Matematika, 1994, Jilid. 10, bil. 2, hlm. 61–67


# KESTABILAN KAEDAH MULTILANGKAH DALAM PELAKSANAAN SECARA PRAKTIKAL MENGGUNAKAN LELARAN NEWTON

SAIMAN MAT BAOK, MOHAMMAD SULEIMAN & FUDZIAH ISMAIL
Jabatan Matematik
Universiti Pertanian Malaysia
Serdang, Selangor
Malaysia

**Abstrak.** Diketahui bahawa persamaan ralat yang terhasil apabila kaedah multi-langkah umum dengan lelaran titik tetap digunakan kepada PPB mempunyai satu polinomial cirian yang menggandingkan syarat penumpuan dan dan syarat kestabilan. Sebaliknya dalam pelaksanaan praktikal bagi kaedah FBB dengan lelaran Newton, polinomial cirian itu adalah semata-mata kerana syarat kestabilan.

## 1 PENGENALAN

Syarat kestabilan sesuatu kaedah itu adalah penentu kepada kaedah itu dipilih dalam menyelesaikan suatu masalah PPB (Persamaan Pembezaan Biasa). Misalnya kaedah yang dipilih untuk menyelesaikan suatu PPB kaku adalah yang mempunyai rantau kestabilan mutlak yang luas. Oleh sebab itu dalam kes ini kelas kaedah FBB yang diketahui mempunyai rantau kestabilannya meliputi hampir separuh kiri satah $h\lambda$ dengan $\lambda$ nilai eigen bagi Jakobian sistem itu adalah kaedah yang paling sesuai untuk dipilih.

Sebaliknya kelas kaedah Adams tidak sesuai untuk masalah kaku kerana rantau kestabilan mutlaknya yang terhad. Ini kerana untuk saiz langkah $h$ terus kekal berada dalam rantau kestabilan, umumnya melibatkan penggunaan kaedah yang berulang terlalu banyak kali untuk menyempurnakan kamiran. Sementara itu, untuk masalah tak kaku, didapati kaedah Adams yang mempunyai syarat kestabilan relatif yang baik dan ralat pangkasaan yang lebih kecil adalah paling sesuai.

Dalam perlaksanaan praktikal kaedah Adams, lelaran titik tetap digunakan. Ini kerana lelaran itu ringkas dan murah, walaupun syarat penumpuan ke atas saiz langkahnya terbatas, biar pun sebenarnya pembatasan penumpuan adalah sama peringkat sebagaimana disebabkan oleh kestabilan kadah Adams. Walau bagaimanapun dalam kes masalah tak kaku, pembatasan ke atas saiz langkah $h$ adalah kerana keperluan ketepatan selain daripada kestabilan atau lelaran. Namun demikian untuk masalah kaku, lelaran Newton yang kurang membatasi saiz panjang langkah itu dipilih dengan kaedah FBB.

Gear[1] menunjukkan bahawa dalam pelaksanaan praktikal sepenuhnya bagi kaedah multilangkah umum dengan menggunakan lelaran titik tetap, persamaan ralat yang terhasil mempunyai satu polinomial cirian yang menggandingkan kedua-dua syarat penumpuan akibat daripada menggunakan lelaran titik tetap dan syarat kestabilan. Walau bagaimanapun tiada terdapat dalam mana-mana hasil penulisan yang memberikan suatu analisis terhadap persamaan ralat apabila lelaran Newton digunakan dengan kaedah multilangkah atau lebih tepatnya FBB untuk penyelesaian bagi PPB kaku. Penggunaan lelaran Newton kepada kaedah FBB adalah didasarkan pada sifat-sifat yang diketahui, iaitu kaedah Newton disebabkan oleh sifat penumpuannya yang baik dan kaedah FBB kerana ciri kestabilan mutlaknya.

Dalam kertas kerja ini, kita akan dapati bahawa dalam pelaksanaan praktikal bagi kaedah FBB dengan lelaran Newton, polinomial cirian bagi persamaan ralat adalah semata-mata kerana polinomial kestabilan bagi kaedah FBB, tidak seperti lelaran titik tetap.

