MATEMATIKA, 2005, Jilid 21, Bil. 2, hlm. 153–162

Algoritma Berkebarangkalian dalam Pengoptimuman

[1]Siska Candra Ningsih, [2]Yosza Dasril & [3]Ismail Bin Mohd
[1]Pusat Pengajian Siswazah, Kolej Universiti Sains dan Teknologi Malaysia
[2,3]Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Kolej Universiti Sains dan Teknologi Malaysia
21030 Kuala Terengganu, Malaysia
e-mail: siskaningsih@yahoo.com, yosza@kustem.edu.my, ismail@kustem.edu.my

Abstrak Makalah ini akan membincangkan keberkesanan algoritma berkebarangkalian dalam menentukan titik optimum masalah pengoptimuman sejagat. Ujian kerawakan dan kenormalan telah digunakan untuk mengesahkan bahawa masalah pengoptimuman yang dipertimbangkan adalah satu proses Wiener. Selanjutnya, diberikan dua contoh berangka dengan nilai gamma yang berbeza untuk melihat keberkesanan algoritma tersebut.

Katakunci Pengoptimuman, proses Wiener, kebarangkalian.

Abstract *This article discusses the efficiency of the probabilistic algorithm for determining the optimal point of global optimization problems. Randomness and normality tests were conducted to verify that the optimization problem constitutes a Wiener process. Furthermore, two numerical examples are given with different gamma values to illustrate the efficiency of the algorithm.*

Keywords *Optimization, Wiener process, probabilistic*

1 Latar Belakang dan Ungkapan Masalah

Amnya, kaedah-kaedah pengoptimuman dapat dikelompokkan sebagai berketentuan dan berkebarangkalian. Walaupun pada kaedah berketentuan terdapat syarat cukup dan perlu bagi sesuatu titik optimum tetapi belum ada kaedah yang dapat menyelesaikan semua masalah pengoptimuman sejagat. Sesungguhnya, sebahagian kaedah ini misalnya kaedah Quasi-Newton didapati memenuhi kriteria yang di maksudkan, tetapi pengiraan yang dilakukan untuk menyelesaikan sesuatu masalah menokok secara pesat apabila saiz masalah semakin besar.

Sebaliknya, kebanyakan kaedah berkebarangkalian hanya dapat menunjukkan kekariban atau persekitaran penyelesaian optimum dengan lebih cekap tetapi dengan kos pengiraan yang sangat tinggi dan ditambah dengan kegagalannya menjamin keoptimuman sejagat tadi. Walaupun demikian, adalah memadai jika kaedah ini dapat menentukan penyelesaian yang diharapkan dalam jangka masa pengiraan yang sederhana ([2],[6]).

Dalam makalah ini akan ditunjukkan fakta bahawa walaupun kaedah berkebarangkalian ini memerlukan pengiraan yang berlarutan dan membosankan tetapi kaedah ini dapat menentukan penyelesaian optimum di mana kaedah berketentuan gagal untuk mendapatkannya.

Dalam makalah ini akan dipertimbangkan masalah pengoptimuman yang meminimumkan

$$z = f(\boldsymbol{x})$$

tertakluk kepada

$$a \leq \boldsymbol{x} \leq b$$

dengan

$$f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dan } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}.$$

Rantau tersaur bagi masalah di atas adalah semua titik yang memenuhi sekatan yang diberikan dan ditakrifkan sebagai

$$F = \{\boldsymbol{x} \,|\, a \leq \boldsymbol{x} \leq b, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Dalam bahagian seterusnya makalah ini akan menghuraikan proses stokastik dengan melaksanakan dua ujian iaitu ujian kerawakan dan ujian kenormalan dan diteruskan dengan algoritma dalam Bahagian 3. Dalam Bahagian 4 akan diberikan beberapa ujian masalah dan di akhir makalah ini akan diberikan keputusan berangka serta kesimpulan yang diperolehi.

