Matematika, 1994, Jilid 10, bil. 2, hlm. 81–102

PENGATURCARAAN TAK LINEAR BERPEMANGKIN

RIO HIROWATI SHARIFFUDIN
Jabatan Matematik
Universiti Malaya

ITHNIN BIN ABDUL JALIL
Jabatan Fizik
Universiti Malaya

Abstrak. Antara banyak kaedah bagi menyelesaikan masalah pengoptimuman berkekangan tak linear, kaedah yang amat berkesan dalam konteks pengujiaannya ke atas masalah-masalah piawai melibatkan sama ada lelaran linear kuadratik. Maka, kertas kerja ini mencadangkan satu kaedah yang bukan sahaja menggunakan lelaran linear dan juga kuadratik tetapi menunjukkan bahawa proses pengaturcaraan tak linear dapat dimangkinkan dengan menggunakan kaedah cerun conjugat pelbagai rumus bagi pengoptimumnan bebas dan penyelesaian submasalah pengturcaraan linear sebelum rutin Newton dipanggil untuk memenuhi persamaan-persamaan kekangan.

Abstract. Among the various methods of solving nonlinear programming problems, the effective ones in the context of solving several standard problems involve either linearization or quadratic iterations. This paper thus suggests a method which does not only use linearization or make quadratic approximations but shows how the nonlinear programming process can be catalysed by using formulae variable conjugate gradient strategies for the unconstrained potimization and solving the linear programming subproblem before the Newton routine is called so as to satisfy the constrain equations.

1 PENGENALAN

Pemodelan matematik bagi sesuatu proses, tidak kira sama ada dalam bidang kejuruteraan, hal ehwal ekonomi atau kajian sains fizik acap kali mewujudkan masalah pengturcaraan matematik. Masalah ini biasanya memerlukan kita memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tertakluk kepada suatu atau lebih kekangan. Kekangan ini pula berbentuk persamaan atau ketaksamaan.

Dalam bahasa matematik, masalah pengoptimuman dapat diberikan oleh yang berikut:

Minimumkan (atau maksimumkan)

$$z = f(\underline{x}) \tag{1.1}$$

Tertakluk kepada kekangan-kekangan

$$g_i(\underline{x}) \leq \quad , \quad = \quad \text{atau} \quad \geq \quad b_i \tag{1.2}$$

Fungsi z dalam (1.1) ialah fungsi objektif. Secara paraktiknya, kita dapati bahawa di samping (1.2) sesuatu masalah pengoptimuman itu boloeh mengandungi kekangan yang agak ringan dan berbentuk batasan ke atas pembolehubah. Oleh yang demikian, kekangan ini lebih merupakan kekangan-kekangan mudah

$$l_j \leq x_j \leq u_j .$$

Apabila fungsi objektif dan semua kengan linear, msalah pengturcaraan linear diperolehi dan boleh di selesaikan dengan kaedah simpleks yang terkenal itu. Apabila fungsi obejktif kuadratik, pelbagai kaedah pengaturcaraan kuadratik yang dirintis oleh Wolfe[16] telah digunakan untuk menyelesaikan masalah pengturcaraan kuadratik. Bagi masalah berkekangan selain daripada yang di atas, banyak kaedah yang dianggap berkesan hingga kini dalam konteks pengujian ke atas penyelesaian masalah piawai boleh digunakan.

Bahagian seterusnya memperihalkan kaedah cerun konjugat dan mempamerkan ungkapan grafik penyelesaian beberapa masalah pengoptimuman bebas. Bahagian 3 memperihalkan kaedah cerun terturun[1] bagi pengturcaraan tak linear dan memasukkan suatu pemangkin dalam langkah-langkah tertentu.

2 STRATEGI CERUN CONJUGAT PELBAGAI RUMUS

Sejak diilhamkan oleh Hestenes dan Steifel, pelbagai rumus untuk arah cerun konjugat telah dicipta untuk digunakan dalam alkhwrizmi pengoptimuman tidak berkekangan. Kaedah ini dapat mearik minat ramai pengguna bukan sahaja kerana ia mudah malah ruang storan komputer yang perlu pun amat sederhana.