## 2 KESTABILAN MUTLAK

Pada lazimnya masalah PPB yang dipertimbangkan ialah

$$y' = f(x, y) = \lambda y, \quad y(a) = \eta \tag{1}$$

Andaikan (1) diselesaikan dengan kaedah $k$ langkah (iaitu satu daripada kaedah multilangkah).

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \tag{2}$$

Katakan $e_n = y(x_n) - y_n$ adalah ralat sejagat di titik $x_n$ maka persamaan ralat, Lambert [2], diberikan oleh

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j e_{n+j} = \bar{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j e_{n+j} + d_n \tag{3}$$

dengan $\bar{h} = h\lambda$, dan $d_n$ adalah ralat pangkasan setempat. Polinomial kestabilan bagi persamaan beza (3) diberikan oleh

$$\phi(\xi, \bar{h}) = \rho(\xi) - \bar{h}\sigma(\xi) \tag{4}$$

dengan $\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j, \quad \sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \xi^j$.

**Takrif :** Kaedah $k$ langkah di atas itu stabil mutlak untuk $\bar{h}$ yang diberi jika untuk $\bar{h}$ tersebut punca-punca $\xi_j$ bagi polinomial ciriannya menepati $|\xi_j| < 1, \ j = 1, \ldots, k$.

## 3 PELAKSANAAN PRAKTIKAL BAGI KAEDAH MULTILANGKAH

Pelaksanaan praktikal bagi kaedah multilangkah dalam (2) menggunakan rumus tak tersirat sebagai peramal dan rumus lelaran tersirat sebagai pembetul dalam apa yang dikenali sebagai mod $R(NB)^m$ dengan $m \in I$ dan $R$ adalah proses meramal, $B$ pembetulannya dan $N$ penilaian fungsi bagi (1). Untuk masalah tak kaku, kaedah Adams digunakan dengan lelaran titik tetap sementara untuk masalah kaku kaedah FBB digunakan dengan menggunakan lelaran Newton.

Gear[1] mempertimbangkan pelaksanaan (2) secara praktikal menggunakan lelaran titik tetap. Dalam pelaksanaan itu kaedah peramal-peramal diberikan oleh yang berikut:

$$\begin{aligned} \text{Peramal:} \quad & {}^{(0)}\mathbf{y}_n = B\mathbf{y}_{n-1} \\ \text{Pembetul:} \quad & {}^{(m+1)}\mathbf{y}_n = {}^{(m)}\mathbf{y}_n + cG({}^{(m)}\mathbf{y}_n) \end{aligned} \tag{5}$$

dengan

$$\mathbf{y}_n = [y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}, hy'_n, hy'_{n-1}, \ldots, hy'_{n-k+1}]$$

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_k & s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ 1 & 0 & & & & & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_k & v_1 & v_2 & \ldots & v_k \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$G(^m\mathbf{y}_n) = -(\mathbf{y}_n + hf(x_0, (y_n)_0)$$

dengan $(y_n)_i$ adalah komponen ke-$i$ bagi $\mathbf{y}_n$, dan c suatu vektor malar.

Jika nilai $\widetilde{\mathbf{y}}_n$ adalah nilai yang tepat kita dapati

$$^{(0)}\widetilde{\mathbf{y}}_{n,(0)} = B\mathbf{y}(t_{n-1})$$
$$^{(m+1)}\widetilde{\mathbf{y}}_n = {}^{(m)}\widetilde{\mathbf{y}}_n + \mathbf{c}G(^{(m)}\widetilde{\mathbf{y}}_n)$$

Maka ralat pangkasan setempat $d_n$, diberi sebagai

$$d_n = \widetilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}(t_n).$$

Katakan ralat sejagat, $\mathbf{e}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}(t_n)$. Maka boleh ditunjukkan bahawa

$$\mathbf{e}_n = S_n e_{n-1} + d_n$$
$$S_n = \prod_{i=0}^{n-1}(I + \mathbf{c}\frac{\partial G(\xi_j)}{\partial y})B$$

atau

$$\mathbf{e}_n = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{N} S_j d_i.$$

Kestabilan kaedah dalam (5) dikaitkan dengan nilai eigen bagi S . Gear[1] telah menunjukkan bahawa persamaan cirian untuk nilai eigen bagi S diberikan oleh

$$L(\rho^*(\xi) + h\lambda\sigma^*(\xi)) = 0$$

dengan

$$\rho^*(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^* \xi^{k-1},$$

$$\sigma^*(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i^* \xi^{k-1}$$

dan

$$L = \underset{m\to\infty}{\text{had}} L_m = 1 + \bar{h}\beta_0^* + \ldots + (\bar{h}\beta_0^*)^m.$$

