

Perbandingan Prestasi Tiga Jenis Carta Kawalan
untuk Taburan Pencongan
(*A Comparison of Performances of Three Types
of Control Charts for Skewed Distributions*)

¹Michael B.C. Khoo & ²Mazidah Kassim

Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 Minden, Pulau Pinang, Malaysia
e-mail: ¹mkbc@usm.my / mkbc@tm.net.my; ²mazidah.kassim@intel.com

Abstrak Kertas kerja ini membandingkan tiga jenis kaedah carta kawalan berlainan yang digunakan untuk memantau min proses daripada taburan pencongan. Taburan pencongan yang dipertimbangkan ialah taburan Weibull, lognormal dan gama manakala carta kawalan untuk taburan pencongan yang dikaji ialah carta $\bar{X}$ varians berpemberat (carta $WV - \bar{X}$), carta $\bar{X}$ sisihan piawai berpemberat (carta $WSD - \bar{X}$) dan carta $\bar{X}$ dengan pembetulan kepencongan (carta $SC - \bar{X}$). Carta-carta ini akan dinilai berdasarkan prestasi purata panjang larian dalam kawalan (ARL_0). ARL ditakrifkan sebagai purata bilangan titik sampel yang perlu diplotkan pada carta kawalan sebelum titik yang pertama plot di luar had-had kawalan. Oleh sebab carta-carta ini direkabentuk berdasarkan lebar tiga sisihan piawai, $ARL_0 \approx 370$ dipertimbangkan apabila taburan pendasar proses adalah normal. Carta yang baik mempunyai nilai ARL_0 yang besar apabila proses mempunyai taburan pencongan. Perbandingan prestasi berdasarkan kajian simulasi menggunakan program Statistical Analysis System (SAS) versi 9 mendapati bahawa carta-carta $SC - \bar{X}$ dan $WSD - \bar{X}$ mempunyai prestasi ARL_0 yang lebih baik daripada carta $WV - \bar{X}$. Carta-carta $SC - \bar{X}$ dan $WSD - \bar{X}$ mempunyai prestasi ARL_0 yang hampir sama.

Katakunci Carta kawalan, taburan pencongan; varians berpemberat (WV); sisihan piawai berpemberat (WSD); pembetulan kepencongan (SC); purata panjang larian (ARL); min proses.

Abstract This paper compares three different types of control charting methods used in the monitoring of a process mean from a skewed distribution. The skewed distributions considered are the Weibull, lognormal and gamma distributions while the control charts for skewed distributions studied are the weighted variance $\bar{X}$ chart ($WV - \bar{X}$ chart), weighted standard deviation $\bar{X}$ chart ($WSD - \bar{X}$ chart) and skewness correction $\bar{X}$ chart ($SC - \bar{X}$ chart). These charts will be evaluated based on their in-control average run length (ARL_0) performances. ARL is defined as the average number of sample points that must be plotted on a control chart before the first point plots beyond the control limits. Since these charts are designed based on the three standard deviation width, $ARL_0 \approx 370$ is considered when the underlying distribution of a process is normal. A good chart has a large ARL_0 value when the process follows a skewed distribution. A performance comparison based on a simulation study using the Statistical Analysis System (SAS) version 9 program shows that the $SC - \bar{X}$ and $WSD - \bar{X}$ charts have better ARL_0 performances than the $WV - \bar{X}$ chart. The $SC - \bar{X}$ and $WSD - \bar{X}$ charts have about the same ARL_0 performances.

Keywords *Control chart; skewed distribution; weighted variance (WV); weighted standard deviation (WSD); skewness correction (SC); average run length (ARL); process mean.*

1 Pengenalan

Carta kawalan digunakan untuk menentukan sama ada suatu proses berada dalam keadaan terkawal, menjadikan proses terluar kawal berada dalam keadaan terkawal semula dan memantau proses supaya ia kekal dalam keadaan terkawal (Montgomery [1]). Carta Shewhart $\bar{X} - R$ lazim digunakan dalam kawalan proses di industri. Carta $\bar{X} - R$ diplot berdasarkan andaian bahawa cirian kualiti daripada proses yang dikawal bertaburan normal atau hampir normal (Montgomery [1]).

Walau bagaimanapun, dalam banyak situasi sebenar di industri, andaian kenormalan tidak dipenuhi. Misalnya, proses kimia dan masahayat sampel ujian pemecutan hayat lazimnya mempunyai taburan pencongan (Bai dan Choi [2]). Untuk taburan pencongan, kebarangkalian ralat Jenis-I, α , bagi carta $\bar{X} - R$ meningkat apabila kepencongan bertambah. Kesan ini telah dilaporkan oleh Burr [3], Schilling dan Nelson [4], Balakrishnan dan Kocherlakota [5] dan Chan et al. [6]. Suatu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan meningkatkan saiz sampel tetapi cara ini melibatkan kos yang tinggi. Justeru, suatu kaedah yang menggunakan had-had kawalan asimetri yang bersesuaian dengan corak variasi sebenar taburan adalah diingini (Bai dan Choi [2]). Nilai ARL_0 diperoleh sebagai salingan kebarangkalian ralat Jenis-I, yakni, $ARL_0 = 1/\alpha$. Di sini, α mewakili kebarangkalian ralat Jenis-I yang ditakrifkan sebagai kebarangkalian bersyarat carta kawalan mengesan anjakan dalam proses sungguhpun diketahui proses sebenarnya berada dalam keadaan terkawal. Dari segi matematik, $\alpha = P(\text{carta kawalan mengesan anjakan proses} \mid \text{proses berada dalam keadaan terkawal})$.

Terdapat tiga jenis carta kawalan untuk data pencongan yang direkabentuk berdasarkan had-had kawalan asimetri untuk mengurangkan saiz ralat Jenis-I carta $\bar{X}$ yang asas. Carta-carta tersebut ialah carta $WV - \bar{X}$, carta $WSD - \bar{X}$ dan carta $SC - \bar{X}$, masing-masing dicadangkan oleh Bai dan Choi [2], Chang dan Bai [7] dan Chan dan Cui [8]. Dalam kertas kerja ini, kami membandingkan prestasi ARL_0 ketiga-tiga jenis carta tersebut untuk proses yang bertaburan pencongan. Carta $\bar{X}$ Shewhart juga dipertimbangkan untuk membolehkan kajian kesan taburan pencongan ke atas kaedah klasik ini dijalankan.

Organisasi kertas kerja ini untuk bahagian yang seterusnya adalah seperti berikut: bahagian 2 memberi ulasan ringkas tentang carta $\bar{X}$ Shewhart, carta $WV - \bar{X}$, carta $WSD - \bar{X}$ dan carta $SC - \bar{X}$. Kajian simulasi dan perbandingan prestasi dibincangkan dalam bahagian 3. Bahagian 4 memberi komen dan cadangan berdasarkan keputusan yang diperoleh dalam bahagian 3. Bahagian 5 mengakhiri perbincangan dalam kertas kerja ini dengan memberikan kesimpulan berdasarkan maklumat yang diperoleh daripada kajian yang dijalankan serta mengenalpasti kajian masa depan yang sesuai.