2 Proses Stokastik

Suatu model stokastik bagi fungsi objektif f mengimplikasikan bahawa $f(x)$ yang dipertimbangkan sebagai suatu realisasi bagi proses stokastik $f(x, \omega)$ dengan ω ahli kepada sebarang ruang kebarangkalian. Sebagai model stokastik, kita akan mempertimbangkan proses Wiener $f(x)$ untuk $x \in X = [x_0, x]$ dengan

(i) $f(x_0) = \mu$

(ii) $f(x) - f(y) \sim N(0, \sigma^2|x - y|), x, y \in X.$

Andaikan n penilaian fungsi $f_1, f_2, ..., f_n$ masing-masing pada titik $x_1, x_2, ..., x_n$ telah dilaksanakan. Taburan bagi $f(x)$ ditandai dengan $z_n = (x_1, f_1, x_2, f_2, ..., x_n, f_n)$ adalah normal dengan nilai jangkaan $\mu(x)$ dan varians σ^2. Untuk sebarang subselang

$$\Delta i = [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, ..., n - 1,$$

rumus bagi nilai jangkaan dan varians adalah

$$\mu(x) = E(f(x)|z_n) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \tag{2.1}$$

$$\sigma^2(x) = \text{var}(f(x)|z_n) = \sigma^2 \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{t_{i+1} - t_i} \tag{2.2}$$

dengan $x \in \Delta_i, i = 0, ..., n - 1$, dan $f_0 = \mu$.

Untuk $i = n, \Delta_n = [x_n, x]$ dengan $x \in \Delta_n$, didapati

$$\mu(x) = E(f(x)|z_n) = f(x_n) \tag{2.3}$$

dan

$$\sigma^2(x) = \mathrm{var}(f(x)|z_n) = \sigma^2(x - x_n) \tag{2.4}$$

Teorem berikut yang menyatakan tentang taburan bagi peminimum global $f(x)$ yang pembuktiannya diberikan dalam Archetti [1], merupakan asas kepada algoritma yang akan dihuraikan pada bahagian selanjutnya.

Teorem 2.1

Jika $f(x), x \in [a,b]$ sebagai suatu proses Wiener sedemikian hingga $f(a) = f_a$, dan taburan

$$f(z) = P\{\min_{a \leq t \leq b} f(t) = z | f(b) = h\},$$

maka diperoleh

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \geq \min(f_a, f_b) \\ \exp\left(-2\frac{(f_a - z)(f_b - z)}{\sigma^2(b-a)}\right), & z < \min(f_a, f_b) \end{cases} .$$

Sebelum melaksanakan algoritma berkebarangkalian terlebih dahulu perlu dilakukan pengujian statistik bagi proses Wiener daripada fungsi objektif $f(x)$. Seterusnya dilakukan dua ujian statistik.

Ujian 2.1 (Ujian Kerawakan)

Diberikan fungsi $f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^1$, dan $z_i = f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_{i-1}), (i = 1, ..., n)$, titik $\boldsymbol{x_i}$, $(i = 1, ..., n)$ membahagi selang X dalam bahagian yang sama besar. Anggap $(n-1)$ penilaian fungsi telah dilakukan pada titik $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ dan disusun sehingga $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1}$. Kerawakan z_i diuji dengan

$$R = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i z_i - \bar{z}\,\bar{I}}{S_z S_1} \tag{2.5}$$

dengan

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \tag{2.6}$$

$$S_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2 \tag{2.7}$$

$$\bar{I} = \frac{n+1}{2} \qquad 2.8$$

$$S_1 = \frac{n^2 - 1}{12} \tag{2.9}$$

dan

$$T_n = \left[(n-2)(1-R^2)^{-1}\right]^{1/2}. \tag{2.10}$$

Jika z_i tak bersandarkan pada i, pembolehubah rawak (2.10) akan tertabur dalam taburan-t dengan darjah kebebasan $\nu = n - 2$. Ujian dilakukan pada aras kepercayaan α dan untuk saiz sampel n yang berbeza. Jika nilai $|T_n|$ melebihi nilai $T_{\alpha,n}$ dalam taburan-t, maka hipotesis ditolak dengan keputusan $z_i, (i = 1, ..., n)$ adalah tak bersandar.

