3.7037
	0.10	3.8926	3.8926	3.9580	3.9601
$\mu = 5$	0.50	4.9183	4.9174	5.0000	5.0000
$\lambda = 150$	0.90	6.2065	6.2119	6.3163	6.3130
	0.95	6.6271	6.6460	6.7577	6.7501
	0.99	7.4881	7.5245	7.6510	7.6270

Jadual 4 Persentil hampiran bagi taburan GS
$\theta = 100$

	α	(t)	(wy)	(wytp)	(fc)
	0.05	084831	0.8437	0.8479	0.8481
	0.10	0.8798	0.8755	0.8799	0.8799
$\mu = 1$	0.50	1.0000	0.9950	1.0000	1.0000
$\lambda = 100$	0.90	1.1367	1.1309	1.1366	1.1365
	0.95	1.1787	1.1735	1.1794	1.1792
	0.99	1.2715	1.2561	1.2624	1.2617
	0.05	1.6969	1.6873	1.6958	1.6961
	0.10	1.7595	1.7509	1.7597	1.7599
$\mu = 2$	0.50	2.0000	1.9900	2.0000	2.0000
$\lambda = 200$	0.90	2.2733	2.2618	2.2731	2.2729
	0.95	2.3572	2.3470	2.3588	2.3584
	0.99	2.5226	2.5122	2.5248	2.5234
	0.05	2.5454	2.5310	2.5437	2.5442
	0.10	2.6394	2.6264	2.6396	2.6398
$\mu = 3$	0.50	3.0000	2.9850	3.0000	3.0000
$\lambda = 300$	0.90	3.4099	3.3927	3.4097	3.4094
	0.95	3.5358	3.5205	3.5382	3.5375
	0.99	3.7839	3.7683	3.7871	3.7851
	0.05	4.2424	4.2183	4.2395	4.2403
	0.10	4.3990	4.3773	4.3993	4.3997
$\mu = 5$	0.50	5.0000	4.9751	5.0000	5.0000
$\lambda = 500$	0.90	5.6832	5.6544	5.6828	5.6823
	0.95	5.8929	5.8676	5.8970	5.8959
	0.99	6.3063	6.2804	6.3119	6.3086

Jadual 5 Ralat penghampiran di $\theta = 10, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 10$

-0.0096	0.0194	0.0228
-0.0062	0.0263	0.0281
-0.0015	0.0473	0.0473
0.0061	0.0792	0.0752
0.0157	0.0979	0.0883
0.0385	0.1404	0.1078
$\mu = 2, \quad \lambda = 20$		
-0.0192	0.0387	0.0456
-0.0125	0.0526	0.0562
-0.0029	0.0946	0.0946
0.0122	0.1584	0.1503
0.0314	0.1957	0.1764
0.0771	0.2809	0.2157
$\mu = 3, \quad \lambda = 30$		
-0.0288	0.0580	0.0683
-0.0192	0.0788	0.0842
-0.0042	0.1418	0.1418
0.0184	0.2377	0.2255
0.0471	0.2937	0.2647
0.1156	0.4213	0.3235
$\mu = 5, \quad \lambda = 50$		
-0.0481	0.0966	0.1137
-0.0313	0.1313	0.1404
-0.0074	0.2364	0.2364
0.0305	0.3960	0.3757
0.0762	0.4871	0.4388
0.1930	0.7025	0.5395

Jadual 6 Ralat penghampiran di $\theta = 30, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 30$

-0.0025	0.0097	0.0105
-0.0011	0.0120	0.0124
-0.0002	0.0163	0.0163
0.0010	0.0219	0.0212
0.0038	0.0261	0.0246
0.0071	0.0324	0.0276
$\mu = 2, \quad \lambda = 60$		
-0.0054	0.0191	0.0208
-0.0024	0.0238	0.0246
-0.0003	0.0327	0.0327
0.0022	0.0439	0.0426
0.0075	0.0522	0.0491
0.0146	0.0652	0.0556
$\mu = 3, \quad \lambda = 90$		
-0.0081	0.0286	0.0311
-0.0035	0.0357	0.0370
-0.0005	0.0491	0.0491
0.0032	0.0659	0.0639
0.0113	0.0783	0.0738
0.0218	0.0977	0.0833
$\mu = 5, \quad \lambda = 150$		
-0.0135	0.0477	0.0519
-0.0060	0.0594	0.0615
-0.0009	0.0817	0.0817
0.0054	0.1098	0.1065
0.0189	0.1306	0.1230
0.0364	0.1629	0.1389

Jadual 7 Ralat penghampiran di $\theta = 30, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 100$

-0.0046	-0.0004	-0.0002
-0.0011	0.0001	0.0001
-0.0050	0.0000	0.0000
-0.0058	-0.0001	-0.0002
-0.0052	0.0007	0.0005
-0.0054	0.0009	0.0002
$\mu = 2, \quad \lambda = 200$		
-0.0096	-0.0011	-0.0008
-0.0086	0.0002	0.0004
-0.0100	0.0000	0.0000
-0.0115	-0.0002	-0.0004
-0.0102	0.0016	0.0012
-0.0104	0.0022	0.0008
$\mu = 3, \quad \lambda = 300$		
-0.0144	-0.0017	-0.0012
-0.0130	0.0002	0.0004
-0.0150	0.0000	0.0000
-0.0172	-0.0002	-0.0005
-0.0153	0.0024	0.0017
-0.0156	0.0032	0.0013
$\mu = 5, \quad \lambda = 500$		
-0.0241	-0.0029	-0.0021
-0.0217	0.0003	0.0007
-0.0249	0.0000	0.0000
-0.0288	-0.0004	-0.0009
-0.0253	0.0041	0.0030
-0.0259	0.0056	0.0023

RUJUKAN

[1] R. S. Chhikara & J. L. Folks, *Estimation of the inverse Gaussian distribution function*, J. Amer Stat. Assoc. **69** (1974), 250–254.

[2] ———, *The inverse Gaussian distribution as a lifetime model*, Technometrics **19** (1977), 461–468.

[3] J. L. Folks & R. S. Chhikara, *The inverse Gaussian distribution and its statistical application – A review*, J. Royal Stat. Soc. **B40** (1978), 263–289.

[4] ———, *The inverse Gaussian distribution*, Marcel-Dekker, New York, 1989.

[5] N. L. Johnson & S. Kotz, *Distributions in statistics: continous univariate distributions – 2*, Houghton Mifflin Co, Boston, 1970.

[6] F. Maarof, *Persentil hampiran taburan Gaussian Songsang*, Prosiding Seminar Sehari ISM 1992.

[7] J. R. Michael, W. R. Schucany &R. W. Haas, *Generating random variates using transformations with multiple roots*, The American Statistician **30, No. 2.2** (1976), 88–90.

[8] G. A. Whitmore & M. Yalovsky, *A normalizing logarithmic transformation for inverse Gaussian random variables*, Technometrics **20** (1978), 207–208.