MATEMATIKA, 2008, Volume 24, Number 2, 159–168

Interpolasi Data Tersebar Yang Mengekalkan Kepositifan Menggunakan Tampalan Segi Tiga Ball

(Positivity Preserving Scattered Data Interpolation Using Ball Triangular Patches)

[1]**Siti Jasmida Jamil** & [2]**Abd. Rahni Mt. Piah**
[1]Institut Matematik Kejuruteraan , Universiti Malaysia Perlis, 01000 Jejawi, Perlis
[2]Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM Pulau Pinang
e-mail: [1]jasmida@unimap.edu.my, [2]arahni@cs.usm.my

Abstrak Pembinaan satu penginterpolasi C^1 pada data tersebar dipertimbangkan dalam kertas kerja ini dengan penginterpolasinya adalah positif di mana-mana saja jika data asalnya positif. Kajian ini didorong oleh kerja pengarang kedua yang terdahulu, Piah et al. [8] yang telah menghasilkan syarat cukup pada titik Bézier untuk memastikan permukaan yang mengandungi tampalan segi tiga Bézier kubik adalah sentiasa positif. Dalam kertas kerja ini, syarat mudah dan lebih kendur yang setara telah diterbitkan pada titik-titik Ball. Kecerunan pada tapak data seterusnya akan dikira bagi memastikan syarat-syarat kepositifan dipenuhi. Setiap tampalan segi tiga bagi permukaan interpolasi dibentuk sebagai gabungan cembung tiga tampalan segi tiga Ball kubik. Pembinaannya adalah setempat.

Katakunci Data tersebar; penyegitigaan; interpolasi; kepositifan; permukaan.

Abstract *The construction of a C^1 interpolant to scattered data is considered in this paper in which the interpolant is positive every where if the original data are positive. This work is motivated by an earlier work of the second author, Piah et al. [8] where sufficient conditions are derived on Bézier points to ensure that surfaces comprising cubic Bézier triangular patches are always positive. In this paper, the corresponding simpler and more relaxed conditions are derived on the Ball points. The gradients at the data sites are then calculated to ensure that these positivity conditions are satisfied. Each triangular patch of the interpolating surfaces is formed as a convex combination of three cubic Ball triangular patches. Its construction is local.*

Keywords *Scattered data; triangulation; interpolation; positivity; surface.*

1 Pengenalan

Kebelakangan ini, terdapat banyak makalah penyelidikan yang diterbitkan memberi fokus kepada interpolasi pengekalan bentuk lengkung dan permukaan. Sifat-sifat yang sering digunakan untuk mengira "bentuk" ialah kecembungan, keekanadaan (bagi data tak berparameter) dan kepositifan. Kertas kerja ini hanya mempertimbangkan sifat kepositifan iaitu jika semua data sampel adalah positif maka lengkung atau permukaan interpolasi yang dihasilkan juga perlulah positif di mana-mana tempat yang berkaitan.

Keperluan untuk mengekal kepositifan dapat dilihat dengan jelas penggunaannya dalam penampakkan saintifik. Penampakkan saintifik menyediakan cara untuk kita lebih memahami keadaan pelbagai fenomena fizikal daripada data yang terhad atau daripada maklumat yang tidak lengkap. Data yang diketahui mewakili hanya satu sampel dan mungkin tidak cukup untuk membolehkan seseorang menggambarkan keseluruhan entiti. Oleh itu, interpolasi boleh digunakan bagi membina model empirik yang sepadan dengan data sampel dan mencari hampiran kepada entiti yang tidak diketahui yang terletak pada lokasi dalaman sesuatu domain. Mengekalkan kepositifan adalah amat penting apabila hendak menampakkan entiti fizikal yang tidak mungkin negatif. Contoh yang digunakan dalam kertas kerja ini adalah menginterpolasi data jumlah taburan hujan dalam suatu tempoh. Pendekatan yang digunakan dalam kertas kerja ini adalah melakukan penyegitigaan pada titik-titik data dan pembinaan cebis demi cebis permukaan seperti di dalam kajian Piah et al. [8], Chan & Ong [1], Saaban et al. [11], Piah et al. [9], Kong et al. [7] dan Saaban et al. [10].