Oleh itu untuk penumpuan bagi L didapati

$$|\bar{h}\beta_0^*| < 1 \tag{6}$$

iaitu syarat penumpuan bagi lelaran titik tetap. Juga $\rho(\xi) + \bar{h}\sigma(\xi)$ adalah polinomial kestabilan bagi kaedah multilangkah linear umum. Oleh itu, dalam pelaksanaan praktikal, kaedah multilangkah menggunakan lelaran titik tetap, kestabilan penyelesaian dibatasi oleh syarat penumpuan bagi lelaran dan syarat kestabilan bagi polinomial kestabilan.

Berikut kita buktikan bahawa dalam lelaran Newton untuk menyelesaikan masalah kaku menggunakan kaedah FBB, kestabilan dibatasi hanya oleh polinomial kestabilan bagi kaedah FBB.

## 4 PELAKSANAAN FBB

Kaedah FBB dalam mod RNBN diberikan sebagai

$$\begin{aligned}
\text{Peramal:}\quad & {}^{(0)}\mathbf{y}_n &&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{y}_{n+1-j} \\
& h^{(0)}y'_n &&= \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathbf{y}_{n+1-j} && (7)\\
\text{Pembetul:}\quad & {}^{(m+1)}\mathbf{y}_n &&= {}^{(m)}\mathbf{y}_n + {}^{(m)}\mathbf{e} \\
& h^{(m+1)}\mathbf{y}'_n &&= h^{(m)}\mathbf{y}'_n + \psi^{(m)}\mathbf{e} = f({}^{(m+1)}\mathbf{y}'_n) && (8)
\end{aligned}$$

Menyelesaikan (8) dengan menggunakan lelaran Newton, didapati

$$\begin{aligned}
(\psi - h\lambda)^{(m)}\mathbf{e} &= h(f({}^{(m)}\mathbf{y}_n) - h^{(m)}\mathbf{y}'_n \\
&= G_n
\end{aligned}$$

Oleh itu $\quad \mathbf{e} = A^{-1}G_n \quad$ dengan $\quad A = (\psi - \bar{h})$.

Dengan menulis semula (7) dalam bentuk matriks sebagaimana (5), didapati

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}\mathbf{y}_n &= By_{n-1} \\
{}^{(m+1)}\mathbf{y}_n &= A^{-1}\mathbf{c}G({}^{(m)}y_n)
\end{aligned}$$

dengan B seperti dalam (5) dengan kemasukan $u_i = v_i = 0, i = 1, \ldots, k$.

Dengan menggunakan hujah-hujah dalam Gear[1], didapati

$$^{(m+1)}\mathbf{e}_n = {}^{(m)}\mathbf{e}_n + \mathbf{c}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}}(\xi_n)^{(m)}\mathbf{e}_n$$

dengan $\xi_n$ berada antara ${}^{(m)}\mathbf{y}_n$ dan $\tilde{\mathbf{y}}_n$, atau

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}} = S_n \mathbf{e}_{n-1} + d_n c$$

dengan

$$S_n = \prod_{i=0}^{M-1}(1 + A^{-1}c\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}}(\xi_n))B$$

dan $M$ ialah lelaran pembetul iaitu bilangan lelaran sedemikian hingga $G({}^{(m)}\mathbf{y}_n)$ sifar hingga ketepatan yang dikehendaki.

Oleh itu

$$\mathbf{e}_n = \sum_{j=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n} S_j d_i$$

dengan $d_0$ itu ralat awal.

Perhatikan $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}} = [h\lambda, 0, \ldots, -1, 0, \ldots, 0]^T$ dengan unsur -1 berada pada kedudukan ke $(k+1)$.