Ujian 2.2 (Ujian Kenormalan)

Untuk menguji kenormalan pembolehubah rawak bagi min dan varians tidak diketahui, terlebih dahulu ditentukan:

$$\sigma_i = \max\left\{F_0(z_{(i)}; \bar{z}; S_z) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F_0(z_{(i)}; \bar{z}; S_z)\right\} \tag{2.11}$$

dengan nilai $z_{(i)}$ adalah nilai-nilai z_i yang telah disusun secara menaik iaitu $z_{(i-1)} \leq z_i(i = 1, ..., n)$ dan $F_0(x; \bar{x}; s)$ adalah fungsi taburan normal piawai yang diberikan oleh

$$F_0(x; \bar{x}; s) = \int_{-\infty}^{(x-\bar{x})/s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \tag{2.12}$$

Seterusnya, nilai bagi D_n ditentukan menerusi

$$D_n = \max_{i=1,\dots,n} (\sigma_i)\ . \tag{2.13}$$

Jika nilai D_n melebihi nilai jadual $D_{\alpha,n}$ pada aras kerertian α dan saiz sampel n yang berbeza, maka hipotesis ditolak.

Jika kedua ujian ini memenuhi criteria yang ditetapkan maka $z_i, (i = 1, ..., n)$ memenuhi proses Wiener ([1]).

3 Algoritma

Setelah melakukan ujian statistik bagi fungsi objektif, kita akan melaksanakan beberapa perkara seperti berikut yang merupakan struktur bagi algoritma yang dibincangkan dalam makalah ini.

Parameter Model

Tiga langkah berikut perlu terlebih dahulu dilaksanakan sebelum menggunakan algoritma yang bertujuan untuk mengira nilai parameter μ dan σ :

(a) Hitung nilai $\mu = f(\boldsymbol{x}_0)$

(b) Misalkan $\Delta = \dfrac{\bar{x} - x_0}{n}$ dan $x_i = x_0 + i\Delta, (i = 1, ..., n)$

(c) Hitung $\hat{\sigma}$, iaitu kebolehjadian maksimum dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{x_i - x_{i-1}} \tag{3.1}$$

Pemilihan x_n

Dalam pemilihan ini dilakukan dalam dua langkah berikut:

(a) Pilih selang Δ_p sehingga :

$$\begin{aligned} P\{\min_{x\in\Delta_p} f(x) < f^*_{n-1} - \gamma | z_{n-1}\} &= \max_i \ P\left\{\min_{x\in\Delta p} f(x) \ < \ f^*_{n-1} - \gamma \ | z_{n-1}\right\} \\ &= \max_i \ P\left\{\min_{x\in\Delta p} f(x) \ < \ f^*_{n-1} - \gamma \ | f_i, f_{i+1}\right\} \\ &= \max_i \exp\left(-2\frac{(f^*_{n-1} - \gamma - f_{i+1})(f^*_{n-1} - \gamma - f_i)}{\sigma^2(x_{i+1} - x_i)}\right) \end{aligned}$$

dengan $f^*_{n-1} = \min(\mu, f_1, f_2, ..., f_{n-1})$ dan γ adalah positif.

(b) Pilih x_n dalam selang Δ_p

$$P\{f(x_n) < f^*_{n-1} - \gamma | z_{n-1}\} = \max_{x\in\Delta_\ell}\} P\{f(x) < f^*_{n-1} - \gamma | z_{n-1}\} = \max_{x\in\Delta_\ell} P_p(x)$$

untuk $x \in \Delta_p$

$$P_p(x) = \int_{-\infty}^{f_{n-1}-\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu(x))^2}{\sigma^2(x)}\right) dz$$

$$P_p(x) = \Phi\left(\frac{f_{n-1} - \gamma - \mu(x)}{\sigma(x)}\right), x \in \Delta_p$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Titik dalam $\Delta_p = [\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_{p+1}]$, dengan $P_p(\boldsymbol{x})$ adalah rantau maksimum, ditentukan dengan

$$x_n = x_p + \frac{(f^*_{n-1} - \gamma - f_p)(x_{p+1} - x_p)}{2(f^*_{n-1} - \gamma) - f_p - f_{p+1}}. \tag{3.2}$$

Kriteria Berhenti

Andaikan selang $[a^n, b^n]$ yang memuat peminimum $\boldsymbol{x}^*$ disebut selang ketaktentuan setelah n lelaran dan dilambangkan dengan simbol L_n, setelah n penilaian fungsi dilakukan pada $x_0 \le x_1 \le ... \le x_{n-1}$. Pada langkah selanjutnya, $f(x)$ dianggap unimodal dalam setiap selang L_n dan lintasan sampel dari proses wiener untuk $x \in X - L_n$ ([3], [4] & [5]).