Masalah yang dipertimbangkan dalam kertas kerja ini ialah masalah interpolasi data tersebar. Kertas kerja ini berpandukan kepada kajian Piah et al. [8] dan Chan & Ong [1], yang telah mengemukakan kaedah pembinaan permukaan tak berparameter C^1 daripada tiga tampalan segi tiga Bézier kubik. Perbezaannya dengan kaedah Piah et al. [8] dan Chan & Ong [1] ialah dari segi pembentukan setiap tampalan segi tiga permukaan interpolasi. Dalam kertas kerja ini, setiap tampalan adalah gabungan cembung tiga tampalan segi tiga Ball dan tidak segi tiga Bézier. Nilai awal ordinat dalaman Ball untuk setiap segi tiga dikira dengan menggunakan kaedah kejituan kubik.

Dalam kertas kerja ini, kita menyatakan masalah seperti berikut: Diberi data fungsian

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, ..., N, \quad \text{dengan} \quad z_i > 0 \ \forall \ i,$$

kita ingin membina permukaan C^1, $z = F(x, y)$ supaya $z_i = F(x_i, y_i)$, dengan $z_i > 0$.

Permukaan interpolasi dalam kertas kerja ini mengandungi tampalan segi tiga Ball kubik dengan syarat cukup diletakkan pada ordinat titik kawalan Ball dalam setiap segi tiga bagi menjamin pengekalan kepositifan permukaan. Hal ini akan diperincikan di dalam bahagian 2. Walau bagaimanapun, syarat yang diperoleh dalam bahagian 2 mempertimbangkan kes yang data asalnya adalah positif secara tegas. Skema bagi kes data positif umum disebut di penghujung bahagian 2.

Bahagian 3 menerangkan algoritma penjanaan permukaan dengan langkah-langkah yang dilakukan adalah seperti berikut:

(i) penyegitigaan domain;

(ii) penentuan terbitan separa pada titik-titik data;

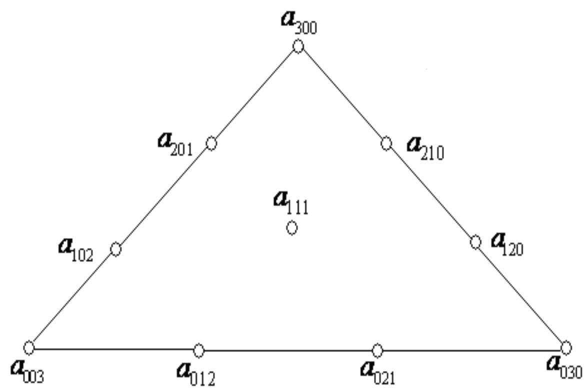
(iii) penentuan nilai ordinat Ball pada setiap tampalan segi tiga;

(iv) penjanaan tampalan segi tiga pada permukaan.

2 Syarat Kepositifan Cukup Tampalan Segi Tiga Ball Kubik

Pertimbangkan segi tiga T dengan setiap bucunya sebagai V_1, V_2, V_3, dan u, v, w sebagai koordinat baripusat. Sebarang titik V di atas segi tiga dapat ditakrif seperti berikut,

$$V = uV_1 + vV_2 + wV_3$$



Rajah 1: Lokasi Ordinat Ball $P(u,v,w)$ pada Segi Tiga T

dengan
$$u+v+w=1 \quad \text{dan} \quad u,v,w \geq 0.$$

Seperti yang dilakukan di dalam Wirza [12], tampalan segi tiga Ball kubik P pada segi tiga T boleh ditakrif sebagai

$$\begin{aligned} P(u,v,w) = u^2a_{300} + v^2a_{030} + w^2a_{003} + 2u^2va_{210} + 2u^2wa_{201} + 2v^2ua_{120} + 2v^2wa_{021} \\ +2w^2ua_{102} + 2w^2va_{012} + 6uvwa_{111} \qquad (1) \end{aligned}$$

dengan a_{rst} sebagai ordinat Ball P (lihat Rajah 1).

