

Rekabentuk Bilah Kipas Menggunakan Persamaan Pembezaan Separa dengan Tiga Parameter Bentuk (*Propeller Blade Design Using Partial Differential Equations with Three Vector Valued Shape Parameters*)

¹Zainor Ridzuan Yahya & ²Jamaludin Md Ali

Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 Pulau Pinang, Malaysia
e-mail: ¹zainor_983@yahoo.com, ²jamaluma@cs.usm.my

Abstrak Permukaan Persamaan Pembezaan Separa (PPS) ditakrifkan sebagai suatu penyelesaian PPS mempunyai banyak kelebihan dalam permukaan adunan, permukaan bentuk bebas dan sebagainya. Dalam kertas ini, kita akan mengkaji rekabentuk bilah kipas dengan tiga parameter bentuk. Kita akan mengkaji kesan perubahan parameter bentuk ini terhadap bentuk bilah kipas yang dijanakan. Penyelesaian terhadap PPS berdarjah empat akan dijalankan secara analitis bagi mengambil kira prestasi perkakasan.

Katakunci Persamaan pembezaan separa, rekabentuk bilah kipas, tiga parameter bentuk.

Abstract Partial differential equation (PDE) surface which is defined as a solution of a PDE has many advantages in surface blending, generation of free-form surfaces and others. In this paper, we will investigate the designing of a blade with three vector valued shape parameters. We will investigate the effect of shape parameter's change with respect to the shape of the blade used. The solution to a 4th order PDE is solved analytically with consideration of computational efficiency.

Keywords Partial differential equation, propeller blade design, three shape parameters

1 Pengenalan

Dalam Rekabentuk Dibantu Komputer (RBK) dan Rekabentuk Geometri Dibantu Komputer (RGBK), kita telah biasa dengan penjana permukaan melalui kaedah tradisional seperti Bezier, Splin-B, Nurbs dan sebagainya. Semenjak 1989, Bloor dan Wilson [1] telah memperkenalkan suatu kaedah berbeza, permukaan persamaan pembezaan separa (PPS), yang ditakrifkan sebagai permukaan licin hasil penyelesaian suatu PPS berbentuk eliptik. Bloor dan Wilson kemudian menggunakan persamaan pembezaan separa untuk menghasilkan permukaan bentuk bebas [2]. Kemudian, lebih banyak kajian dijalankan berkenaan penggunaan PPS dalam rekabentuk permukaan. Baini dan Jamaludin menjana pasu eliptik dengan menggunakan PPS berdarjah empat [3]. Chen [4] menggunakan kaedah beza

terhingga untuk menyelesaikan PPS berdarjah empat dan menggunakan penyelesaian tersebut dalam permukaan adunan suatu permukaan kuadrik. Monterde dan Ugail memperkenalkan satu kaedah untuk menjana permukaan Bezier dari syarat sempadan berdasarkan PPS berdarjah empat[5]. Jian J. Zhang dan Lihua You [6] memperkenalkan kaedah yang mampu mencapai keselajaran kelengkungan berdasarkan penggunaan PPS. Permukaan adunan dijana sebagai penyelesaian suatu PPS berdarjah enam dengan satu vektor pelicin. Sebagai tambahan, L. H. You, P. Comminos dan Jian J. Zhang menggunakan PPS berdarjah enam untuk menyelesaikan masalah permukaan adunan berkeselajaran C2 [7]. C. W. Dekanski, M. I. G. Bloor dan M. J. Wilson telah menggunakan PPS berdarjah empat untuk menjana bilah kipas sebagai penyelesaian suatu masalah nilai sempadan[9]. Jian J. Zhang dan L. H. You [8] menggunakan PPS berdarjah empat dengan tiga parameter bentuk dan satu fungsi daya untuk menjana pasu sebagai permukaan bentuk bebas. Berdasarkan kajian-kajian ini, dalam Bahagian 2, kita akan membincangkan penyelesaian PPS berdarjah empat dengan tiga parameter bentuk. Seterusnya, pada Bahagian 3, rekabentuk bilah kipas dengan penyelesaian seperti Bahagian 2 akan dibincangkan. Kemudian, kesan perubahan nilai pada parameter bentuk itu akan dikaji pada Bahagian 4. Kesimpulan akan dibuat pada Bahagian 5.

2 Persamaan Pembezaan Separa (PPS) dan Penyelesaian Tertutupnya

Penyelesaian pelbagai masalah PPS akan menghasilkan pelbagai permukaan. Namun, PPS dengan darjah yang berbeza memberikan kesan terhadap kecekapan komputer dan kemampuan untuk menjana permukaan. Dalam kajian yang dijalankan oleh L.H. You dan J. J. Zhang [11], permukaan PPS dijana menggunakan PPS berdarjah dua, berdarjah empat dan gabungan dua PPS yang berbeza darjahnya. Didapati bahawa semakin tinggi darjah PPS yang dicari, semakin sukar untuk menyelesaikan persamaan tersebut secara analitikal. Dengan mengambil kira perkara tersebut, kajian untuk menjana bilah kipas ini menggunakan PPS berdarjah empat. Dalam bentuk vektor, PPS berdarjah empat dengan tiga vektor parameter bentuk boleh digambarkan seperti berikut

$$\left(b \frac{\partial^4}{\partial u^4} + c \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2} + d \frac{\partial^4}{\partial v^4}\right) X(u, v) = p(u, v) \quad (1)$$

yang mana $X = X(u, v)$ mewakili permukaan yang terjana, $b = [b_x b_y b_z]^T$, $c = [c_x c_y c_z]^T$ dan $d = [d_x d_y d_z]^T$ sebagai tiga vektor parameter bentuk bernilai vektor, u dan v sebagai parameter permukaan, dan $p(u, v)$ sebagai vektor fungsi daya. Namun, dalam kajian ini, kita hanya akan mengkaji kesan perubahan parameter bentuk terhadap permukaan yang dijana, oleh itu kita nilaikan $p(u, v) = 0$ pada sepanjang kajian ini.