2 Sorotan Literatur

2.1 Carta $\bar{X}$ Shewhart

Carta $\bar{X}$ Shewhart digunakan dalam kawalan min proses untuk situasi yang melibatkan pengeluaran besar-besaran, yang mana data bagi anggaran parameter proses adalah tersedia

ada (Montgomery [1]). Carta ini mengandaikan bahawa proses pendasar bertaburan normal, $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Jika nilai μ_0 dan σ_0 tidak diketahui, penganggar-penganggar,

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad \text{dan} \quad \hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \sum_{i=1}^m R_i / (md_2)$$

digunakan. Untuk kes ini, $\bar{X}_i$ dan R_i masing-masing mewakili min dan julat untuk sampel ke- i , yang mana setiap sampel mempunyai saiz yang sama, n , manakala m mewakili bilangan sampel daripada proses yang berada dalam keadaan terkawal dan d_2 ialah pemalar carta kawalan, yang mana nilainya bergantung kepada saiz sampel, n . Had-had kawalan untuk carta $\bar{X}$ ialah

$$\text{had kawalan atas, } UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad (1a)$$

$$\text{garis tengah, } CL_{\bar{X}} = \mu_0 \quad (1b)$$

dan

$$\text{had kawalan bawah, } LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \quad (1c)$$

2.2 Carta $\bar{X}$ Varians Berpemberat (Carta WV- $\bar{X}$)

Carta WV – $\bar{X}$ dicadangkan oleh Bai dan Choi [2]. Kaedah varians berpemberat adalah berdasarkan idea bahawa suatu taburan pencongan boleh dipisahkan kepada dua segmen pada minnya dan setiap segmen digunakan untuk membentuk suatu taburan simetri yang baru. Dua taburan simetri baru tersebut yang dibentuk daripada taburan pencongan asal mempunyai min yang sama tetapi sisihan piawai yang berlainan. Kaedah varians berpemberat menggunakan dua taburan simetri baru tersebut dalam pengiraan had-had kawalan carta WV – $\bar{X}$.

Had-had kawalan carta WV – $\bar{X}$ ialah

$$UCL_{WV-\bar{X}} = \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{2P_X} \quad (2a)$$

dan

$$LCL_{WV-\bar{X}} = \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{2(1-P_X)}, \quad (2b)$$

dengan $P_X = P(X \leq \mu_0)$. Jika parameter proses tidak diketahui, had-had carta WV – $\bar{X}$ ialah

$$UCL_{WV-\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d'_2 \sqrt{n}} \sqrt{2\hat{P}_X} = \bar{\bar{X}} + W_U \bar{R} \quad (3a)$$

dan

$$LCL_{WV-\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d'_2 \sqrt{n}} \sqrt{2(1-\hat{P}_X)} = \bar{\bar{X}} - W_L \bar{R}, \quad (3b)$$

dengan W_U dan W_L masing-masing mewakili pemalar had atas dan had bawah carta kawalan. Nilai-nilai W_L dan W_U diberikan dalam Bai dan Choi [2]. d'_2 ialah pemalar untuk taburan pencongan tertentu yang sepadan dengan d_2 untuk taburan normal manakala

$$\hat{P}_X = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(\bar{\bar{X}} - X_{ij})}{mn}. \quad (4)$$

Di sini, X_{ij} mewakili cerapan ke- j daripada sampel ke- i , dan $I\left(\bar{\bar{X}} - X_{ij}\right) = 1$ jika $\bar{\bar{X}} \geq X_{ij}$ atau $I\left(\bar{\bar{X}} - X_{ij}\right) = 0$, sebaliknya.

2.3 Carta $\bar{X}$ Sisihan Piawai Berpemberat (Carta WSD- $\bar{X}$)

Carta WSD - $\bar{X}$ dicadangkan oleh Chang dan Bai [7]. Kaedah sisihan piawai berpemberat adalah berdasarkan idea yang sama seperti kaedah varians berpemberat dalam Bahagian 2.2. Had-had kawalan carta WSD - $\bar{X}$ adalah seperti berikut:

$$\text{UCL}_{\text{WSD}-\bar{X}} = \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} (2P_X) \quad (5a)$$

dan

$$\text{LCL}_{\text{WSD}-\bar{X}} = \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} [2(1 - P_X)]. \quad (5b)$$

Apabila parameter proses tidak diketahui, had-had ini dikira dengan menggunakan rumus berikut:

$$\text{UCL}_{\text{WSD}-\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2^{\text{WSD}} \sqrt{n}} (2\hat{P}_X) \quad (6a)$$

dan

$$\text{LCL}_{\text{WSD}-\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2^{\text{WSD}} \sqrt{n}} [2(1 - \hat{P}_X)]. \quad (6b)$$

Di sini,

$$d_2^{\text{WSD}} = \hat{P}_X d_2 [2n(1 - \hat{P}_X)] + (1 - \hat{P}_X) d_2 [2n\hat{P}_X], \quad (7)$$

dengan $d_2[n]$ ialah nilai d_2 untuk taburan normal (Chang dan Bai [7]).

2.4 Carta $\bar{X}$ dengan Pembetulan Kepencongan (Carta SC- $\bar{X}$)

Chan dan Cui [8] mencadangkan carta ini berdasarkan pengembangan Cornish-Fisher. Had-had kawalan carta SC - $\bar{X}$ ialah

$$\text{UCL}_{\text{SC}-\bar{X}} = \mu_0 + \left(3 + \frac{4\alpha_3/(3\sqrt{n})}{1 + 0.2\alpha_3^2/n}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (8a)$$

dan

$$\text{LCL}_{\text{SC}-\bar{X}} = \mu_0 + \left(-3 + \frac{4\alpha_3/(3\sqrt{n})}{1 + 0.2\alpha_3^2/n}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad (8b)$$

dengan α_3 ialah pekali kepencongan untuk pembolehubah rawak X . Jika nilai parameter proses tidak diketahui, anggaran bagi μ_0 , σ_0 dan α_3 digunakan. Anggaran bagi μ_0 , σ_0 dan α_3 adalah

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}, \hat{\sigma}_0 = \bar{R}/d_2^* \text{ dan } \hat{\alpha}_3 = \frac{1}{nm - 3} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{ij} - \bar{\bar{X}}}{S} \right)^3.$$

Di sini, d_2^* mewakili pemalar carta kawalan yang nilainya diberikan oleh Chan dan Cui [8].

3 Kajian Simulasi dan Perbandingan Prestasi

Dalam kajian ini, prestasi carta-carta $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$, $SC - \bar{X}$ dan $\bar{X}$ Shewhart dibandingkan berdasarkan nilai ARL_0 . Carta yang baik mempunyai nilai ARL_0 yang besar apabila proses berada dalam keadaan terkawal. Nilai-nilai ARL_0 diperoleh daripada kajian simulasi Monte-Carlo dengan menggunakan program SAS versi 9. Pada mulanya, cerapan-cerapan untuk subkumpulan dijana daripada suatu taburan yang dipertimbangkan. Kemudian min-min sampel dikira dan nilai-nilainya diplotkan pada carta kawalan. Jika nilai suatu min sampel berada diluar had-had kawalan, isyarat bahawa proses berada di luar kawalan akan diberikan. Bilangan min sampel yang nilainya perlu diplotkan pada carta kawalan sehingga isyarat pertama bahawa proses berada di luar kawalan diperoleh dicatatkan. Prosedur ini diulangi sebanyak 10000 kali dan purata bilangan min sampel yang perlu diplotkan sehingga isyarat pertama bahawa proses berada di luar kawalan diperoleh direkodkan sebagai ARL_0 .