Satu lelaran cerun konjugat (CG) ditakrifkan oleh

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\underline{d}^{(k)} \tag{2.1}$$

dan

$$\underline{d}^{(k+1)} = -\underline{g}^{(k+1)} + \beta^{(k)}\underline{d}^{(k)} \quad \text{untuk } k \geq 1$$

dengan

$$\underline{d}^{(0)} = -\underline{g}^{(0)} \tag{2.2}$$

$\alpha^{(k)}$ dipilih untuk meminimumkan $f(\underline{x})$ dalam arah carian $\underline{d}^{(k)}$ Apabila $f(\underline{x})$ kuadratik dan $\alpha^{(k)}$ ditentukan secara tepat, versi Fletcher dan Reeves[5] bagi $\beta^{(k)}$ akan menjana arah-arah saling konjugat yang dapat menjamin pertumpuan kepada minimum bagi fungsi kuadratik n pembolehubah dalam selebih-lebihnya n lelaran

Pada amnya, $f(\underline{x})$ tidak kuadratik supaya $\underline{g}^{(k+1)T}\underline{g}^{(k)} \neq 0$. Jika pengoptimuman satu pembolehubah yang tepat masih digunakan, $\beta^{(k)}$ dapat ditentukan oleh

$$\beta^{(k)} = \frac{\underline{\gamma}^{(k)T}\underline{g}^{(k+1)}}{\underline{g}^{(k)T}\underline{g}^{(k+1)}}$$

dengan

$$\underline{\gamma}^{(k)} = \underline{g}^{(k+1)} - \underline{g}^{(k)} \tag{2.3}$$

Pada praktiknya, pengoptimuman tidak tepat dan dengan demikian rumus $\beta^{(k)}$ oleh Perry [12] ialah

$$\beta^{(k)} = \frac{[\underline{\gamma}^{(k)} - \alpha^{(k)}\underline{d}^{(k)}]^T\underline{g}^{(k+1)}}{\underline{\gamma}^{(k)T}\underline{d}^{(k)}} \tag{2.4}$$

Dengan mengambil kira kriteria ulangan lelaran Beale[2] dan Powell[14], Shanno[15] mencipta satu lagi kaedah CG. Beliau menggunakan tujuh vektor bermatra-n dan Polak dan Ribiere[13] pula menggunakan empat vektor sahaja. Tetapi kaedah Fletcher dan Reeves hanya memerlukan tiga vektor.

Dalam percubaan untuk menggunakan storan kecil dan mendapatkan pertumpuan yang pantas, Buckley[3] menyelang-selikan alkhwarizmi CG dengan alkhwarizmi separa Newton.

Satu lagi alkhwarizmi telah dibuat oleh D. Le[10] yang menggunakan tiga vektor sahaja. Ithnin[7], [8], [9] pula telah mempelbagaikan alkhwarizmi D. Le.

Asas-asas bagi teori arah konjugat dianggap sudah maklum dan kami hanya akan memberi terbitan bagi rumus-rumus baru dan rangka bagi strategi cerun konjugat pelbagai rumus.

2.1 Rumus Bagi Arah Konjugat

Arah-arah konjugat $d^{(0)}, d^{(1)}, \cdots, d^{(n-1)}$ beri oleh

$$\underline{d}^{(0)} = \underline{\zeta}_0$$

$$\underline{d}^{(k)} = \underline{\zeta}_k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_k^j \underline{d}^{(j)} \tag{2.5}$$

dengan $\underline{\zeta}_k (k = 0, 1, \ldots n-1$ saling tidak bersandar linear dan

$$\underline{\beta}_k^j = \frac{\underline{\zeta}_k^T A \underline{d}^{(j)}}{\underline{d}^{(j)T} A \underline{d}(j)} \qquad \text{untuk } j = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \tag{2.6}$$

Kini, oleh kerana

$$\underline{g}^{(k+1)} - \underline{g}^{(k)} = \alpha^{(k)} A \underline{d}^{(k)}$$

dan dengan mengambil $\underline{\zeta}_k = -\underline{g}^{(k)}$, kita perolehi

$$\beta_k^j = \frac{\underline{g}^{(k)T}(\underline{g}^{(j+1)} - \underline{g}^{(j)})}{\underline{d}^{(j)T}(\underline{g}^{(j+1)} - \underline{g}^{(j)})} \tag{2.7}$$