Syarat-syarat sempadan boleh digambarkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} X(u_0, v) &= g_1(v), \\ X(u_1, v) &= g_2(v), \\ X_u(u_0, v) &= g_3(v), \\ X_u(u_1, v) &= g_4(v), \end{aligned} \quad (2)$$

yang mana $g_i(v)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) ialah fungsi-fungsi pada kalaan v .

PPS berdarjah empat pada persamaan (1) dengan syarat-syarat sempadan (2) boleh diselesaikan menggunakan kaedah siri kuasa [12], atau kaedah pengiraan berangka seperti kaedah elemen terhingga [13] dan kaedah sisa berpemberat (weighted residual method). Dalam kajian ini, penyelesaian tertutup (penyelesaian analitikal) akan digunakan.

Memandangkan syarat-syarat sempadan fungsian suatu bilah kipas boleh digambarkan dengan lengkung 3D tertutup, fungsi-fungsi berkala adalah pilihan terbaik. Sehubungan dengan itu, penyelesaian bagi persamaan (1) dengan syarat-syarat sempadan (2) boleh diambil sebagai fungsi-fungsi yang berkala pada v . Diketahui bahawa pembezaan kedua dan keempat suatu fungsi berkala boleh diformulasikan sebagai fungsi-fungsi asal didarab dengan suatu pemalar, kita akan dapat membentuk penyelesaian tertutup yang homogenus seperti berikut, yang menggambarkan bentuk analitikal suatu bilah kipas :

$$X(u, v) = B_0(u) + \sum_{m=1}^M B_m(u) f_m(v), \quad (3)$$

yang mana $f_m(v)$ mengandungi fungsi-fungsi asas untuk syarat-syarat sempadan pada (2) dan

$$B_0(u) = b_{00} + b_{01}u + b_{02}u^2 + b_{03}u^3, \quad (4)$$

yang mana b_{0k} , ($k = 0, \dots, 3$) merupakan pemalar dan m merujuk kepada bilangan fungsi-fungsi asas yang terdapat pada syarat-syarat sempadan. Bergantung kepada kombinasi parameter-parameter bernilai vektor dalam persamaan (1), $B_m(u)$ mempunyai dua bentuk yang berbeza iaitu apabila $4b_x d_x < c_x^2$, $4b_y d_y < c_y^2$ dan $4b_z d_z < c_z^2$,

$$B_m(u) = B_{m1}e^{t_{m1}u} + B_{m2}e^{t_{m2}u} + B_{m3}e^{t_{m3}u} + B_{m4}e^{t_{m4}u} \quad (5)$$

dengan nilai $t_{m,1-4}$:

$$t_{m,1-4} = \pm a_m \sqrt{\frac{c_x}{2b_x} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_x d_x}{c_x^2}} \right]}, \quad (m = 1, \dots, 4), \quad (6)$$

dan apabila $4b_x d_x = c_x^2$, $4b_y d_y = c_y^2$ dan $4b_z d_z = c_z^2$,

$$B_m(u) = (B_{m1} + B_{m2}u)e^{t_{m1}u} + (B_{m3} + B_{m4}u)e^{t_{m2}u} \quad (7)$$

dengan nilai $t_{m,1-2}$:

$$t_{m,1-2} = \pm a_m \sqrt{\frac{c_x}{2b_x}}, \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (8)$$

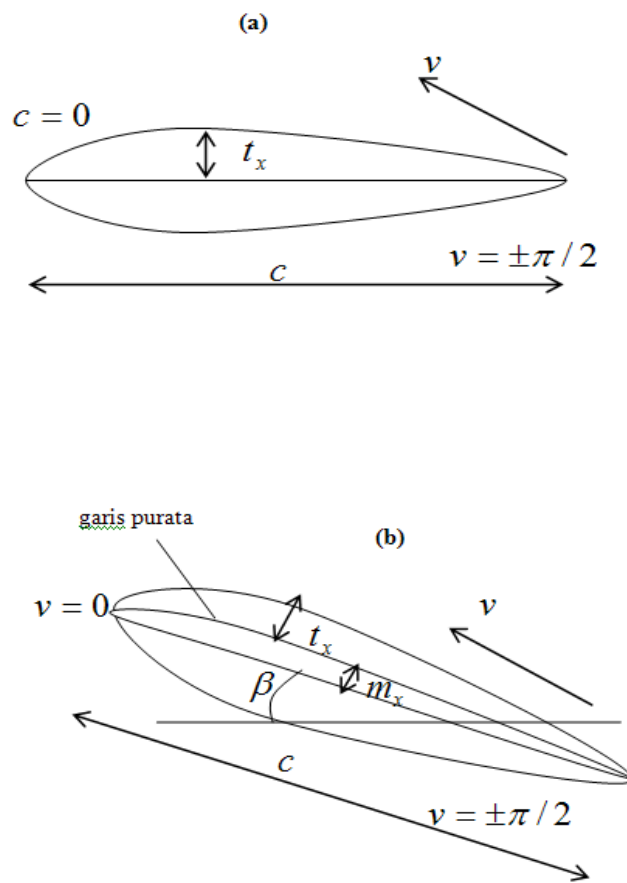
yang mana B_{mi} , ($i = 1, \dots, 4$) adalah pemalar, dan t_{mi} , ($m = 1, 2, \dots, M$; $i = 1, 2, 3, 4$) dapat dicari dengan menggunakan parameter-parameter bernilai vektor dalam persamaan (1) dan syarat-syarat sempadan (2).