Andaikan ordinat Ball pada setiap bucu V_1, V_2, V_3 sentiasa positif secara tegas, iaitu $a_{300}, a_{030}, a_{003} > 0$. Kita perlu mendapatkan syarat kepositifan cukup untuk tampalan Ball bagi ordinat Ball yang lain. Biar $A = a_{300}, B = a_{030}, C = a_{003}$ dan $A, B, C > 0$. Kaedah yang ingin dikemukakan ialah mencari nilai minimum $F(A,B,C)$, supaya apabila semua ordinat Ball, selain dari $a_{300}, a_{030}, a_{003}$ mempunyai nilai $F(A,B,C)$, maka $P(u,v,w) = 0$. Selain titik kawalan Ball pada bucu, kita andaikan semua ordinat Ball yang lain mempunyai nilai yang sama iaitu $-t < 0$ (dengan $t > 0$). Dengan demikian, (1) menjadi

$$\begin{aligned} P(u,v,w) &= Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - t(2u^2v + 2u^2w + 2v^2u + 2v^2w + 2w^2u + 2w^2v + 6uvw) \\ &= Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - t(1 - u^2 - v^2 - w^2) \\ &= (A+t)u^2 + (B+t)v^2 + (C+t)w^2 - t. \qquad (2) \end{aligned}$$

Oleh kerana $A, B, C > 0$ dan $u, v, w \geq 0$, maka apabila $t = 0$,

$$P(u,v,w) = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 \geq 0.$$

Jika t bertambah, $P(u,v,w)$ akan berkurang. Kita berminat untuk mencari nilai t pada nilai minimum $P(u,v,w) = 0$. Andaikan t adalah tetap. Pada nilai minimum $P(u,v,w)$, diketahui bahawa

$$\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial w} = 0$$

iaitu,

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial w}. \tag{3}$$

Daripada (2), didapati bahawa

$$\frac{\partial P}{\partial u} = 2(A+t)u, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = 2(B+t)v, \quad \frac{\partial P}{\partial w} = 2(C+t)w. \tag{4}$$

Dengan menggantikan (4) ke dalam (3), kita peroleh

$$\frac{u}{v} = \frac{B+t}{A+t} \quad \text{dan} \quad \frac{u}{w} = \frac{C+t}{A+t}.$$

Dengan demikian,

$$u : v : w = \frac{1}{A+t} : \frac{1}{B+t} : \frac{1}{C+t}.$$

Oleh kerana $u + v + w = 1$, maka kita peroleh

$$u = \frac{\frac{1}{A+t}}{\frac{1}{A+t} + \frac{1}{B+t} + \frac{1}{C+t}}, \quad v = \frac{\frac{1}{B+t}}{\frac{1}{A+t} + \frac{1}{B+t} + \frac{1}{C+t}}, \quad w = \frac{\frac{1}{C+t}}{\frac{1}{A+t} + \frac{1}{B+t} + \frac{1}{C+t}}.$$

Keputusan ini dan (2), memberikan nilai minimum $P(u,\, v,\, w)$ sebagai

$$P(u,v,w) = \frac{1}{\frac{1}{A+t} + \frac{1}{B+t} + \frac{1}{C+t}} - t.$$

Kita perlu memilih nilai $t = t_G$ supaya nilai minimum $P(u,v,w)$ adalah 0. Oleh kerana $t > 0$, maka $P(u,v,w) = 0$ apabila

$$\frac{1}{\frac{A}{t}+1} + \frac{1}{\frac{B}{t}+1} + \frac{1}{\frac{C}{t}+1} = 1.$$

Andaikan $s_G = \frac{1}{t_G}$, maka s_G adalah penyelesaian bagi

$$G(s) = 1, \quad s \geq 0 \tag{5}$$

dengan

$$G(s) = \frac{1}{As+1} + \frac{1}{Bs+1} + \frac{1}{Cs+1}. \tag{6}$$

Oleh kerana $A, B, C > 0$, maka bagi $s \geq 0$, $G'(s) < 0$, $G''(s) > 0$ dan $G(s) \to 0$ apabila $s \to \infty$. Oleh yang demikian apabila X=maks $(A,\, B,\, C)$ dan Y=min $(A,\, B,\, C)$, maka