Arah cerun konjugat pula dijana oleh

$$\begin{aligned} \underline{d}^{(0)} &= -\underline{g}^{(0)} \\ \underline{d}^{(k)} &= -\underline{g}^{(k)} + \beta^{(k-1)} \underline{d}^{(k-1)} \end{aligned}$$

dengan

$$\beta^{(k-1)} = \frac{\underline{g}^{(k)T}(\underline{g}^{(k)} - \underline{g}^{(k-1)})}{\underline{d}^{(k-1)T}(\underline{g}^{(k)} - \underline{g}^{(k-1)})} \tag{2.8}$$

oleh Hestenes dan Steifel.

Daripada mengambil $\underline{\zeta}_k = -\underline{g}^{(k)}$ untuk $k \geq 1$, kita boleh pilih arah tidak bersandar linear $\underline{\zeta}_k$ supaya $\underline{\zeta}_k = -(\underline{g}^{(k+1)} - \underline{g}^{(k)})$ dan

$$\beta_k^{(j)} = \frac{(\underline{g}^{(k)} - \underline{g}^{(k-1)})^T(\underline{g}^{(j+1)} - \underline{g}^{(j)})}{\underline{d}^{(j)T}(\underline{g}^{(j+1)} - \underline{g}^{(j)})} \tag{2.9}$$

Kita juga bebas memilih $\underline{\zeta}_k = -(\underline{g}^{(k)} - \underline{d}^{(k-1)})$ supaya $\underline{g}^{(0)}, -(\underline{g}^{(1)} - \underline{d}^{(0)}), \ldots$ tidak bersandar linear dan kita peroleh rumus lain untuk $\beta_k^{(j)}$, iaitu

$$\beta_k^{(j)} = 0 \quad \text{untuk } j = 1, 2, \ldots, k-2$$

dan

$$\beta_k^{(k-1)} = \frac{(\underline{g}^{(k)} - \underline{d}^{(k-1)})^T(\underline{g}^{(k)} - \underline{g}^{(k-1)})}{\underline{d}^{(k-1)T}(\underline{g}^{(k)} - \underline{g}^{(k-1)})} \tag{2.10}$$

Dengan hipotesis

(i) pengoptimuman sepembolehubah sepanjang $\underline{d}^{(k)}$ tepat supaya

$$\underline{d}^{(k)T}\underline{g}^{(k+1)} = 0$$

(ii) pengoptimuman sepembolehubah sepanjang $\underline{d}^{(k-1)}$ tepat supaya

$$\underline{d}^{(k-1)T}\underline{g}^{(k)} = 0$$

(iii) fungsi objektif kuadratik supaya

$$\underline{g}^{(k)T}\underline{g}^{(k-1)} = 0$$

dan rumus (2.9) dan (2.10) dapat dipermudahkan lagi kepada rumus Fletcher dan Reeves, Dixon[4], dan Polak dan Ribiere[13]

2.2 Strategi Cerun Konjugat Pelbagai Rumus

Kini, telah diwujudkan pelbagai rumus yang boleh kita pilih dan gunakan dalam alkhwarizmi pengoptimuman bebas mahupun pengoptimuman berkekangan yang mana pengoptimuman bebas menjadi satu komponen penting. Biasanya, dalam sesuatu alkhwarizmi yang digunakan satu rumus dipilih terlebih dahulu dan digunakan sepanjang proses hingga tercapai optimun. Dalam kaedah kali ini, kita biarkan fungsi-fungsi objektif itu memilih rumus yang bersesuaian dengan ciri-ciri fungsi itu sendiri.