Apabila $4b_x d_x > c_x^2$, $4b_y d_y > c_y^2$ dan $4b_z d_z > c_z^2$, penyelesaian tertutup untuk persamaan (1) tidak wujud kerana punca kuasa dua suatu nilai tak nyata akan terlibat. Untuk perkara ini, kaedah berangka mesti digunakan untuk mendapat penyelesaian anggaran. Memandangkan keberkesanan komputer penting bagi aplikasi grafik komputer, kita akan memberi tumpuan pada penyelesaian analitikal. Dalam kajian ini, kita akan mengubah nilai b, c dan d pada persamaan (1) dan melihat kesan perubahan nilai tersebut terhadap permukaan yang terjana.

3 Rekabentuk Bilah Kipas

Kaedah Persamaan Pembezaan Separa (PPS) menjana permukaan dengan menyelesaikan masalah nilai sempadan PPS tersebut. Sehubungan dengan itu, untuk membentuk sebarang bilah kipas sebagai satu permukaan tertutup, kita perlu memilih syarat-syarat sempadan yang sesuai pada $u = 0$ dan $u = 1$. Sempadan tersebut mewakili tapak dan hujung bilah kipas tersebut.

Geometri bilah kipas biasanya disediakan sebagai data dua dimensi dalam bentuk seksyen-seksyen sayap dalam satu ruangan disepanjang bilah kipas, yang berputar bagi menyediakan kuasa anjakan pada setiap seksyen bilah. Seksyen-seksyen sayap inilah yang dipilih untuk memberikan kuasa hidrodinamik pada bilah tersebut.



Rajah 1: Profil Bilah Kipas

Dapat dilihat bahawa untuk menjana permukaan bilah kipas, adalah munasabah untuk menakrif suatu bahagian asas airfoil sebagai syarat sempadan pada satu hujung pada tam-

palan permukaan PPS, dan memilih penjuru pada hujung yang lagi satu. Untuk menggambarkan keadaan tersebut, kita boleh menggunakan profil asas [9]:

$$\begin{aligned} x &= c \cos v \\ y &= t_x \sin 2v \end{aligned} \quad (9)$$

yang berada dalam selang $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, yang mana c mewakili panjang keratan rentas dan t_x mewakili ketebalan maksimum. Bagi persamaan asas ini, putaran (β) dan ketebalan tengah (m_x) ditambah, bermakna syarat sempadan pada $u = 1$ adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned} x(1, v) &= (c \cos \beta + m_x \sin \beta) \cos v + t_x \sin \beta \sin 2v - \frac{m_x}{2} (\cos 2v + 1) \sin \beta \\ y(1, v) &= t_x \cos \beta \sin 2v + (m_x \cos \beta - c \sin \beta) \cos v - \frac{m_x}{2} (\cos 2v + 1) \sin \beta \\ z(1, v) &= r_h \end{aligned} \quad (10)$$

yang mana r_h mewakili jejari pada tengah hab. Syarat-syarat sempadan pada $u = 0$, iaitu pada penjuru kipas adalah seperti berikut:

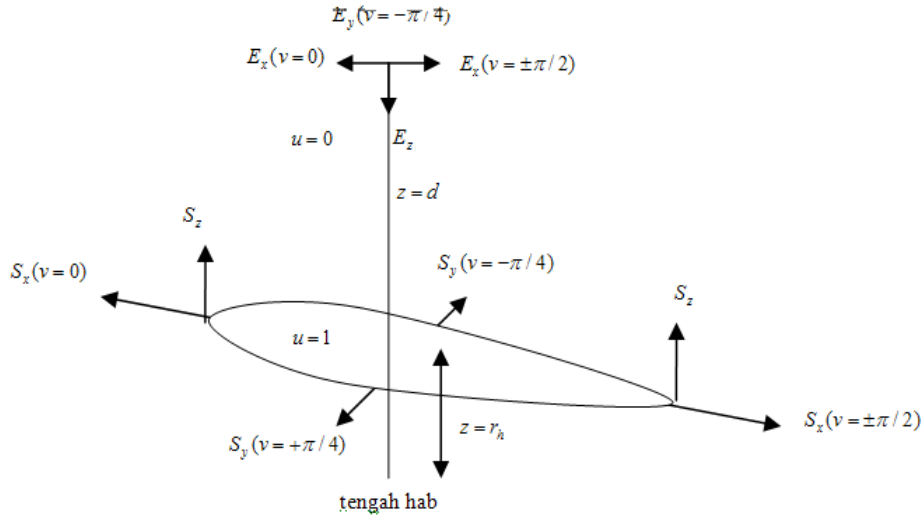
$$\begin{aligned} x(0, v) &= f \\ y(0, v) &= 0 \\ z(0, v) &= d \end{aligned} \quad (11)$$