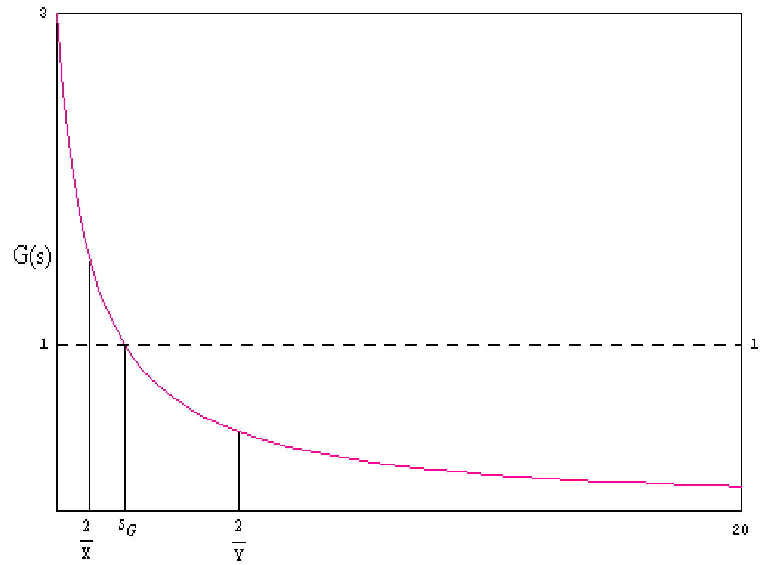
$$\frac{3}{Xs+1} \leq G(s) \leq \frac{3}{Ys+1}.$$

Oleh itu, $G(\frac{2}{X}) \geq 1$ dan $G(\frac{2}{Y}) \leq 1$ dan kita telah memperoleh satu pernyataan bagi memenuhi syarat kepositifan tampalan segi tiga Ball kubik, seperti dinyatakan dalam teorem berikut:

Teorem

Pertimbangkan tampalan segi tiga Ball kubik $P(u,v,w)$ dengan $a_{300} = A, a_{030} = B$, $a_{003} = C, A, B, C > 0$. Jika $a_{210}, a_{201}, a_{120}, a_{021}, a_{102}, a_{012}, a_{111} \geq -t_G$ dengan $s_G = \frac{1}{t_G}$ adalah penyelesaian unik bagi (5) dan (6) maka $P(u,v,w) \geq 0, \quad \forall\, u,v,w \geq 0, u+v+w = 1$.

Rajah 2 menunjukkan bentuk $G(s)$, $s \geq 0$ dan lokasi $2/X$, $2/Y$ dan s_G.



Rajah 2: Fungsi $G(s)$ pada $s \geq 0$

Kita memerlukan satu skema lelaran mudah untuk memperoleh nilai s_G. Apabila diberi nilai A, B, C, kita perlu mencari nilai s yang memenuhi persamaan (6) dan $G(s)= 1$ yang akan menjadi batas bawah ordinat segi tiga Ball, dengan $s_G = \frac{1}{t_G}$. Skema lelaran yang dipilih perlu memastikan penumpuan diperoleh dari satu arah, contohnya penumpuan diperoleh apabila s_G dihampiri dari atas. Kecembungan fungsi $G(s)$ (lihat Rajah 2) membolehkan kita menggunakan kaedah kedudukan palsu (Conte & de Boor [2]). Nilai $2/X$ dan $2/Y$ diguna sebagai nilai awal s_G. Garis sekan dibentuk dengan menyambung titik $(2/X,$ $G(2/X))$ dengan titik $(2/Y,$ $G(2/Y))$. Ordinat-s titik persilangan garis sekan dengan garis lurus $G(s) = 1$, katakan x_1 diperoleh. Seterusnya titik $(x_1,$ $G(x_1))$ disambung ke titik $(2/X,$ $G(2/X))$ untuk memperoleh titik persilangan dengan garis lurus $G(s) = 1$ yang baru dan begitulah seterusnya sehingga garis lurus yang dibentuk bertemu atau menghampiri titik persilangan lengkung $G(s)$ dan garis lurus $G(s) = 1$.