Oleh sebab nilai ARL_0 perlu dikira, maka carta-carta $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$, $SC - \bar{X}$ dan $\bar{X}$ Shewhart direkabentuk dengan andaian bahawa nilai parameter proses diketahui. Setiap nilai ARL_0 yang dikira adalah berdasarkan 10000 cubaan simulasi. Untuk carta-carta tersebut, min sampel, $\bar{X}$, diplotkan berdasarkan had-had kawalan masing-masing. Saiz sampel, $n = 4, 7$ dan 10 dipertimbangkan. Ketiga-tiga saiz sampel ini dipertimbangkan oleh sebab dalam industri hanya sampel dengan saiz yang kecil, katakan $n < 10$ diambil pada selang masa tertentu untuk memantau kualiti demi mengurangkan kos pensampelan (Montgomery [1]).

Taburan normal piawai serta taburan pencongan Weibull, gama dan lognormal dipertimbangkan. Fungsi ketumpatan ketiga-tiga jenis taburan pencongan ini boleh mewakili pelbagai bentuk, daripada simetri kepada kepencongan yang sangat tinggi.

Untuk menjana data melalui simulasi, bahasa pengaturcaraan SAS yang ditulis diperudahkan dengan memilih parameter skala untuk taburan Weibull dan gama sebagai satu dan parameter lokasi untuk taburan lognormal sebagai sifar. Nilai-nilai ini dipilih kerana kepencongan bagi taburan Weibull, gama dan lognormal tidak bergantung kepada nilai parameter-parameter ini (Bai dan Choi [2] dan Chang dan Bai [7]). Nilai parameter-parameter ini memberikan fungsi ketumpatan taburan Weibull, gama dan lognormal dalam bentuk teringkas, sekaligus mempermudah proses penjanaan data dengan program SAS. Kepencongan sesuatu taburan diukur oleh pekali kepencongan, α_3 , yang diberikan oleh rumus berikut:

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu_0)^3]}{\sigma_0^3}, \quad (9)$$

dengan X , μ_0 dan σ_0 masing-masing mewakili pembolehubah rawak, min dan sisihan piawai untuk taburan yang dipertimbangkan.

3.1 Taburan Normal

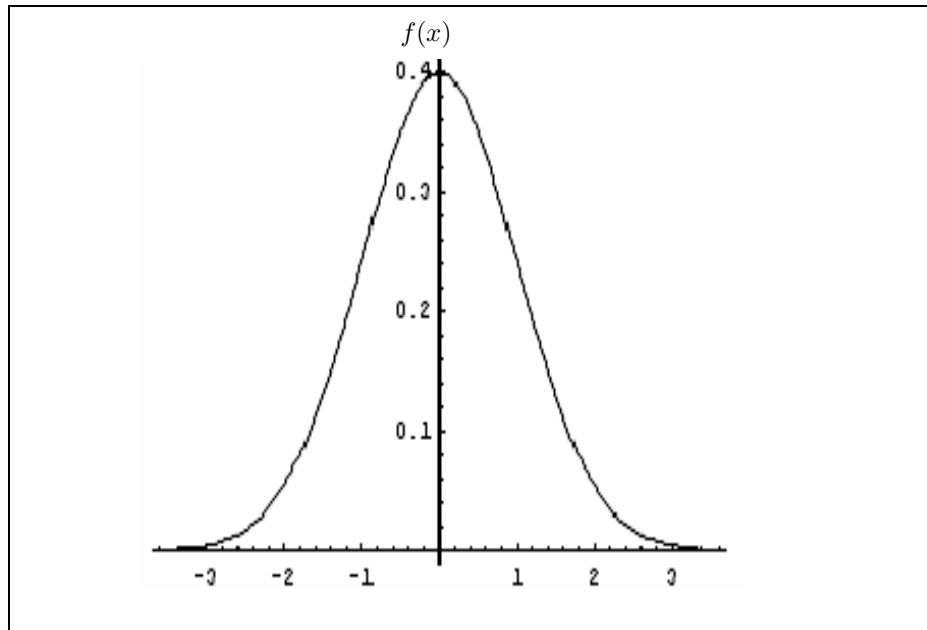
Taburan normal merupakan taburan yang paling luas digunakan dalam teori dan aplikasi statistik. Fungsi ketumpatan dan fungsi taburan untuk taburan normal adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (10)$$

dan

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \text{eks} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] dt, \quad (11)$$

yang mana μ_0 mewakili min dan $\sigma_0 > 0$ mewakili sisihan piawai bagi taburan normal. Apabila $\mu_0 = 0$ dan $\sigma_0 = 1$, taburan normal dikenali sebagai taburan normal piawai. Fungsi ketumpatan taburan normal adalah simetri dan mempunyai lengkung berbentuk loceng. Rajah 1 menunjukkan fungsi ketumpatan untuk taburan normal piawai yang diplotkan dengan menggunakan program Mathematica versi 5.2. Oleh sebab taburan normal merupakan taburan simetri, maka pekali kepencongannya, α_3 adalah sifar.



Rajah 1: Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian untuk Taburan Normal Piawai

3.2 Taburan Weibull

Fungsi ketumpatan dan fungsi taburan untuk taburan Weibull adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\beta-1} \text{eks} \left[-\left(\frac{x}{\theta} \right)^{\beta} \right], \quad x \geq 0 \quad (12)$$

dan

$$F(x) = 1 - \text{eks} \left[-\left(\frac{x}{\theta} \right)^{\beta} \right], \quad (13)$$

dengan β mewakili parameter bentuk manakala θ ialah parameter skala. Rajah 2 menunjukkan fungsi ketumpatan untuk taburan Weibull apabila parameter skala, $\theta = 1$ dan

parameter bentuk, $\beta = 0.5, 1, 2$ dan 4 . Fungsi ketumpatan ini diplotkan dengan menggunakan program Mathematica versi 5.2. Jika parameter skala, $\theta = 1$ dipertimbangkan, maka min dan sisihan piawai untuk taburan Weibull adalah masing-masing (Montgomery, [1])

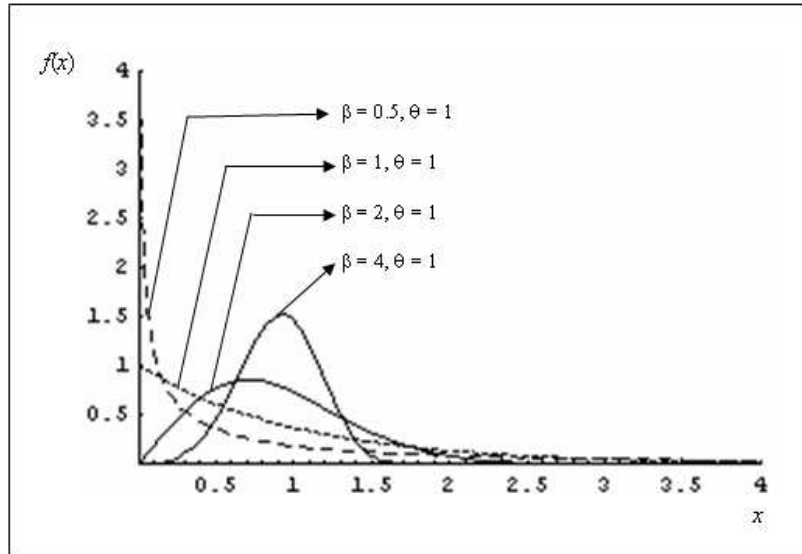
$$\mu_0 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (14)$$

dan

$$\sigma_0 = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2}. \quad (15)$$