yang mana f mewakili pencongan pada penjuru bilah dan d sebagai jejari bilah kipas tersebut. Rajah 1(a) dan (b) serta Rajah 2 menggambarkan syarat-syarat sempadan tersebut. Memandangkan kita menyelesaikan PPS berdarjah empat, maka kita perlu menggunakan syarat sempadan tangen(pembezaan pertama), ataupun $X_u(u, v)$ untuk mencari penyelesaian.

Jadual 1: Nilai-Nilai Parameter Bagi Bilah Kipas

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
b_x	1.0	b_y	1.0	b_z	1.0
c_x	2.0	c_y	2.0	c_z	2.0
d_x	1.0	d_y	1.0	d_z	1.0
S_x	10.0	S_y	0.3	S_z	0.0
E_x	0.6	E_y	0.2	E_z	1.6
r_h	0.8	d	4.0	m_x	0.2
c	0.75	t_x	0.15	β	1.6
		f	0.5		

Perubahan pada syarat sempadan tangen ini memberikan perubahan yang besar terhadap permukaan yang dijana. Sehubungan dengan itu, kita boleh mengawal profil bilah



Rajah 2: Syarat Sempadan

dengan menakrif syarat-syarat sempadan seperti berikut:

$$\begin{aligned} x_u(0, v) &= S_x \cos 2v \\ y_u(0, v) &= S_y \sin 2v \\ z_u(0, v) &= S_z \end{aligned} \quad (12)$$

pada bahagian penjuru, dan

$$\begin{aligned} x_u(1, v) &= E_x \cos 2v \\ y_u(1, v) &= E_y \sin 2v \\ z_u(1, v) &= E_z \end{aligned} \quad (13)$$

pada bahagian tapak yang mana S_x, S_y, S_z, E_x, E_y dan E_z merupakan parameter-parameter yang nilainya dipilih supaya bilah yang terhasil sesuai untuk diparameterkan dalam kalaan v .

Untuk memastikan tidak wujud kesingularan pada penjuru bilah, kita memilih $E_z = 0$, supaya pembezaan x dan y bertemu dengan licin pada penjuru bilah. Penyelesaian analitis bagi persamaan (1) boleh dicari. Untuk ini, penyelesaian boleh dicari dalam bentuk persamaan (3) dengan fungsi-fungsi asas seperti (4), (5) dan (6) dan $a_{n1}, \dots, b_{n4}$ adalah konstan nilai vektor yang boleh dicari dengan perbandingan terhadap syarat-syarat sempadan pada sempadan $u = 0$ dan $u = 1$. Maka, permukaan yang terhasil bagi menjana bilah kipas ialah

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u) + X_1(u) \cos v + X_2(u) \cos 2v + X_3(u) \sin 2v \\ y(u, v) &= y(u) + Y_1(u) \cos v + Y_2(u) \cos 2v + Y_3(u) \sin 2v \\ z(u, v) &= z(u) \end{aligned} \quad (14)$$

yang mana $x(u), y(u)$ dan $z(u)$ dalam bentuk persamaan (4) manakala

$$X_1(u), X_2(u), X_3(u), Y_1(u), Y_2(u) \text{ dan } Y_3(u)$$

dan merupakan dalam bentuk persamaan (5) atau (7). Dengan meletakkan nilai-nilai pemalar seperti yang terdapat pada Jadual 1, maka Rajah 3 hingga Rajah 5 akan terhasil.