3 Pembinaan Permukaan Interpolasi Data Tersebar Yang Mengekalkan Kepositifan

3.1 Penyegitigaan dan Spesifikasi Terbitan

Andaikan diberi nilai-nilai data untuk diinterpolasi dan biarkan D sebagai hul cembung titik-titik $U_i = (x_i,y_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Penyegitigaan Delaunay (Fang & Piegl [3]) diguna untuk menyegitigakan D, dengan setiap U_i, $1 \leq i \leq N$ sebagai bucu segi tiga.

Nilai-nilai permukaan F yang telah diinterpolasi pada bucu-bucu ditakrif sebagai $F(x_i,\ y_i) = z_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Terbitan separa F_x dan F_y pada setiap $(x_i,\ y_i)$ dianggar menggunakan kaedah Goodman et al. [6]. Terbitan pada kesemua sisi segi tiga dapat ditentukan daripada nilai-nilai tersebut. Contohnya, andaikan e_{ij} adalah sisi yang menyambung titik $(x_i,\, y_i)$ ke titik $(x_j,\, y_j)$ untuk tampalan segi tiga P, maka:

$$\frac{\partial P}{\partial e_{ij}} = (x_j - x_i)\frac{\partial F}{\partial x} + (y_j - y_i)\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Terbitan yang diperoleh diguna untuk menentukan nilai awal pada semua ordinat Ball, a_{rst} kecuali a_{111}. Contohnya, kita ambil tampalan segi tiga P:

$$a_{300} = F(V_1), \quad a_{210} = F(V_1) + \frac{1}{3}\frac{\partial P}{\partial e_3}(V_1)$$

dengan e_3 sebagai sisi dari bucu V_1 ke bucu V_2. Walau bagaimanapun, ordinat Ball yang ditentukan pada peringkat ini mungkin tidak memenuhi syarat kepositifan tampalan segi tiga P. Daripada Teorem di bahagian 2, kita perlu meletakkan satu syarat pada semua ordinat Ball (kecuali ordinat dalaman) iaitu $a_{210}, a_{201}, a_{120}, a_{021}, a_{102}, a_{012} \geq -t_G$ untuk memenuhi syarat kepositifan tampalan segi tiga P. Jika tidak, magnitud F_x dan F_y pada bucu-bucu hendaklah dikurangkan supaya syarat kepositifan dipenuhi. Pengubahsuaian terbitan separa dicapai dengan mendarab setiap terbitan pada bucu $V_i, i=$ 1, 2, 3, dengan faktor skala α, $0 < \alpha < 1$. Nilai terkecil α ditentukan dengan mempertimbangkan semua tampalan segi tiga yang bertemu pada bucu $V_i, i=$ 1, 2, 3, dengan memilih nilai α yang paling minimum yang memenuhi syarat kepositifan kesemua segi tiga. Sebagai contoh,

$$(a_{210})_i = F(V_1) + \frac{\alpha}{3}\frac{\partial P}{\partial (e_3)_i}(V_1) \geq -(t_G)_i$$

dengan subskrip i menunjukkan kuantiti berdasarkan segi tiga i. Jika perlu, anggaran terbitan separa ini akan diubah dan ordinat Ball akan dikira semula dengan menggunakan rumus di atas.

Seterusnya, ordinat dalaman Ball pada setiap segi tiga akan dikira. Nilai awal ordinat dalaman Ball setiap segi tiga dipilih mengikut urutan dengan memastikan pengekalan kepositifan dan memenuhi keselanjaran C^1 pada kesemua sempadan tampalan. Pendekatan ini ditunjukkan di dalam Foley & Opitz [4] bagi memastikan keselanjaran C^1 diperoleh dan mempunyai kejituan kubik. Dalam skema ini, setiap tampalan permukaan segi tiga adalah gabungan cembung tiga tampalan segi tiga Ball kubik. Hasil kerja di dalam kajian Chan & Ong [1] dan Piah et al. [8] juga menggunakan pendekatan yang sama. Kesemua ordinat sempadan tiga tampalan segi tiga adalah sama dan dikira seperti di atas.

Andaikan setiap segi tiga tampalan permukaan P adalah gabungan cembung tampalan segi tiga P_i, $i =$1, 2, 3. Setiap P_i mempunyai ordinat dalaman Ball a^i_{111}, i = 1, 2, 3, yang mungkin berbeza. Nilai awal a^i_{111}, i = 1, 2, 3, dikira daripada sistem persamaan mengikut ordinat Ball dua segi tiga yang berkongsi sisi. Sila rujuk persamaan (9)–(12) di dalam Foley & Opitz [4] atau (3.4)–(3.7) di dalam Chan & Ong [1] untuk perincian.