2.3 Ungkapan Grafik Pengoptimuman Bebas

Dalam bahagian ini, hasil kerja berangka bagi pengoptimuman bebas beberapa fungsi dikemukakan dalam bentuk grafik (lihat Rajah 1). Untuk semua masalah uji, lelaran dihentikan apabila setiap unsur cerun kurang daripada 1.0$e-5$. Ia juga dihentikan apabila

(a) $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq 10^{-6}(\text{maks}|x_i^{(k)}|, 1), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
(b) $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)| \leq 10^{-6}$,

Fungsi 1

$$f(\underline{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Fungsi 2

$$f(\underline{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$$

Fungsi 3

$$f(\underline{x}) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$$

Fungsi 4

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{10}[(\text{eksp}(-\underline{x}_1 t_i) - \text{eksp}(-\underline{x}_2 t_i)) - (\text{eksp}(-t_i) - \text{eksp}(-10t_i))]^2$$

dengan $t_i = i/10$

Fungsi 5

$$f(\underline{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Fungsi 6

$$f(\underline{x}) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

Fungsi 7

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3}[c_i - x_1(1 - x_2^i)]^2$$

dengan $c_1 = 1.5$, $c_2 = 2.25$, dan $c_3 = 2.625$

Fungsi 8

$$f(\underline{x}) = 100(x_3 - 10\theta)^2 + (r - 1)^2 + x_3^2$$

dengan $\theta = \tan^{-1}(x_2, x_1)/2\pi$ dan $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Fungsi 9

$$f(\underline{x}) = 2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 10 + (\text{maks}(x_3 - 12.5, 0))^2$$

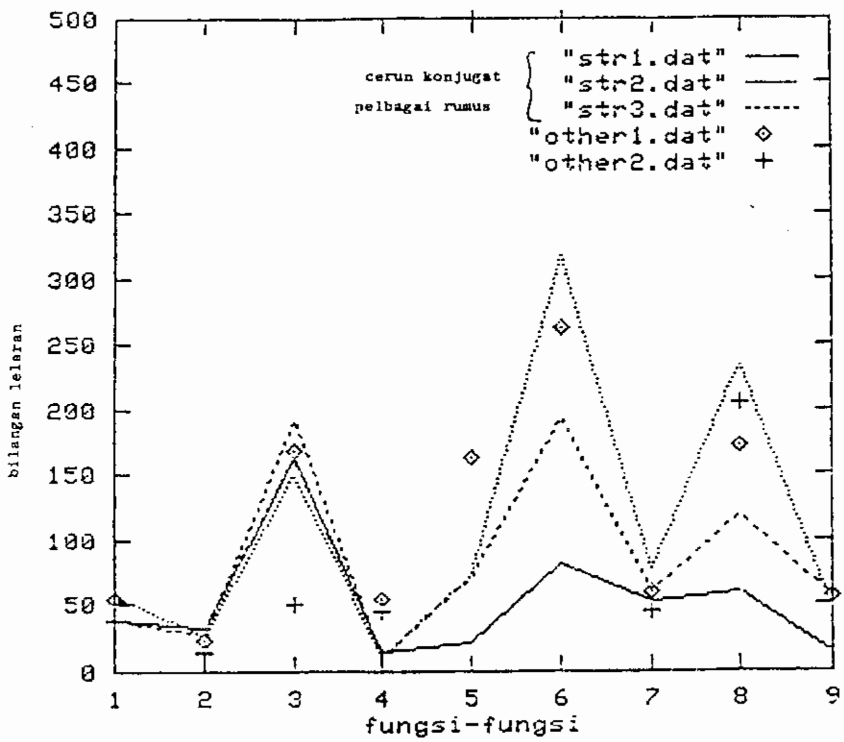
3. Alkhwarizmi Cerun Terturun

Pada dasarnya kaedah cerun terturun baik untuk kekangan linear atau terlinear, mentakrifkan pembolehubah baru yang normal ke kekangan dan menjelmakan ke arah asas ini. Kekangan semestinya persamaan dan kekangan ketaksamaan dijadikan kekangan persamaan dengan kaedah yang sudah jelas. Apabila kekangan ketaksamaan menjadi aktif, kekangan pasif dikeluarkan daripada set kekangan aktif. Dengan mengambil kekangan yang linear atau terlinear, kita dapat kumpulkan pembolehubah-pembolehubah kepada yang bebas dan yang bersandar linear. Akan tetapi kekangan aktif asal mungkin tidak dapat dipenuhi dan banyak cara wujud untuk mengembalikan ketersauran penyelesaian. Dengan ini pelbagai alkhwarizmi cerun terturun sedia ada, dan satu daripadanya ialah seperti dalam langkah-langkah berikut:

(1) Tentukan komponen pengoptimuman untuk pembolehubah bebas.