Dalam kajian simulasi yang dijalankan, kedua-dua min dan sisihan piawai proses dianggap berada dalam keadaan terkawal. Parameter bentuk, β ditentukan supaya pekali kepencongan, $\alpha_3 = 0, 0.5, \dots, 3$. Jika $\theta = 1$, maka P_X bagi taburan Weibull ditakrifkan sebagai (Bai dan Choi [2])

$$P_X = 1 - \text{eks} \left[-\{\Gamma(1 + 1/\beta)\}^\beta \right]. \quad (16)$$



Rajah 2: Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian untuk Taburan Weibull bagi Pelbagai Nilai β dan $\theta = 1$

3.3 Taburan Gama

Fungsi ketumpatan dan fungsi taburan untuk taburan gama adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$f(x) = \frac{\eta}{\Gamma(\lambda)} (\eta x)^{\lambda-1} \text{eks}(-\eta x), \quad x \geq 0 \quad (17)$$

dan

$$F(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{\eta}{\Gamma(\lambda)} (\eta t)^{\lambda-1} \text{eks}(-\eta t) dt, \quad (18)$$

dengan η mewakili parameter skala dan λ menandai parameter bentuk. Rajah 3 memberikan fungsi ketumpatan untuk taburan gama dengan parameter skala, $\eta = 1$ dan parameter bentuk, $\lambda = 1, 2$ dan 3 . Fungsi ketumpatan ini diplotkan dengan menggunakan program Mathematica versi 5.2. Apabila parameter skala, $\eta = 1$ dipertimbangkan, min dan sisihan piawai untuk taburan gama adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$\mu_0 = \lambda \quad (19)$$

dan

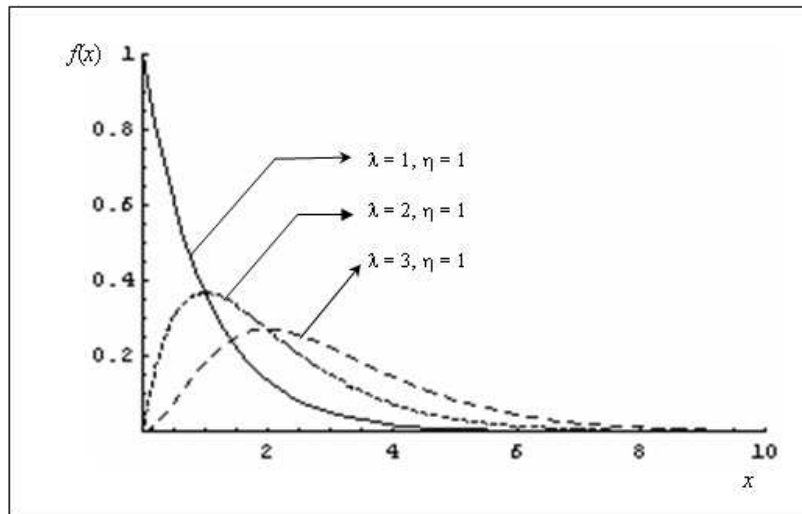
$$\sigma_0 = \sqrt{\lambda}. \quad (20)$$

Kedua-dua min dan sisihan piawai proses dianggap berada dalam keadaan terkawal untuk kajian simulasi yang dijalankan. Parameter bentuk, λ , ditentukan supaya pekali kepencongan, $\alpha_3 = 0, 0.5, \dots, 3$. Jika $\eta = 1$, maka P_X bagi taburan gama adalah

$$P_X = 1 - \int_\lambda^\infty \frac{1}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} \text{eks}(-t) dt. \quad (21)$$

dengan

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-y} dy.$$



Rajah 3: Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian untuk Taburan Gama bagi Pelbagai Nilai λ dan $\eta = 1$

3.4 Taburan Lognormal

Fungsi ketumpatan dan fungsi taburan bagi taburan lognormal pula adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \text{eks} \left[-\frac{(\ln(x) - \xi)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x > 0 \quad (22)$$

dan

$$F(x) = \Phi \left[\frac{\ln(x) - \xi}{\sigma} \right]. \quad (23)$$

Di sini, σ mewakili parameter skala dan ξ menandai parameter lokasi. Plot fungsi ketumpatan untuk taburan lognormal bagi parameter lokasi, $\xi = 0$ dan parameter skala, $\sigma = 0.5, 1$ dan 1.5 ditunjukkan dalam Rajah 4. Fungsi ketumpatan ini diplotkan dengan menggunakan program Mathematica versi 5.2. Jika parameter lokasi, $\xi = 0$ dipertimbangkan, maka min dan sisihan piawai untuk taburan ini adalah masing-masing (Montgomery, [1])

$$\mu_0 = \text{eks} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \right) \quad (24)$$

dan

$$\sigma_0 = \sqrt{\text{eks}(\sigma^2) [\text{eks}(\sigma^2) - 1]}. \quad (25)$$

Min dan sisihan piawai proses diandaikan berada dalam keadaan terkawal bagi kajian simulasi yang dijalankan. Parameter skala, σ , ditentukan supaya pekali kepencongan, $\alpha_3 = 0, 0.5, \dots, 3$. Jika $\xi = 0$, maka P_X bagi taburan lognormal ditakrifkan sebagai (Bai dan Choi [2])

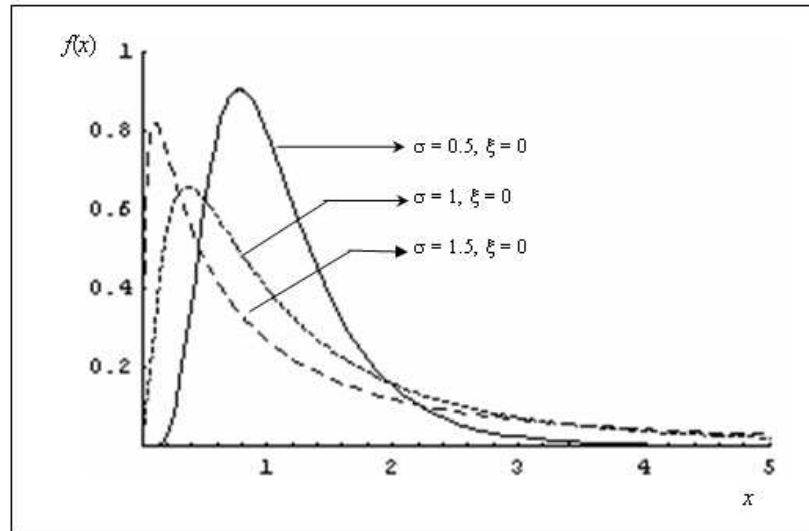
$$P_X = \Phi(\sigma/2), \quad (26)$$

dengan $\Phi(\cdot)$ mewakili fungsi taburan normal piawai.