Dengan menggunakan algoritma Newton kita dapat menentukan titik-titik yang menjadikan $f(x) = 0$ sebagai titik hujung bagi selang L_n. Katakan

$$P_k = P\left\{\min_{x\in|x_k, x_{k+1}|} f(x) \le f^*_n - \varepsilon | f(x_k), f(x_{k+1})\right\} \tag{3.3}$$

Jika

$$[x_k, x_{k+1}] \not\subset L_n$$

maka

$$P_k = \exp\left(-2\frac{(f_n^* - \varepsilon - f(x_{k+1}))(f_n^* - \varepsilon - f(x_k))}{\sigma^2(x_{k+1} - x_k)}\right) \tag{3.4}$$

dengan $f_n^* = \min\{(f(x_0), f(x_1), ..., f(x_{n-1})\}$ dan ε adalah aras kejituan yang sudah ditetapkan terlebih dahulu.

Jika $[x_k, x_{k+1}] \subset L_n$, maka $P_k = 0$. Akhirnya, kita tentu nilai

$$PF_n = P\left\{\min_{x\in X} f(x) > f_n^* - \varepsilon |\, z_n\right\} = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - P_k) \tag{3.5}$$

algoritma berakhir apabila $PF_n > PT$, dengan nilai kebarangkalian yang diberikan $PT = 0.99$.

Kawalan Parameter γ

Jujukan $\{\gamma_j\}$ dapat ditentukan daripada

$$P_{\gamma j} = P\{\min_{x\in X} f(x) > f_n^* - \gamma_j | zn\}.$$

4 Pengubahsuaian Parameter γ

Pemilihan nilai gamma akan mempengaruhi saiz Δ_p dan secara langsung juga mempengaruhi pemilihan x_n iaitu titik optimum. Justeru itu, dengan mengawal nilai gamma ini maka diharapkan bilangan lelaran dapat dikurangkan dan dengan demikian adalah lebih baik daripada menetapkan nilai gamma pada sebarang nilai. Namun begitu, kriteria berikut dapat digunakan untuk mengawal nilai gamma ini:

$$\text{Jika } P_{\gamma j} \leq PT, \text{ maka } \gamma_j \text{ ditetapkan, selainnya } \gamma_{j+1} = \frac{2}{\gamma_j}.$$

5 Keputusan Berangka dan Perbincangan

Contoh-contoh berikut digunakan bagi mengimplementasikan algoritma di atas menggunakan perisian Excel. Dalam jadual-jadual yang diberikan dalam bahagian ini, n ialah bilangan sampel, dengan T_n ialah nilai yang diberikan persamaan (2.10) dan D_n ialah nilai yang diberikan persamaan (2.13). Nilai-nilai $T_{0.05}, T_{0.01}, D_{0.05,n}$ dan $D_{0.01,n}$ didapati dari David ([7]). Dapat ditunjukkan bahawa titik pemerhatian, z_i bertabur secara rawak dan normal.

Contoh 5.1

Minimumkan

$$f(x) = 2(x - 0.75)^2 + \sin\left(8\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

tertakluk kepada

$$0 \leq x \leq 1.$$

Hasil pengiraan ujian kerawakan dan kenormalan diringkaskan dalam Jadual 5.1 dengan titik optimum adalah $x = 0.75$ dan $f(x) = -1$. Pelaksanaan Algoritma dilakukan dengan nilai γ berbeza yang pengiraannya disajikan pada Rajah 5.1 sampai Rajah 5.3.

Pemilihan $\gamma = 0.2$ menghasilkan $\Delta_p = 0.3971$ dengan jumlah selang $= 3$ dan diperolehi nilai $x_n = 0.7141$ dan $f(x_n) = -0.5450$.