4 Kesan Perubahan Parameter Bentuk

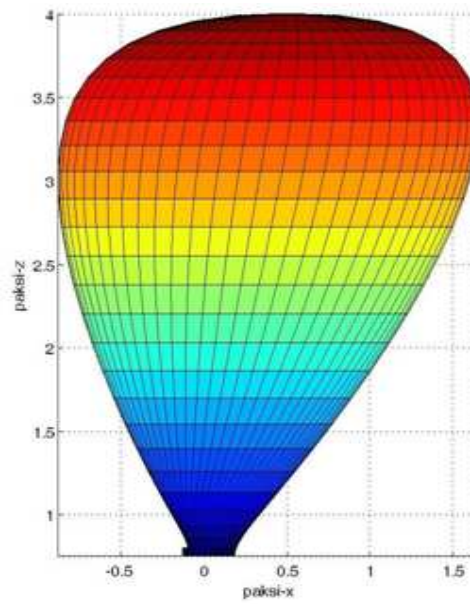
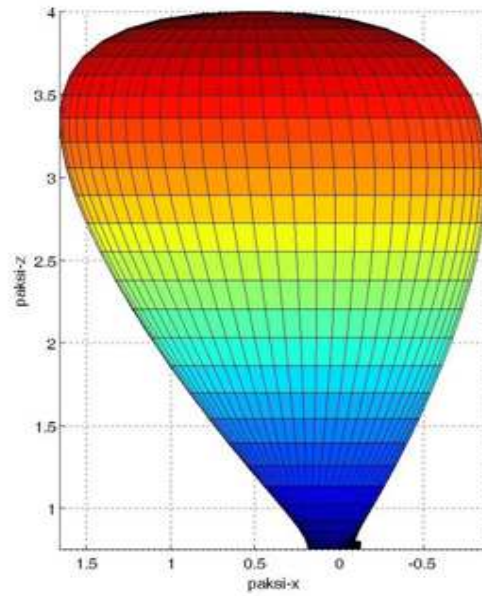
Dalam bahagian ini, kita akan mengkaji kesan perubahan parameter bentuk dalam PPS berdarjah empat yang digunakan pada persamaan (1) terhadap bilah kipas yang dijana. Dalam contoh-contoh yang diberikan, kita akan menggunakan syarat-syarat sempadan yang sama seperti (10), (11), (12) dan (13), dan kita memilih nilai parameter yang sama seperti Jadual 1. Jika kita mengubah nilai parameter bentuk b , c dan d kepada seperti dalam Jadual 2, maka Rajah 5(a) hingga 5(f) akan terhasil. Adalah jelas diketahui melalui gambarajah-gambarajah yang terjana bahawa perubahan parameter bentuk memberikan perubahan yang besar terhadap geometri gambarajah yang terjana. Juga diketahui bahawa boleh bagi kita memilih kombinasi parameter bentuk untuk menjana bentuk bilah kipas yang diinginkan.

Jadual 2: Nilai Nilai Parameter Bentuk Bagi Bilah Kipas

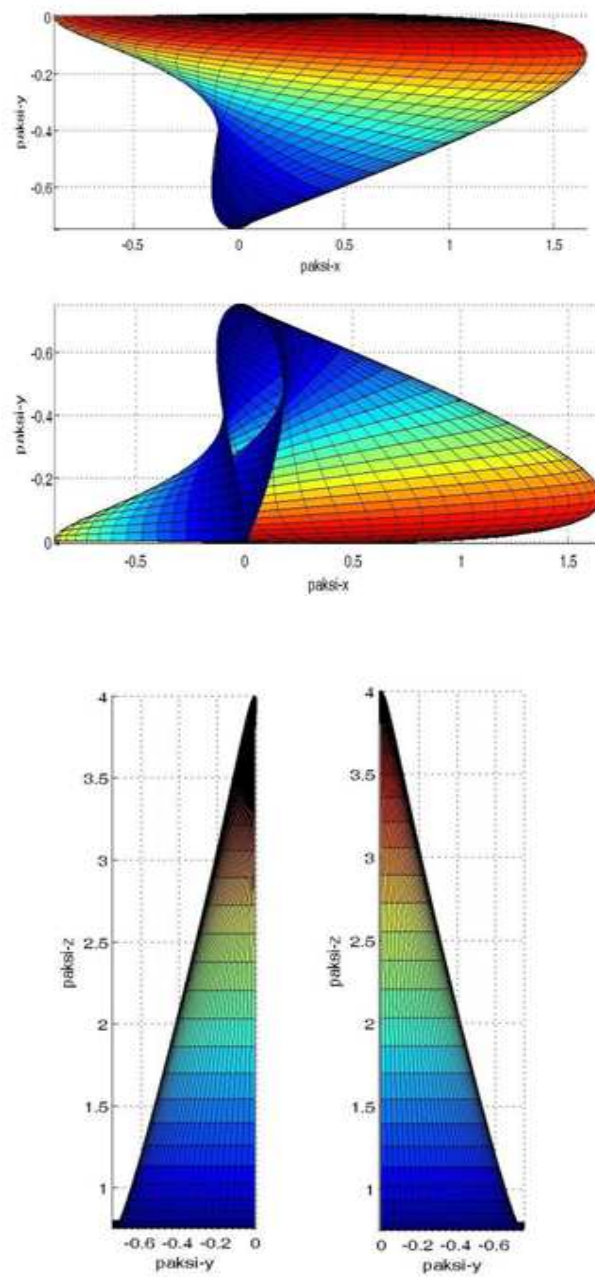
No Kes	No Gambarajah	b_x	c_x	d_x	b_y	c_y	d_y
1	5(a)	1	4	1	1	4	1
2	5(b)	1	10	1	1	10	1
3	5(c)	1	6	1	1	6	1
4	5(d)	1	30	150	1	30	150
5	5(e)	1	20	80	1	20	80
6	5(f)	1	30	200	1	30	200