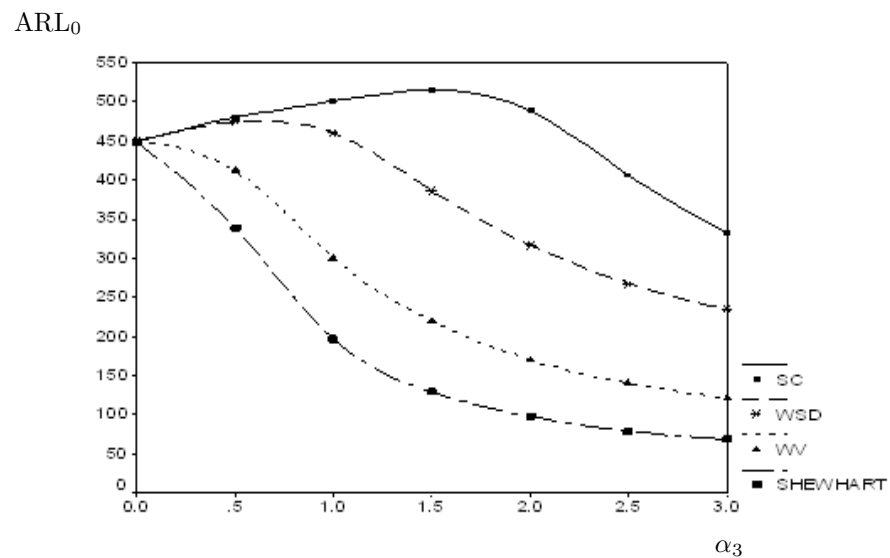
3.5 Analisis Kajian Simulasi

Jadual 1 memberikan nilai-nilai ARL_0 untuk carta $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ bagi taburan normal piawai dan taburan pencongan Weibull, lognormal dan gama. Rajah 5a – 5c, 6a – 6c dan 7a – 7c menunjukkan trend ARL_0 lawan pekali kepencongan, α_3 , masing-masing untuk taburan Weibull, lognormal dan gama yang diperoleh berdasarkan maklumat yang terkandung dalam Jadual 1.

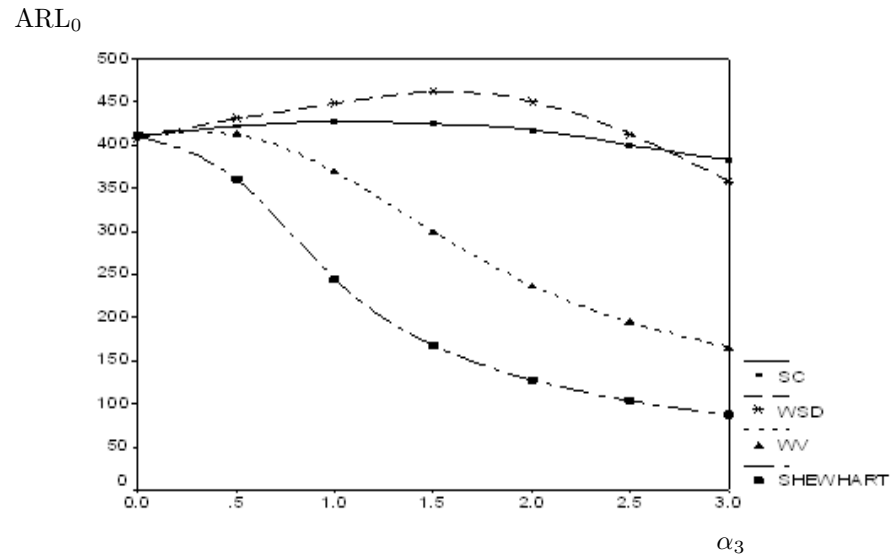
Pada amnya, diperhatikan daripada Rajah 5a hingga Rajah 7c bahawa ARL_0 carta-carta kawalan untuk kebanyakan kes menyusut apabila α_3 meningkat. Ini bermakna untuk kes-kes tersebut, saiz ralat Jenis-I, α , meningkat apabila kepencongan bertambah. Apabila $\alpha_3 > 0$, carta $\bar{X}$ Shewhart memberikan nilai ARL_0 yang terendah, yakni carta ini mempunyai saiz ralat Jenis-I, α , yang tertinggi di kalangan semua jenis carta dengan saiz sampel, n , yang sama. Carta $SC - \bar{X}$ dan carta $WSD - \bar{X}$ mempunyai prestasi ARL_0 keseluruhan yang hampir sama. Prestasi kedua-dua jenis carta ini adalah lebih baik daripada carta $WV - \bar{X}$. Jelas kelihatan bahawa saiz sampel, n , mempunyai kesan ke atas prestasi ARL_0 carta $\bar{X}$ Shewhart dan carta $WV - \bar{X}$ tetapi kurang pengaruh ke atas carta $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$, apabila $\alpha_3 > 0$. Untuk carta-carta $\bar{X}$ Shewhart dan $WV - \bar{X}$, pertambahan saiz sampel akan menyebabkan peningkatan nilai ARL_0 , yakni, penyusutan saiz ralat Jenis-I.



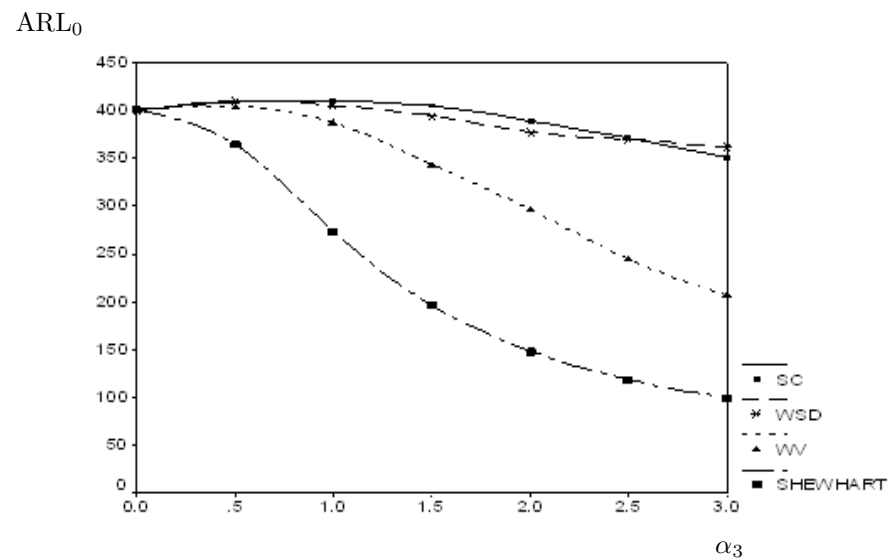
Rajah 4: Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian untuk Taburan Lognormal bagi Pelbagai Nilai σ dan $\xi = 0$