(2) Hitungkan komponen pengoptimuman untuk pembolehubah bersandar linear.

(3) Optimumkan dalam arah tersebut.
(4) Peroleh ketersauran pembolehubah bersandar linear dengan kaedah Newton; awas lebih daripada 20 lelaran mungkin diperlukan!
(5) Jika satu titik tersaur yang mengoptimuman fungsi objektif diperolehi, mulakan langkah 1-4 semula.
(6) Sekiranya tidak, tukar asas untuk rutin Newton.



. **Rajah 1** Ungkapan grafik prestasi rumus pelbagai CG

3.1 Alkhwarizmi Termangkin Untuk Kaedah Cerun Terturun

Kami berasa kecewa apabila menggunakan kaedah cerun terturun kerana terpaksa menggunakan lelaran Newton yang begitu banyak dan tidak akan terdorong untuk terus menggunakan kaedah tersebut. Tetapi, bilangan lelaran Newton dapat dikurangkan apabila kami memangkin proses pengturcaraan tak linear tersebut dengan cara pengaturcaraan linear bagi submasalah pengaturcaraan linear setelah pengoptimuman tak berkekangan lengkap telah dilakukan. Jika perlu, ketersauran akan diperlolehi dengan beberapa lelaran Newton sahaja.

4 BEBERAPA SAMPEL LARIAN KOMPUTER

Dalam bahagian ini, output komputer untuk kaedah kami dan juga kaedah asal dipaparkan sebagai perbandingan. Tumpuan diberi kepada masalah satu persamaan kekangan kerana jika pecutan dapat diperolehi untuk masalah ini, maka pertambahan kekangan tidak menjadi maslah. Lagi pun aturcara boleh dilanjutkan kepada matriks. Masalah-masalah serta output masing-masingnya ialah seperti dalam Jadual 1.

5 PENUTUP

Kaedah berpemangkin ini kelihatan bagitu hebat sekali dan sekali gus menggalakkan penggunaan kaedah ini dengan meluas. Pengturcaraan linear bagi submasalah pengturcaraan linear sedikit sebanyak membantu dalam menentukan pembolehubah mana yang patut bersandar linear. Pengoptimuman bebas dengan cerun pelbagai rumus dan pengoptimuman sepembolehubah dengan penggunaan titik-titik keratan bernilai membantu dalam mempercepatkan pengaturcaraan tak linear. Tumpuan dibuat untuk masalah satu persamaan kekangan dan dengan menggunakan strategi set aktif bagi kekangan-kekangan yang terlibat, sebarang masalah tak linear berkekangan dapat diselesaikan dengan pantas jika sebahagian daripada langkah-langkah dalam alkhwarizmi pengaturcaraan tak linear telah dipecut. Kaedah bermangkin ini baru dirintis dan pemantapan memerlukan banyak lagi kerja, termasuk pemilihan masuk kekangan ke dalam set aktif dan penyingkiran keluar kekangan dari set aktif itu.

Jadual 1

1. Minimumkan $f(\mathbf{x}) = \ln(1+x_1^2) - x_2$

tertakluk kepada $(1+x_1^2)^2 + x_2^2 - 4 = 0$

Output dengan kaedah asal:

Dengan menggunakan kaedah asal, 61 pengiraan cerun diperlukan dan adakalanya lebih daripada 20 lelaran Newton perlu dilakukan untuk menunjukkan penukaran asas.