Jika titik dalaman Ball a^i_{111}, i = 1, 2, 3, masih tidak memenuhi syarat kepositifan, pengubahsuaian perlu dilakukan berdasarkan Teorem bagi tampalan segi tiga Ball kubik di bahagian 2. Titik dalaman Ball segi tiga bersebelahan diubah mengikut urutan bagi menjamin keselanjaran C^1 dan kejituan kubik dicapai.

3.2 Penjanaan Tampalan Segi Tiga

Bagi setiap tampalan P, semua ordinat Ball pada tampalan segi tiga P_i, $i =$1, 2, 3 telah ditentukan. Dengan demikian, kita dapat menakrif penjanaan permukaan P_T pada segi tiga

T sebagai gabungan cembung tiga tampalan segi tiga seperti berikut:

$$P_T = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3$$

dengan

$$c_1 = \frac{vw}{vw + wu + uv}, \quad c_2 = \frac{wu}{vw + wu + uv}, \quad c_3 = \frac{uv}{vw + wu + uv}$$

dan u, v, w sebagai koordinat baripusat. Rumus ini sama seperti yang digunakan oleh Foley & Opitz [4] dan Piah et al. [8] tetapi terdapat sedikit perbezaan pada rumus jika dibandingkan dengan yang telah digunakan oleh Chan dan Ong [1], iaitu

$$c_1 = \frac{v^2w^2}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2}, \quad c_2 = \frac{w^2u^2}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2}, c_3 = \frac{u^2v^2}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2}.$$

4 Contoh Kajian

Terdapat dua contoh data hujan yang dipertimbang dalam kertas kerja ini berpandukan skema interpolasi tampalan segi tiga Ball kubik yang telah diperoleh di dalam bahagian 2.

Jadual 1 mempamerkan rekod data purata taburan hujan bulanan di Pulau Pinang bagi kawasan Air Itam, Bayan Lepas, Bukit Bendera dan USM Muka Head dalam tahun 1986-1990. Data ini diperoleh daripada Jabatan Perkhidmatan Meteorologi Malaysia (MMS) (Fong & Ooi [5]). Penyegitigaan domain adalah seperti di dalam Rajah 3.a. Interpolasi linear ditunjukkan di dalam Rajah 3.b. Pengekalan kepositifan permukaan interpolasi tampalan segi tiga Ball kubik dipamerkan dalam Rajah 3.c.

Jadual 1: Purata Taburan Hujan di Pulau Pinang (1986-1990)

Nama Stesen	**Longitud**	**Latitud**	**Purata Taburan Hujan Bulanan (mm)**
A - AIR ITAM	100.250	25.380	239.608
B - BAYAN LEPAS	100.267	5.300	307.083
C - BUKIT BENDERA	100.267	5.417	245.702
D - USM MUKA HEAD	100.200	5.467	307.247

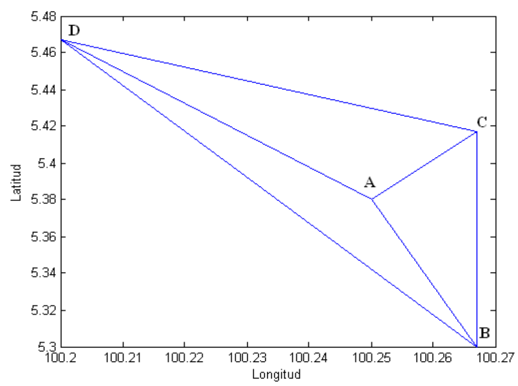
Jadual 2 merupakan data taburan hujan dalam satu hari yang diperoleh di Arthur's Pass yang terletak di Pulau Selatan, New Zealand seperti yang dipamerkan dalam Jadual 2 (Piah et al. [8]). Penyegitigaan domain adalah seperti di dalam Rajah 4.a. Interpolasi linear ditunjukkan seperti di dalam Rajah 4.b. Rajah 4.c menunjukkan pengekalan kepositifan permukaan interpolasi tampalan segi tiga Ball kubik.