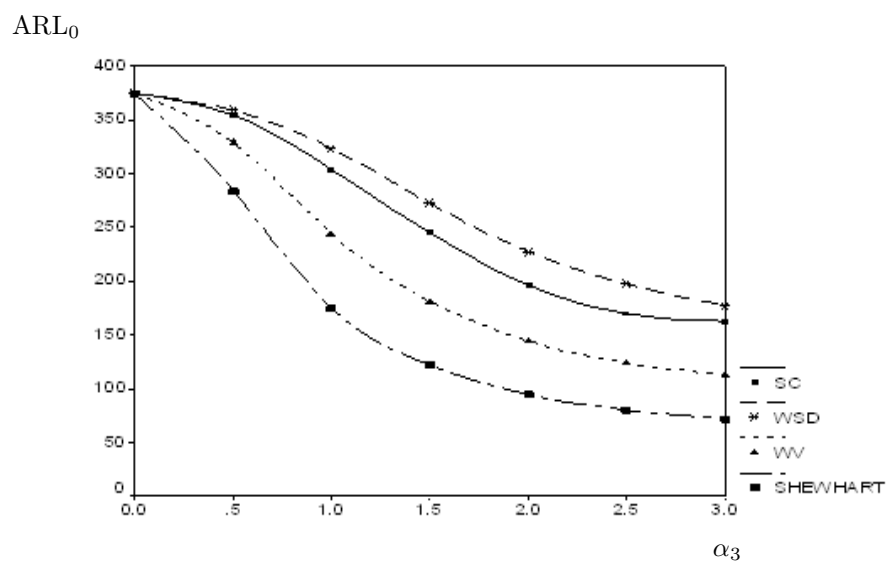
Rajah 5a: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 4$ Berdasarkan Taburan Weibull



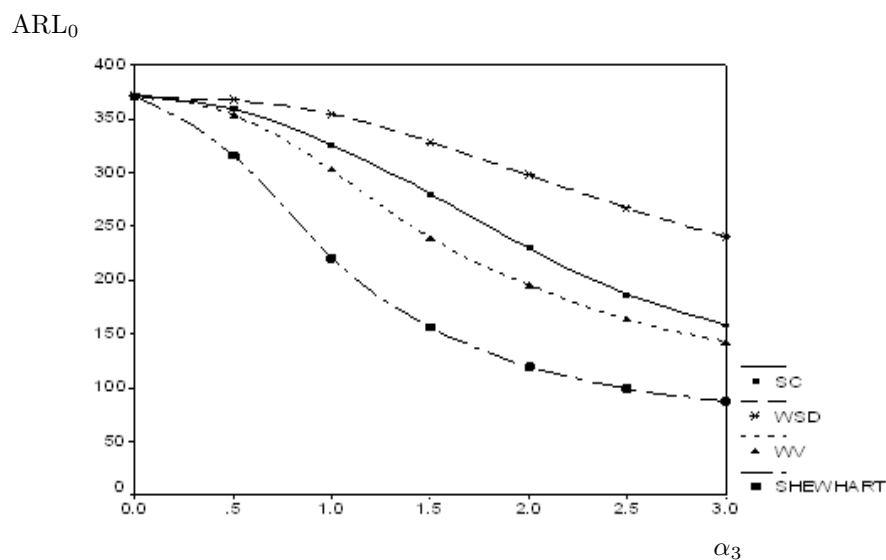
Rajah 5b: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 7$ Berdasarkan Taburan Weibull



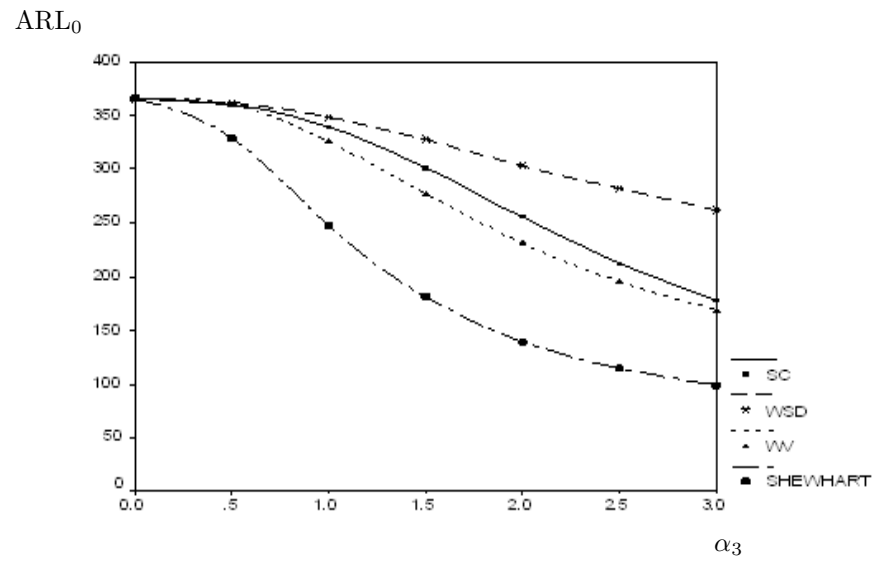
Rajah 5c: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 10$ Berdasarkan Taburan Weibull



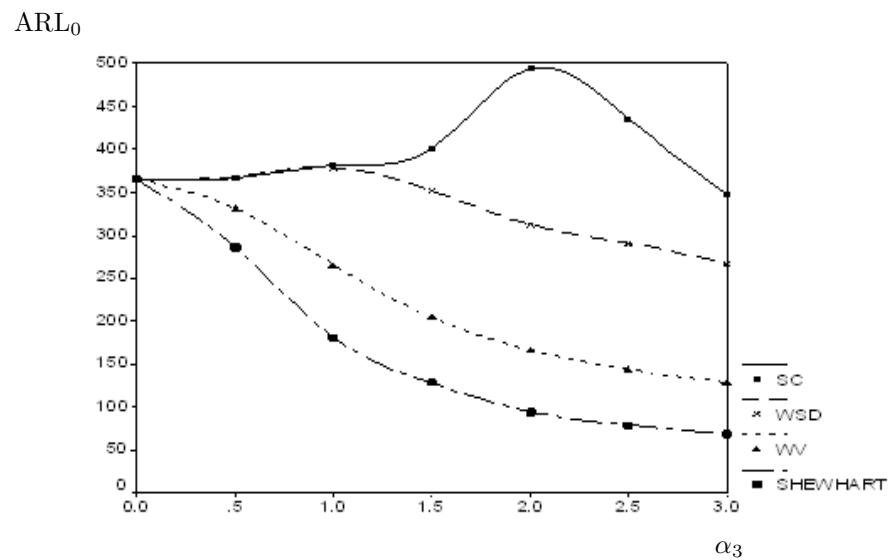
Rajah 6a: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 4$ Berdasarkan Taburan Lognormal