Output dengan pemangkin:

```
Newton Iteration
     1              0.000000         1.732143
Newton Iteration
     2              0.000000          1.732051

Major Iteration Is
     1              0.000000          1.732051
Penyelesaian pun diperolehi.
```

2. Meminimumkan $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^4$

tertakluk kepada $(1+x_2^2)x_1 + x_3^4 - 4 = 0$

Output dengan kaedah asal:

Newton Iteration 1	-1.120474	5.204743E-01	1.526467
Newton Iteration 2	-1.120474	5.204743E-01	1.455802
Newton Iteration 3	-1.120474	5.204743-01	1.450318
Newton Iteration 4	-1.120474	5.204743E-01	1.450287
Major Iteration is 1	-1.120474	5.204743E-01	1.450287
Newton Iteration 1	3.678320E-01	3.666644E-01	1.268575
Newton Iteration 2	3.678320E-01	3.666644E-01	1.267709
Newton Iteration 3	3.678320E-01	3.666644E-01	1.267708
Major Iteration is 2	3.678320E-01	3.666644E-01	1.267708
Newton Iteration 1	4.182892E-01	7.435697E-01	1.238785
Newton Iteration 2	4.182892E-01	7.435697E-01	1.238191
Newton Iteration 3	4.182892E-01	7.435697E-01	1.238190
Major Iteration is 3	4.182892E-01	7.435697E-01	1.238190
Newton Iteration 1	7.023705E-01	6.954845E-01	1.182908
Newton Iteration 2	7.023705E-01	6.954845E-01	1.192898

Major Iteration is 4	7.023705E-01	6.954845E-01	1.192898
Newton Iteration 1	7.244951E-01	8.294941E-01	1.155262
Newton Iteration 2	7.244951E-01	8.294941E-01	1.154576
Newton Iteration 3	7.244951E-01	8.294941E-01	1.154576
Major Iteration is 5	7.244951E-01	8.294941E-01	1.154576
Newton Iteration 1	8.171917E-01	8.123699E-01	1.132264
Newton Iteration 2	8.171917E-01	8.123699E-01	1.132252
Major Iteration is 6	8.171917E-01	8.123699E-01	1.132252
Newton Iteration 1	8.266209E-01	8.702295E-01	1.115586
Newton Iteration 2	8.266209E-01	8.702295E-01	1.115319
Major Iteration is 7	8.266209E-01	8.702295E-01	1.115319
Newton Iteration 1	8.695048E-01	8.649387E-01	1.102977
Newton Iteration 2	8.695048E-01	8.649387E-01	1.102975
Major Iteration is 8	8.695048E-01	8.649387E-01	1.102975
Newton Iteration 1	8.725953E-01	8.935763E-01	1.093757
Newton Iteration 2	8.725953E-01	8.935763E-01	1.093664
Major Iteration is 9	8.725953E-01	8.935763E-01	1.093664
Newton Iteraton 1	8.981055E-01	8.933979E-01	1.084844

Major Iteration is 10	8.981055E-01	8.933979E-01	1.084844
Newton Iteration 1	8.982655E-01	9.092551E-01	1.079759
Newton Iteration 2	8.982655E-01	9.092551E-01	1.079724
Major Iteration is 11	8.982655E-01	9.092551E-01	1.079724
Newton Iteration 1	9.169551E-01	9.119876E-01	1.071955
Newton Iteration 2	9.169551E-01	9.119876E-01	1.071953
Major Iteration is 12	9.169551E-01	9.119876E-01	1.071953
Newton Iteration 1	9.157906E-01	9.216313E-01	1.069103
Newton Iteration 2	9.157906E-01	9.216313E-01	1.069088
Major Iteration is 13	9.157906E-01	9.216313E-01	1.069088
Newton Iteration 1	9.326895E-01	9.273270E-01	1.060590
Newton Iteration 2	9.326895E-01	9.273270E-01	1.060583
Major Iteration is 14	9.326895E-01	9.273270E-01	1.060583
Newton Iteration 1	9.308044E-01	9.336557E-01	1.059025
Newton Iteration 2	9.308044E-01	9.336557E-01	1.059017
Major Iteration is 15	9.308044E-01	9.336557E-01	1.059017
Newton Iteration 1	9.504051E-01	9.449192E-01	1.046882
Newton Iteration 2	9.504051E-01	9.449192E-01	1.046854
Major Iteration is 16	9.504051E-01	9.449192E-01	1.046854