5 Kesimpulan

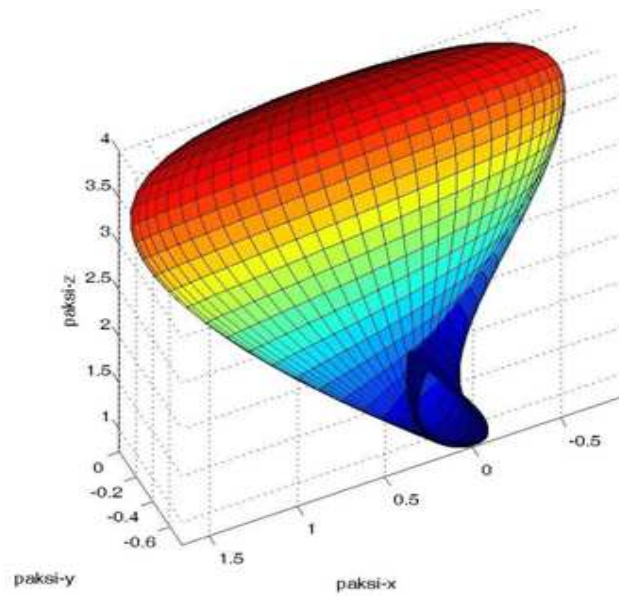
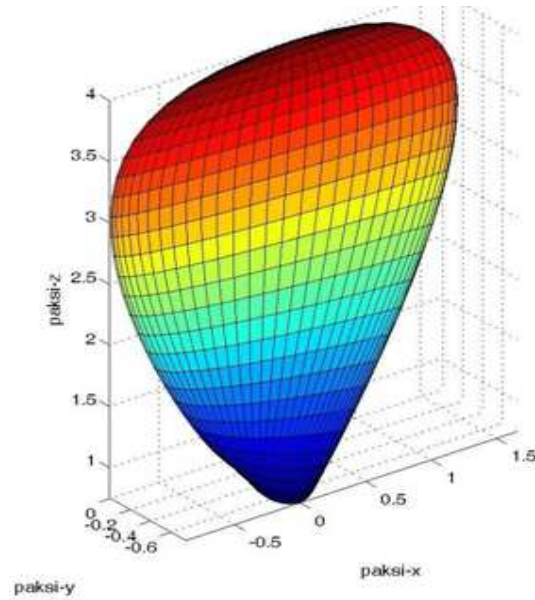
Bilah kipas adalah salah satu daripada permukaan bentuk bebas. Kipas yang mempunyai beberapa bilah kipas boleh dijana dengan melibatkan pengadunan dengan hab. Kaedah PPS ini membentuk bilah kipas dengan memilih syarat sempadan dan syarat tangen yang sesuai. Untuk memodelkan permukaan bilah kipas dengan mudah dan efisien, dalam kertas ini, kita menggunakan PPS berdarjah empat dengan tiga vektor parameter bentuk. Memandangkan PPS yang digunakan mempunyai tiga vektor parameter bentuk, maka PPS ini lebih baik berbanding kaedah menjana permukaan dalam rujukan-rujukan yang lain. Kajian berkenaan penggunaan fungsi daya masih dijalankan, maka kajian tidak dapat dibentangkan dalam kertas ini. Kita telah mengetahui bahawa tiga parameter bentuk itu memberikan perubahan yang besar terhadap bentuk bilah kipas, maka kajian terhadap vektor parameter ini dijalankan. PPS boleh digunakan untuk menjana permukaan berbanding kaedah konvensional lain. Sehubungan dengan itu, dapat diketahui bahawa PPS bukan sahaja mampu digunakan dalam penyelesaian masalah berasaskan fizik malah dapat digunakan untuk menjana permukaan. Diharapkan melalui kajian ini, kita bukan setakat mampu merekabentuk permukaan kipas tersebut bahkan dapat mengetahui kelajuan kipas berdasarkan bentuk kipas tersebut.



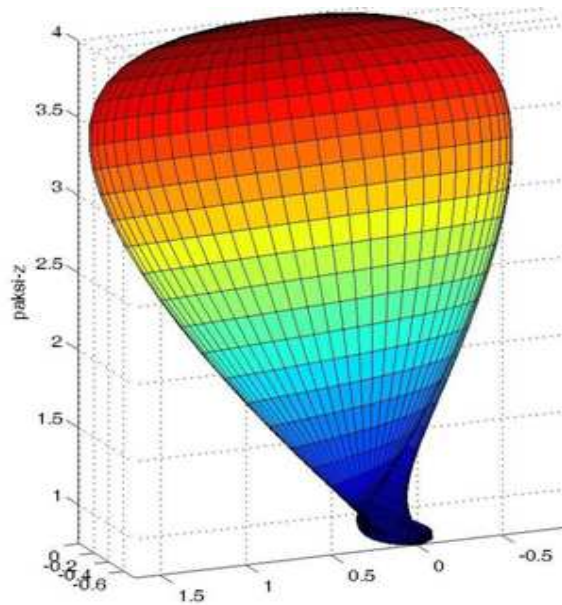
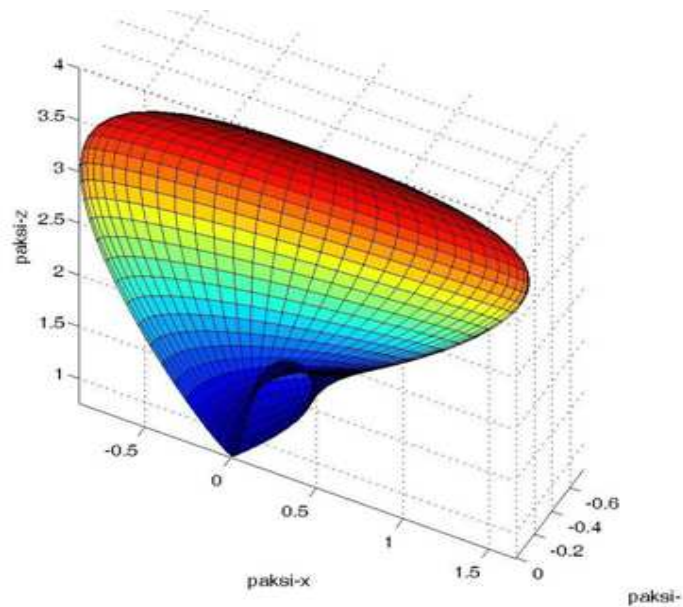
Rajah 3: Bentuk Bilah Kipas dari Berlainan Sisi