5 Kesimpulan

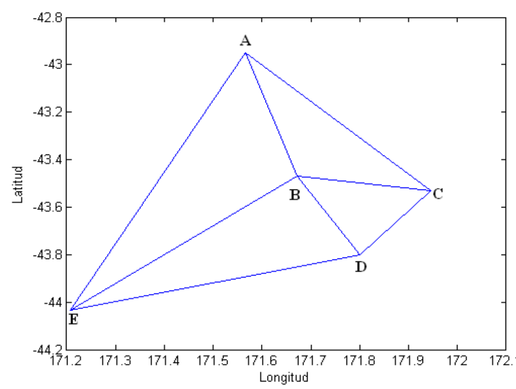
Kertas kerja ini mengemukakan kaedah penjanaan permukaan tak berparameter yang menginterpolasi data tersebar positif. Contoh-contoh yang dikemukakan mempamerkan permukaan yang dibentuk secara cebis demi cebis daripada gabungan cembung tiga tampalan

Jadual 2: Purata Taburan Hujan Harian di Arthur's Pass, New Zealand

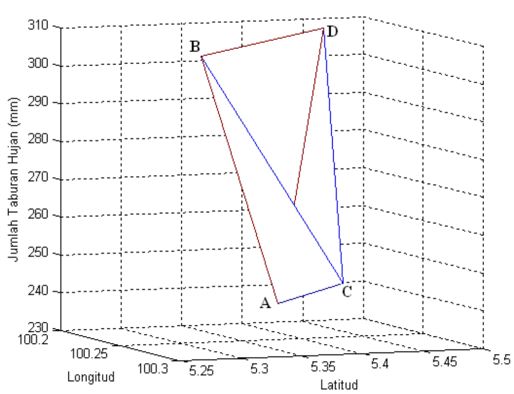
Lokasi	**Longitud**	**Latitud**	**Taburan Hujan Harian(mm)**
A	171.567	-42.950	4.6
B	171.672	-43.470	0.1
C	171.946	-43.529	0.2
D	171.800	-43.800	0.4
E	171.208	-44.035	0.2



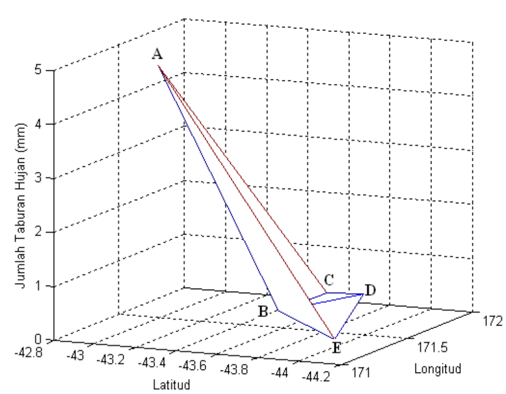
Rajah 3.a: Penyegitigaan Domain Data Jadual 1



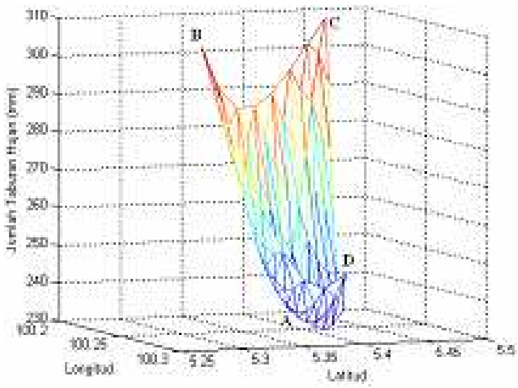
Rajah 4.a: Penyegitigaan Domain Data Jadual 2



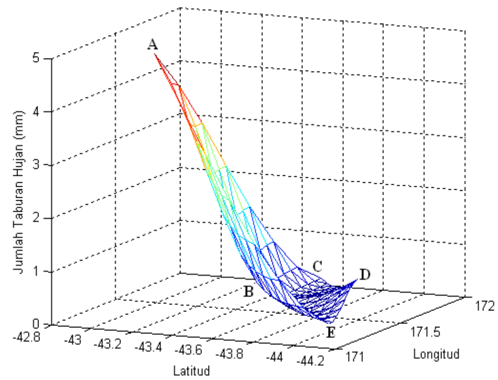
Rajah 3.b: Interpolasi Linear Data Jadual 1