Newton Iteration 1	9.481245E-01	9.490895E-01	1.046166
Newton Iteration 2	9.481245E-01	9.490895E-01	1.046162
Major Iteration is 17	9.481245E-01	9.490895E-01	1.046162
Newton Iteration 1	9.893972E-01	9.869866E-01	1.011940
Newton Iteration 2	9.893972E-01	9.869866E-01	1.011498
Newton Iteration 3	9.893972E-01	9.869866E-01	1.011497
Newton Iteration 18	9.893972E-01	9.869866E-01	1.011497
Newton Iteration 1	9.882026E-01	9.882099E-01	1.011491
Newton Iteration 2	9.882026E-01	9.882099E-01	1.011490
Major Iteration is 19	9.882026E-01	9.882099E-01	1.011490
Newton Iteration 1	9.883588E-01	9.884502E-01	1.011302
Major Iteration is 20	9.883588E-01	9.884502E-01	1.011302
Newton Iteration 1	9.884169E-01	9.884184E-01	1.011290
Major Iteration is 21	9.884169E-01	9.884184E-01	1.011290
Newton Iteration 1	9.884445E-01	9.884901E-01	1.011243
Major Iteration is 22	9.884445E-01	9.884901E-01	1.011243
Newton Iteration 1	9.884868E-01	9.884820E-01	1.011226
Major Iteration is 23	9.884868E-01	9.884820E-01	1.011226

Newton Iteration			
1	9.884936E-01	9.885237E-01	1.011203
Major Iteration is			
24	9.884936E-01	9.885237E-01	1.011203
Newton Iteration			
1	9.885446E-01	9.885290E-01	1.011176
Major Iteration is			
25	9.885446E-01	9.885290E-01	1.011176
Newton Iteration			
1	9.885416E-01	9.885628E-01	1.011162
Major Iteration is			
26	9.885416E-01	9.885628E-01	1.011162
Newton Iteration			
1	9.886321E-01	9.885989E-01	1.011101
Major Iteration is			
27	9.886321E-01	9.885989E-01	1.011101
Newton Iteration			
1	9.886205E-01	9.886337E-01	1.011090
Major Iteration is			
28	9.886205E-01	9.886337E-01	1.011090
Newton Iteration			
1	9.896783E-01	9.895232E-01	1.010162
Major Iteration is			
29	9.896783E-01	9.895232E-01	1.010162
Newton Iteration			
1	9.896063E-01	9.896122E-01	1.010154
Major Iteration is			
30	9.896063E-01	9.896122E-01	1.010154
Newton Iteration			
1	9.898015E-01	9.898821E-01	1.009932
Major Iteration is			
31	9.898015E-01	9.898821E-01	1.009932
Newton Iteration			
1	9.898502E-01	9.898508E-01	1.009924
Major Iteration is			
32	9.898502E-01	9.898508E-01	1.009924

```
Newton Iteration
     1              9.898661E-01   9.898952E-01   1.009895

Major Iteration is
     33             9.898661E-01   9.898952E-01   1.009895

Newton Iteration
     1              9.898943E-01   9.898910E-01   1.009884

Major Iteration is
     34
                    9.898943E-01   9.898910E-01   1.009884

Newton Iteration
     1              9.898989E-01   9.899196E-01   1.009868

Major Iteration is
     35             9.898989E-01   9.899196E-01   1.009868

Newton Iteration
     1              9.899330E-01   9.899229E-01   1.009850

Major Iteration is
     36             9.899330E-01   9.899229E-01   1.009850

Newton Iteration
     1              9.899313E-01   9.899455E-01   1.009840

Major Iteration is
     37             9.899313E-01   9.899455E-01   1.009840

Newton Iteration
     1              9.899974E-01   9.899731E-01   1.009795

Major Iteration is
     38             9.899974E-01   9.899731E-01   1.009795

Newton Iteration
     1              9.899887E-01   9.899976E-01   1.009787

Major Iteration is
     39             9.899887E-01   9.899976E-01   1.009787

Newton Iteration
     1              9.908336E-01   9.907160E-01   1.009038

Major Iteration is
     40             9.908336E-01   9.907160E-01   1.009038

Newton Iteration
     1              9.907789E-01   9.907826E-01   1.009033

Major Iteration is
     41             9.907789E-01   9.907826E-01   1.009033
```

```
Newton Iteration
     1              9.908632E-01   9.909097E-01    1.008931

Major Iteration is
     42             9.908632E-01   9.909097E-01    1.008931

Newton Iteration
     1              9.908932E-01   9.908929E-01    1.008925

Major Iteration is
     43             9.908932E-01   9.908929E-01    1.008925

Newton Iteration
     1              9.909014E-01   9.909202E-01    1.008908

Major Iteration is
     44             9.909014E-01   9.909202E-01    1.008908

Newton Iteration
     1              9.909233E-01   9.909188E-01    1.008898

Major Iteration is
     45             9.909233E-01   9.909188E-01    1.008898

Newton Iteration
     1              9.909242E-01   9.909359E-01    1.008889

Major Iteration is
     46             9.909242E-01   9.909359E-01    1.008889

Newton Iteration
     1              9.909600E-01   9.909470E-01    1.008867

Major Iteration is
     47             9.909600E-01   9.909470E-01    1.008867

Newton Iteration
     1              9.909559E-01   9.909636E-01    1.008861

Major Iteration is
     48             9.909559E-01   9.909636E-01    1.008861

Newton Iteration
     1              9.911280E-01   9.910842E-01    1.008720

Major Iteration is
     49             9.911280E-01   9.910842E-01    1.008720

Newton Iteration
     1              9.911088E-01   9.911141E-01    1.008715

Major Iteration is
     50             9.911088E-01   9.911141E-01    1.008715
```

```
Newton Iteration
     1              9.982583E-01    9.983505E-01    1.001708

Newton Iteration
     2              9.982583E-01    9.983505E-01    1.001689

Major Iteration is
     51             9.982583E-01    9.983505E-01    1.001689

Newton Iteration
     1              9.983044E-01    9.983044E-01    1.001689

Major Iteration is

     52             9.983044E-01    9.983044E-01    1.001689

Penyelesaian pun diperolehi
```