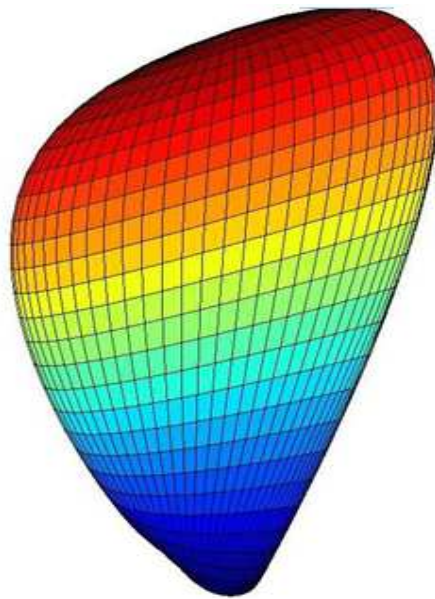
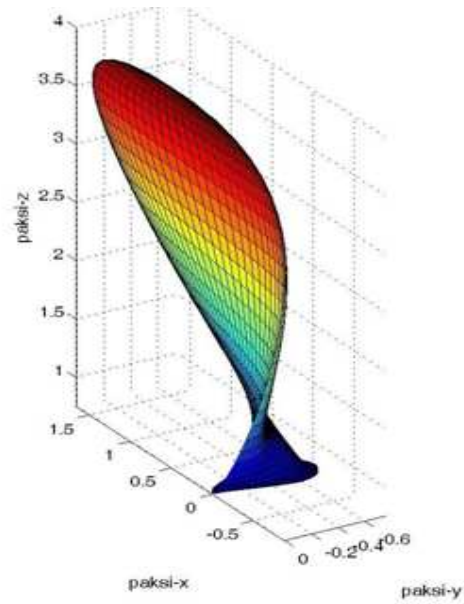
Rajah 3: Bentuk Bilah Kipas dari Berlainan Sisi (Sambungan)



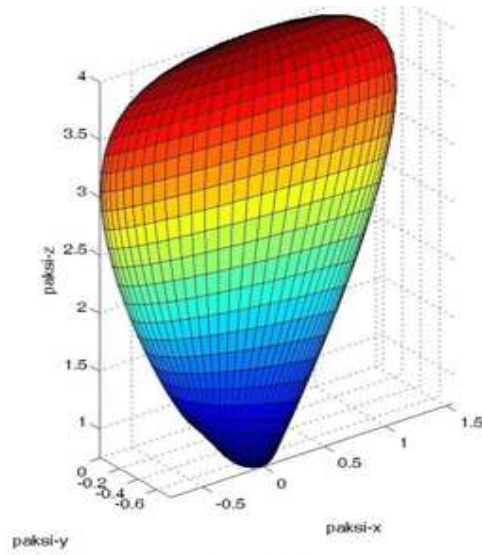
Rajah 4: Bentuk Bilah Kipas dari Pelbagai Sudut



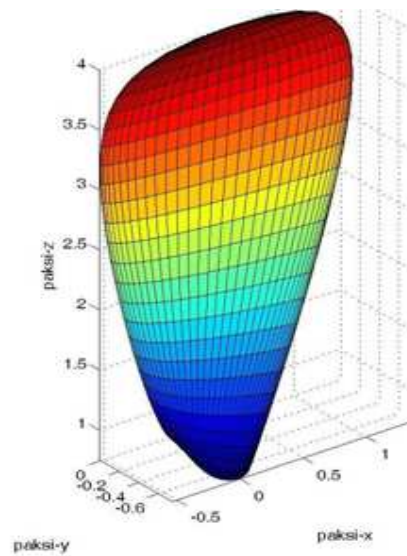
Rajah 4: Bentuk Bilah Kipas dari Pelbagai Sudut (Sambungan)



Rajah 4: Bentuk Bilah Kipas dari Pelbagai Sudut (Sambungan)