Rajah 4.b: Interpolasi Linear Data Jadual 2



Rajah 3.c: Pengekalan Kepositifan Permukaan Interpolasi Data Jadual 1



Rajah 4.c: Pengekalan Kepositifan Permukaan Interpolasi Data Jadual 2

segi tiga Ball kubik. Pendekatan yang digunakan setara dengan yang telah dilakukan oleh Piah et al. [8] dan Chan & Ong [1]. Kertas kerja ini hanya mempertimbangkan kes pengekalan kepositifan permukaan interpolasi. Skema yang dibina adalah setempat dan mudah untuk dikembangkan kepada pembinaan penginterpolasi terbatas seperti yang dilakukan oleh Chan & Ong [1].

Analisis taburan hujan di sesuatu lokasi, sebagai contoh, boleh dilakukan dengan hanya melihat kepada permukaan interpolasi yang terhasil. Permukaan interpolasi taburan hujan yang dihasilkan adalah positif setara dengan data yang diberikan. Skema yang dihasilkan tidak akan menjana permukaan interpolasi negatif.

Penghargaan

Penulis ingin merakamkan penghargaan kepada Kementerian Pengajian Tinggi dan Universiti Sains Malaysia kerana membiayai penyelidikan ini melalui geran FRGS Nombor Akaun 203/PMATHS/671040.

Rujukan

[1] E.S. Chan & B.H. Ong, *Range restricted scattered data interpolation using convex combination of cubic Bézier triangles*, J. Comp. Appl. Math. 136 (2001), 135-147.

[2] S.D. Conte & C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, Tokyo, 1972.

[3] T.P. Fang & L.A. Piegl, *Algorithms for Delaunay triangulation and convex-hull computation using a sparse matrix*, Computer Aided Design 24 (1992), 425-436.

[4] T.A. Foley & K. Opitz, *Hybrid cubic Bézier triangle patches*, dalam Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II, Lyche, T., Schumaker, L.L. (eds.), Academic Press, New York, (1992), 275-286.

[5] C.S. Fong & H.Y. Ooi, *Visualization of rainfall data using C^1 interpolant to scattered data*, Final Year Project Report, Universiti Sains Malaysia, 2006.

[6] T.N.T. Goodman, H.B. Said & L.H.T. Chang, *Local derivative estimation for scattered data interpolation*, Appl. Math. Comp. 80 (1994), 1-10.

[7] V.P. Kong, B.H. Ong, & K.H. Saw, *Range restricted interpolation using cubic Bézier triangle*, dalam WSCG '2004, February 2-6, Plzen, Czech Republic, 2004.

[8] A.R.M. Piah, T.N.T. Goodman & K. Unsworth, *Positivity preserving scattered data interpolation*, dalam Mathematics of Surfaces 2005 , LNCS 3604, R. Martin, H. Bez, M. Sabin (eds.), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, (2005), 336-349.

[9] A.R.M. Piah, A. Saaban & A.A. Majid, *Range restricted positivity-preserving scattered data interpolation*, Journal of Fundamental Sciences 2 (2006), 63-75.

[10] A. Saaban, A.R.M. Piah, A.A. Majid & L.H.T. Chang, *G^1 scattered data interpolation with minimized sum of squares of principal curvatures*, dalam Computer Graphics, Imaging and Visualization: New Trends, M. Sarfraz et al (eds), IEEE Computer Society, Los Alamitos, (2005), 385-390.

[11] A. Saaban, A.R.M. Piah & A.A. Majid, *Positivity-preserving scattered data interpolation surfaces using C^1 piecewise cubic triangular patches*, dalam Computer Graphics, Imaging and Visualization: Techniques and Applications, E. Banissi et al (eds), IEEE Computer Society, Los Alamitos, (2006), 490-495.

[12] R. Wirza, *Interpolasi data tersebar*, Tesis Ijazah Sarjana, Universiti Sains Malaysia, 1994.