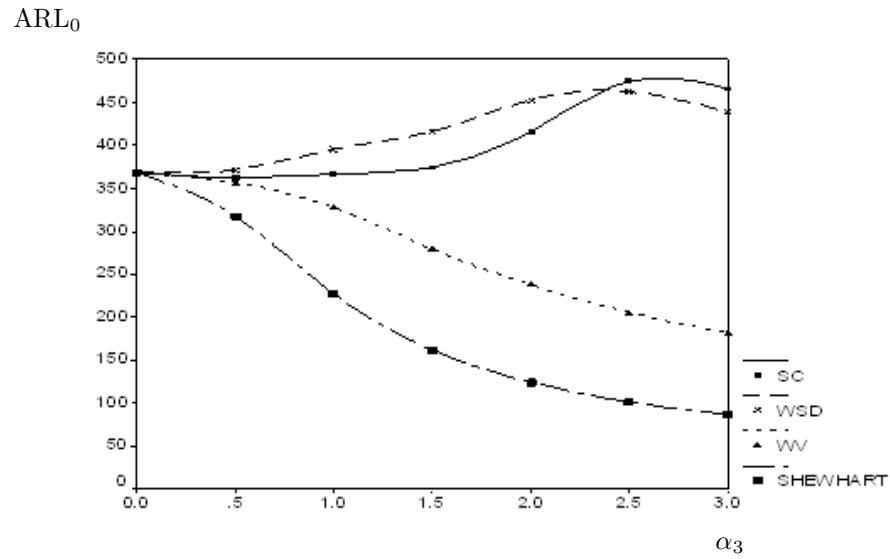
Rajah 6b: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 7$ Berdasarkan Taburan Lognormal



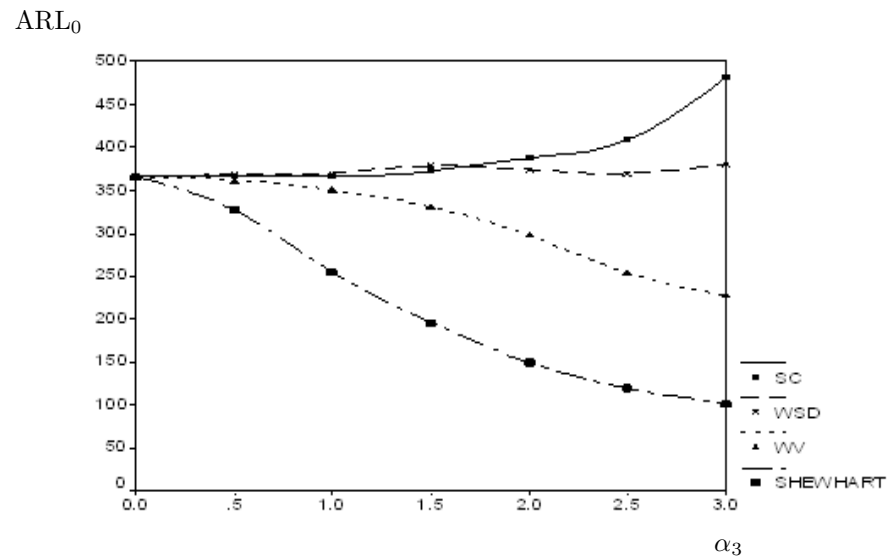
Rajah 6c: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 10$ Berdasarkan Taburan Lognormal



Rajah 7a: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 4$ Berdasarkan Taburan Gama



Rajah 7b: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 7$ Berdasarkan Taburan Gama



Rajah 7c: Plot ARL_0 Lawan α_3 untuk Kaedah $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ dengan Saiz Sampel $n = 10$ Berdasarkan Taburan Gama

Jadual 1: ARL_0 untuk Carta-carta $\bar{X}$ Shewhart, $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ berdasarkan Taburan Normal Piawai, Weibull, Lognormal dan Gama

		n												
		4				7				10				
Taburan	α_3	$\bar{X}$ She-whart	WV- $\bar{X}$	WSD- $\bar{X}$	SC- $\bar{X}$	$\bar{X}$ She-whart	WV- $\bar{X}$	WSD- $\bar{X}$	SC- $\bar{X}$	$\bar{X}$ She-whart	WV- $\bar{X}$	WSD- $\bar{X}$	SC- $\bar{X}$	
Normal piawai	0.0	374.4	374.4	374.4	374.4	371.3	371.3	371.3	371.3	365.9	365.9	365.9	365.9	
Weibull														
β	3.6286	0.0	449.7	450.5	450.5	449.7	411.2	410.8	409.3	411.2	401.3	401.3	400.8	401.3
	2.2266	0.5	339.6	412.8	475.1	480.6	360.8	412.5	430.9	422.1	365.1	404.8	410.8	409.4
	1.5688	1.0	197.0	301.4	460.6	501.6	244.7	369.4	448.4	427.5	273.9	387.9	406.0	410.4
	1.2123	1.5	129.8	220.4	387.5	515.9	167.2	299.6	462.1	424.9	196.7	344.2	395.3	405.1
	0.9987	2.0	98.0	170.6	317.7	489.5	127.6	236.8	451.0	417.8	148.8	297.0	377.9	389.9
	0.8598	2.5	79.3	140.9	268.4	406.8	102.8	194.5	413.0	400.4	119.0	244.9	370.1	371.5
0.7637	3.0	68.6	121.4	234.7	332.2	86.4	165.2	358.2	382.8	99.7	207.6	361.8	351.9	
Lognormal														
σ	0.0010	0.0	374.7	374.6	374.5	374.7	371.2	371.3	371.2	371.2	366.0	365.9	366.1	366.0
	0.1656	0.5	284.4	329.3	359.1	354.8	316.4	353.8	367.1	359.4	329.2	360.6	361.9	359.7
	0.3170	1.0	175.0	244.0	323.8	303.8	220.9	302.4	355.0	326.0	247.0	325.8	348.4	339.7
	0.4484	1.5	122.0	181.4	272.7	245.2	156.4	239.3	328.6	280.8	181.3	277.4	327.4	301.3
	0.5593	2.0	94.7	144.5	228.1	196.2	120.1	195.5	297.7	229.9	139.5	231.1	303.2	255.4
	0.6525	2.5	80.6	124.2	197.4	169.8	99.2	163.8	267.1	187.4	114.6	195.4	281.9	212.6
0.7315	3.0	72.2	112.6	177.8	162.9	87.7	142.8	240.4	158.6	99.1	169.2	261.9	177.9	
Gama														
λ	38000	0.0	364.8	365.0	364.8	364.8	368.4	368.3	368.3	368.4	366.0	366.2	365.9	366.0
	15.4	0.5	286.1	331.4	368.6	366.1	317.2	356.7	371.5	362.4	327.1	361.5	368.1	367.1
	3.913	1.0	181.5	265.5	379.3	381.1	227.3	327.7	395.1	366.5	255.0	350.2	370.1	366.3
	1.788	1.5	128.0	204.4	352.0	401.1	161.7	279.6	416.3	374.5	196.6	330.9	378.3	372.2
	0.983	2.0	94.9	166.9	312.7	494.4	124.6	238.0	452.7	416.4	149.7	297.6	374.0	387.7
	0.648	2.5	79.6	144.4	291.1	436.1	101.6	205.5	462.7	474.1	120.1	254.0	370.3	408.7
0.442	3.0	68.3	128.6	267.1	346.6	86.4	181.7	438.9	466.1	102.0	227.7	380.6	481.9	

Perhatikan juga bahawa jika pekali kepencongan, α_3 , untuk taburan lognormal dan gama adalah sifar, yakni, apabila taburan pencongan menjadi taburan simetri, nilai ARL_0 menghampiri 370, untuk kesemua saiz sampel iaitu, seperti kes untuk taburan normal. Walau bagaimanapun, trend ini tidak diperhatikan untuk taburan Weibull.