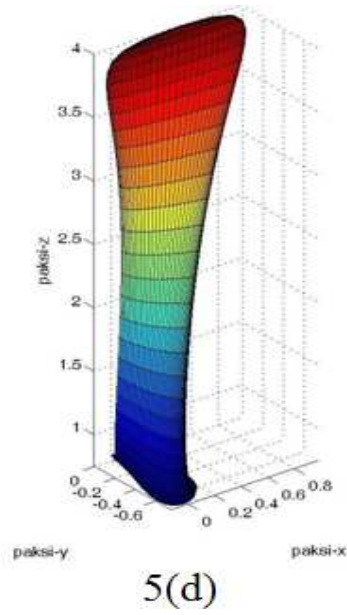
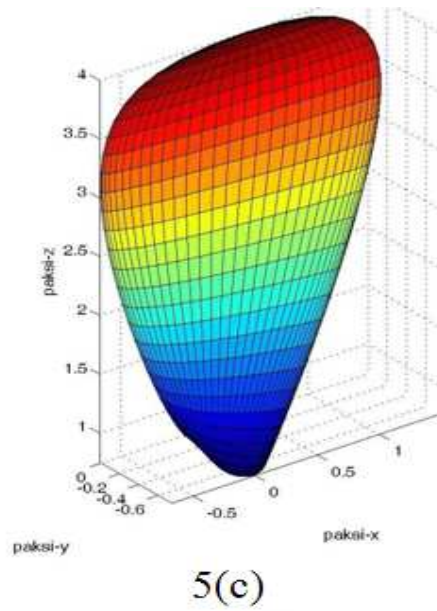


5(a)

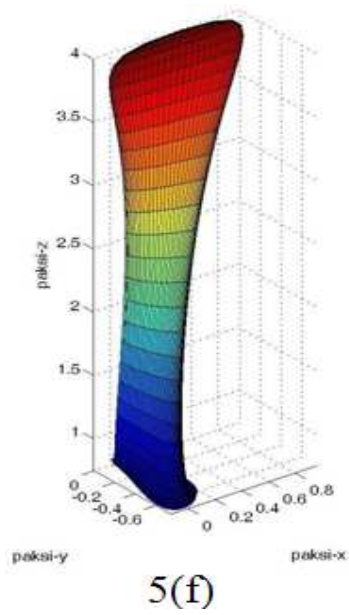
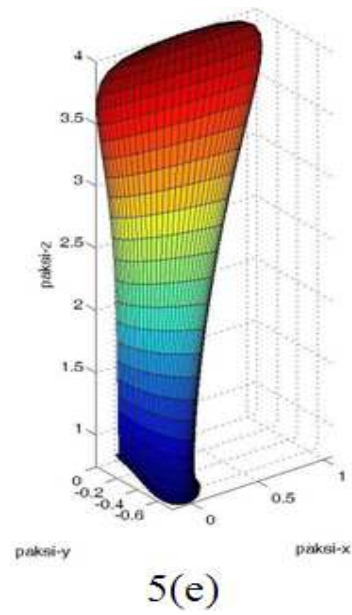


5(b)

Rajah 5: Bentuk Bilah Kipas Menurut Jadual 2



Rajah 5: Bentuk Bilah Kipas Menurut Jadual 2 (Sambungan)



Rajah 5: Bentuk Bilah Kipas Menurut Jadual 2 (Sambungan)

Penghargaan

Penyelidikan ini dibiayai oleh Geran Jangka Pendek USM kod 304/PMATHS/637057 dan dibawah Skim Biasiswa Pasca Siswazah USM.

Rujukan

- [1] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Generating blend surfaces using partial differential equations*, Comput. Aided Des. 21(3), 1989, 165-171.
- [2] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Using Partial Differential Equations to Generate Free-Form Surfaces*, Comput. Aided Des. 22(3), 1990, 202-212.
- [3] Nur Baini Ismail & Jamaludin Md Ali, *Penjanaan Bentuk Pasu Menggunakan Persamaan Pembezaan Separa*, MATEMATIKA, 20(2004), 133-140.
- [4] S.Y. Cheng, M.I.G. Bloor, A. Saia, & M.J. Wilson, *Blending between quadric surfaces using partial differential equations*, in Ravani, B. (Ed.), *Advances in Design Automation*, Vol. 1, Computer and Computational Design, ASME, 1990, 257-263.
- [5] J. Monterde & H. Ugail, *A general 4th-order PDE method to generate Bezier surfaces from the boundary*, Computer Aided Geometric Design. 23(2006), 208-225.
- [6] Jian J. Zhang & Lihua You, *Analytical C2 smooth blending surfaces*, Future Generation Computer Systems, 20(2004), 1317-1326.
- [7] L. H. You, P. Comninou & Jian J. Zhang, *PDE Blending surfaces with C2 continuity*, Computer & Graphics. 28(2004), 895-906.
- [8] Jian J Zhang & Lihua You, *PDE based surface representation-vase design*, Computer & Graphics. 26(2002), 89-98.
- [9] C W Dekanski, M I G Bloor & M. J. Wilson, *The Generation of Propeller Blade Geometries Using the PDE Method*, Journal of Ship Research, Vol. 39, No. 2, June 1995, 108-116
- [10] Sebastian Kubiesa, Hassan Ugail & Micheal Wilson, *Interactive Design using Higher order PDEs*, The Visual Computer, 20(2004), 682-693.
- [11] Jian J Zhang & L. H. You, *Surface representation using second, fourth and mixed order partial differential equations*, International Conference on Shape Modeling and Applications, Genova, Italy, 5-7 May, 2001.
- [12] L.H. You & J.J. Zhang, *Elastic-plastic stresses in a rotating solid disk*, International Journal of Mechanical sciences 1999; 41 : 269 82.
- [13] M.J. Brown, M.I.G. Bloor, M.S. Wilson & M.J. Wilson, *Generated and Modification of non-uniform B-spline surface approximations to PDE surfaces using the finite element method*, Advances in Design Automation 1990:1:265 72.