Pemilihan $\gamma = 0.3$ menghasilkan $\Delta_p = 0.1703$ dengan jumlah selang $= 6$ dan diperolehi nilai $x_n = 0.7502$ dan $f(x_n) = -1$.

Pemilihan $\gamma = 0.4$ menghasilkan $\Delta_p = 0.0565$ dengan jumlah selang $= 18$ dan diperolehi nilai $x_n = 0.7421$ dan $f(x_n) = -0.9802$.

Kelihatan dalam kes ini ($\gamma = 0.2, 0.3, 0.4$) nilai gamma optimum adalah 0.3 yang menghasilkan keputusan lebih baik dari nilai-nilai gamma yang lain.

Contoh 5.2

Minimumkan

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}(x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

tertakluk kepada

$$0 \leq x \leq 5.$$

Hasil pengiraan ujian kerawakan dan kenormalan diringkaskan dalam Jadual 5.2 dengan titik optimum adalah $x = 2.57$ dan $f(x) = -0.7238$. Pelaksanaan Algoritma dilakukan dengan nilai γ berbeza yang pengiraannya disajikan pada Rajah 5.4 hingga Rajah 5.6.

Pemilihan $\gamma = 0.001$ menghasilkan $\Delta_p = 0.9979$ dengan jumlah selang $= 5$ dan diperolehi nilai $x_n = 2.6666$ dan $f(x_n) = -0.7158$.

Pemilihan $\gamma = 0.01$ menghasilkan $\Delta_p = 0.7179$ dengan jumlah selang $= 5$ dan diperolehi nilai $x_n = 2.7031$ dan $f(x_n) = -0.7090$.

Pemilihan $\gamma = 0.1$ menghasilkan $\Delta_p = 0.3424$ dengan jumlah selang $= 15$ dan diperolehi nilai $x_n = 2.5696$ dan $f(x_n) = -0.7238$.

Kelihatan dalam kes ini ($\gamma = 0.001, 0.01, 0.1$) nilai gamma optimum adalah 0.1 yang menghasilkan keputusan lebih baik dari nilai-nilai gamma yang lain.

6 Kesimpulan

Jelas kelihatan bahawa pemilihan gamma mempengaruhi penumpuan dan ralat dalam menentukan nilai optimum yang tepat. Sesungguhnya dari dua contoh di atas didapati adalah lebih baik mengawal nilai gamma daripada menetapkan pada satu nilai sahaja.

Dari kedua contoh di atas kelihatan bahawa algoritma ini sangat berkesan dalam menentukan penyelesaian optimum. Apabila digunakan kaedah berketentuan iaitu kaedah Newton (tidak ditunjukkan dalam makalah ini) pada kedua masalah di atas didapati kaedah Newton gagal menumpu kepada titik optimum. Hal ini berlaku kerana dalam kaedah Newton, kita memerlukan titik tekaan awal yang hampir dekat dengan titik optimum tetapi umumnya kita tidak mengetahui kedudukan titik optimum tersebut, sehingga tidak mudah menentukan titik tekaan awal.

Penghargaan

Kami merakamkan ribuan terima kasih kepada KUSTEM di atas sokongan dana untuk melaksanakan penyelidikan ini (IRPA: 55013).

Rujukan

[1] F. Archetti dan M. Cugiani, *Numerical Techniques for Stochastic System,* NorthHolland Publishing Company, 1980.

[2] Hamdy A. Taha, *Operation Research An Introduction,* USA: Prentice-Hall.Inc., 1997.

[3] http://www.eng.tau.ac.il/~liptser/lectures/lectnew10pdf, *Stochastic Ito Integral,* Wiener Process, Accessed on 27 June 2004.

[4] http://www.cs.sandia.gov/opt/survey/intro.html, *Lecturer Note: Introduction to Global Optimization,* Accessed on 22 June 2004.

[5] Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models,* Academic Press, Inc, San Diego, 1993.

[6] S. S. Rao, *Optimization Theory and Applications,* Wiley Eastern, 1984.

[7] J. D. Sheskin, *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures,* Chapman & Hall, London, 2000.