4 Komen dan Cadangan

Berikut merupakan keputusan yang diperoleh daripada kajian yang dijalankan dan cadangan yang disyorkan:

- Semua carta memberikan prestasi ARL_0 yang sama apabila proses mempunyai taburan pendasar normal. Justeru, penggunaan carta kawalan untuk data pencongan, misalnya, carta $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ atau $SC - \bar{X}$ tidak memberikan prestasi yang lebih buruk berbanding dengan carta $\bar{X}$ Shewhart apabila proses bertaburan normal. Sebaliknya, carta-carta sedemikian mempunyai kelebihan oleh sebab mereka mempunyai saiz ralat Jenis-I, α , yang lebih rendah berbanding dengan carta $\bar{X}$ Shewhart jika proses bertaburan pencongan.
- Untuk proses dengan taburan pencongan, carta $WSD - \bar{X}$ atau $SC - \bar{X}$ adalah disyorkan oleh sebab mereka mempunyai nilai-nilai ARL_0 yang lebih tinggi berbanding dengan carta $WV - \bar{X}$.
- Apabila proses bukan bertaburan normal, peningkatan saiz sampel, n , akan meningkatkan nilai ARL_0 (atau mengurangkan saiz ralat Jenis-I) untuk carta $\bar{X}$ Shewhart. Walau bagaimanapun, pendekatan ini adalah tidak praktikal dari segi kos kerana

menurut teorem had memusat, saiz sampel, n , mestilah sekurang-kurangnya 25 supaya min sampel, $\bar{X}$, mempunyai taburan normal hampiran. Tambahan pula, Jadual 1 menunjukkan kadar peningkatan nilai ARL_0 yang lambat untuk carta $\bar{X}$ Shewhart apabila saiz sampel, n , meningkat daripada 4 kepada 10. Justeru, kaedah yang lebih praktikal untuk mengatasi masalah kepencongan adalah dengan menggunakan carta kawalan untuk data pencongan.

- (iv) Walaupun pengiraan had-had kawalan untuk carta bagi taburan pencongan adalah lebih rumit berbanding dengan carta $\bar{X}$ Shewhart apabila parameter proses adalah tidak diketahui, namun pemalar-pemalar carta yang membolehkan had-had dikira dengan cepat diberikan oleh Bai dan Choi [2], Chang dan Bai [7] dan Chan dan Cui [8], masing-masing untuk carta $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$.

5 Kesimpulan

Perbandingan prestasi dalam bahagian 3 menunjukkan keupayaan carta kawalan $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ memberikan saiz ralat Jenis-I yang lebih kecil berbanding dengan carta $\bar{X}$ Shewhart, apabila taburan untuk proses adalah terpencong. Dapatan ini mengesahkan keupayaan carta-carta $WV - \bar{X}$, $WSD - \bar{X}$ dan $SC - \bar{X}$ untuk taburan pencongan seperti yang dilaporkan oleh Bai dan Choi [2], Chang dan Bai [7] dan Chan dan Cui [8]. Oleh sebab saiz ralat Jenis-I untuk carta $\bar{X}$ Shewhart adalah sangat besar bagi kepencongan yang tinggi apabila saiz sampel, $n < 10$, maka carta ini tidak sepatutnya digunakan dalam kawalan proses. Ini kerana wujud kebarangkalian yang tinggi untuk carta $\bar{X}$ Shewhart memberikan isyarat palsu berlakunya anjakan min proses, walaupun sebenarnya proses masih berada dalam keadaan terkawal. Hal ini akan menyebabkan kebarangkalian yang tinggi dalam melakukan interpretasi salah jika carta $\bar{X}$ Shewhart digunakan dalam kawalan proses fasa dua untuk mengesan kehadiran sebab-sebab terumpukkan. Berdasarkan hakikat ini, prestasi ARL luar kawalan (*out-of-control ARL*), ARL_1 , carta $\bar{X}$ Shewhart tidak dikaji dan dibandingkan dengan prestasi ARL_1 carta untuk data pencongan oleh sebab kajian prestasi ARL_1 adalah tidak bererti jika sesuatu carta kawalan mempunyai saiz ralat Jenis-I yang terlalu besar. Empat topik untuk kajian masa depan yang dikenalpasti adalah seperti berikut:

- (i) Perbandingan prestasi ARL_0 antara carta R dan carta S asas bagi varians proses dengan carta-carta sepadan yang sedia ada untuk taburan pencongan seperti carta $WV-R$ dan carta $SC-R$.
- (ii) Carta EWMA dan CUSUM yang sedia ada untuk taburan pencongan direkabentuk berdasarkan kaedah WSD. Justeru, kajian boleh dijalankan untuk memperluas cadangan ini kepada carta EWMA dan CUSUM berasaskan kaedah WV dan SC.
- (iii) Kajian dijalankan untuk merekabentuk carta-carta T^2 , EWMA dan CUSUM multivariat bagi data pencongan dengan menggunakan kaedah WV dan SC. Ini kerana pendekatan carta T^2 multivariat (Chang dan Bai [9]) dan carta-carta EWMA dan CUSUM multivariat (Chang [10]) yang sedia ada direkabentuk berdasarkan kaedah WSD.
- (iv) Kajian diperluaskan untuk saiz sampel, $n \geq 10$.

Penghargaan

Penyelidikan ini dibiayai oleh Geran Penyelidikan Jangka Pendek, Universiti Sains Malaysia, no. 304/PMATHS/637011.

Rujukan

- [1] D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th. ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2005.
- [2] D.S. Bai dan I.S. Choi, $\bar{X}$ and R Control Charts for Skewed Populations, *Journal of Quality Technology*, 27(1995), 120 – 131.
- [3] I.W. Burr, *The Effect of Non-normality on Constants for $\bar{X}$ and R Charts*, *Industrial Quality Control*, 24(1967), 563 – 569.
- [4] E.G. Schilling dan P.R. Nelson, *The Effect of Non-normality on the Control Limits of $\bar{X}$ Charts*, *Journal of Quality Technology*, 8(1976), 183 – 188.
- [5] N. Balakrishnan dan S. Kocherlakota, *Effects of Non-normality on $\bar{X}$ Charts : Single Assignable Cause Model*, *Sankya B*, 48(1986), 439 – 444.
- [6] L.K. Chan, K.P. Hapuarachchi dan B.D. Macpherson, *Robustness of $\bar{X}$ and R Charts*, *IEEE Transactions on Reliability*, 37(1988), 117 – 123.
- [7] Y.S. Chang dan D.S. Bai, *Control Charts for Positively-Skewed Populations with Weighted Standard Deviations*, *Quality and Reliability Engineering International*, 17(2001), 397 – 406.
- [8] L.K. Chan dan H.J. Cui, *Skewness Correction $\bar{X}$ and R Charts for Skewed Distributions*, *Naval Research Logistics*, 50(2003), 555 – 573.
- [9] Y.S. Chang dan D.S. Bai, *A Multivariate T^2 Control Chart for Skewed Populations Using Weighted Standard Deviations*, *Quality and Reliability Engineering International*, 20(2004), 31 – 46.
- [10] Y.S. Chang, *Multivariate CUSUM and EWMA Control Charts for Skewed Populations Using Weighted Standard Deviations*, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 36(2007), 921 – 936.