Di sini, kita buat beberapa permudahan. Katakan $D = c\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}}$ dan $T = \psi A^{-1}$, didapati

$$D = T\begin{pmatrix} \frac{h\lambda}{\psi} & \ldots & -\frac{1}{\psi} & \ldots \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ h\lambda & \ldots & -1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$D^2 = T^2\begin{pmatrix} \frac{h\lambda}{\psi}(\frac{h\lambda}{\psi} - 1) & \ldots & -\frac{1}{\psi}(\frac{h\lambda}{\psi} - 1) & \ldots \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ h\lambda(\frac{h\lambda}{\psi} - 1) & \ldots & -(\frac{h\lambda}{\psi} - 1) & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

dan

$$D^n = T^n\begin{pmatrix} \frac{h\lambda}{\psi}(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1} & \ldots & -\frac{1}{\psi}(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1} & \ldots \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ h\lambda(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1} & \ldots & -(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Oleh itu

$$D^n = T^n(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1}\frac{D}{T} = T^{n-1}(\frac{h\lambda}{\psi} - 1)^{n-1}D$$

Tetapi $T = \psi A^{-1} = \frac{\psi}{\psi - \bar{h}}$. Oleh itu $T(\frac{\bar{h}}{\psi} - 1) = -1$.

Maka

$$D^n = (-1)^{n-1}D. \tag{9}$$

Menggunakan kembangan Binomial,

$$\begin{aligned}(1+D)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D^i. \quad \text{Di sini} \quad D^0 = I\\ &= I + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i-1}D\\ &= I + D.\end{aligned}$$

Maka

$$S_j = (I+D)^M B = (I+D)B$$

$$= \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & & \dots & l_k & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & & & & & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & & \dots & 0\\ m_1 & m_2 & & \dots & m_k & 0 & \dots & 0\\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$$l_i = \beta_i(1+\theta h\lambda) - \theta\beta_i^* = \beta_i(1+\frac{h\lambda}{\psi - h\lambda}) - \frac{\beta_i^*}{\psi - h\lambda} = \frac{\beta_i\psi - \beta_i^*}{\psi - h\lambda}$$

dan

$$m_i = \psi\theta h\lambda\beta_i - (1-\psi\theta)\beta_i^*.$$

$S_j$ mempunyai sebanyak $k$ nilai eigensifar dan selebihnya nilai eigen bagi bahagian atas sebelah kiri matriks $S_j$. Tetapi bahagian atas sebelah kiri matriks $S_j$ adalah suatu matriks rakan.

$$\widehat{S}_j = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & & & \dots & l_k\\ 1 & 0 & & & & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Oleh itu polinomial cirian bagi $\widehat{S}_j$ ialah

$$
\begin{aligned}
\chi_{\hat{S}} &= \det(\widehat{S}_j - \xi I) \\
&= (-1)^k(\xi^k - l_1\xi^{k-1} - l_2\xi^{k-2} - \ldots - l_k) \\
&= (-1)^k(\xi^k - \frac{1}{\psi - h\lambda}\sum_{i=1}^{k}(\beta_i\psi - \beta_i^*)\xi^{k-i}) \\
&= \frac{(-1)^k}{\psi - h\lambda}(-h\lambda\xi^k + \psi\xi^k + \sum_{i=1}^{k}(\beta_i^* - \beta_i\psi)\xi^{k-i}) \\
&= \frac{(-1)^k}{\psi - h\lambda}(-h\lambda\xi^k + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^*\xi^{k-i})
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^* &= \psi \\
\alpha_i^* &= \beta_i^* - \beta_i\psi = \frac{(-1)^k}{\psi - h\lambda}(-h\lambda\sigma(\xi) + \rho\xi)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\sigma(\xi) &= \xi^k \\
\rho(\xi) &= \sum_{i=0}^{k}\alpha_i^*\xi^{k-i}.
\end{aligned}
$$

Oleh kerana $Re(\lambda) < 0$, dan $\psi > 0$, maka $\psi - h\lambda \neq 0$. Jadi nilaieigen bagi $S_j$ adalah sama seperti pensifar bagi $\pi(r,h) = \rho(\xi) - \bar{h}\sigma(\xi)$ sebagaimana yang dijangkakan, dengan kesan dari lelaran titik tetap ke atas ralat sejagat dibatalkan oleh penggunaan lelaran Newton. Justru itu implementasi praktikal kaedah FBB tidak mengekang rantau kestabilan mutlaknya.

## RUJUKAN


[1] C.W. Gear, *Numerical Initial Problems in Ordinary Differential Equations.*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1971.

[2] J.D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.