Output berpemangkin

```
Newton Iteration
     1              5.815862E-01    1.230800E-01    1.302199

Newton Iteration
     2              5.815862E-01    1.230800        1.150706

Newton Iteration
     3              5.815862E-01    1.230800        1.115279

Newton Iteration
     4              5.815862E-01    1.230800        1.113518

Newton Iteration
     5              5.815862E-01    1.230800        1.113514

Major Iteration is
     1              5.815862E-01    1.230800        1.113514

Newton Iteration
     1              9.108605E-01    9.114786E-01    1.095131

Newton Iteration
     2              9.108605E-01    9.114786E-01    1.074965

Newton Iteration
     3              9.108605E-01    9.114786E-01    1.074383

Newton Iteration
     4              9.108605E-01    9.114786E-01    1.074382

Major Iteration is
     2              9.108605E-01    9.114786E-01    1.074382
```

Newton Iteration			
1	9.362364E-01	9.339874E-01	1.056839
Newton Iteration			
2	9.362364E-01	9.339874E-01	1.056748
Major Iteration is			
3	9.362364E-01	9.339874E-01	1.056748
Newton Iteration			
2	9.655662E-01	9.611036E-01	1.034044
Newton Iteration			
2	9.655662E-01	9.611036E-01	1.033870
Major Iteration is			
2	9.655662E-01	9.611036E-01	1.033870
Newton Iteration			
1	9.744930E-01	9.752684E-01	1.023847
Newton Iteration			
2	9.744930E-01	9.752684E-01	1.023792
Major Iteration is			
5	9.744930E-01	9.752684E-01	1.023792
Newton Iteration			
1	9.756504E-01	9.759088E-01	1.022981
Major Iteration is			
6	9.756504E-01	9.759088E-01	1.022981
Newton Iteration			
1	9.767827E-01	9.768969E-01	1.022024
Newton Iteration			
2	9.767827E-01	9.768969E-01	1.022023
Major Iteration is			
7	9.767827E-01	9.768969E-01	1.022023
Newton Iteration			
1	9.828417E-01	9.828571E-01	1.016528
Newton Iteration			
2	9.828417E-01	9.828571E-01	1.016518
Major Iteration is			
8	9.828417E-01	9.828571E-01	1.016518
Newton Iteration			
1	9.833692E-01	9.833376E-01	1.016049

Major Iteration is			
9	9.833692E-01	9.833376E-01	1.016049
Newton Iteration			
1	9.844812E-01	9.842448E-01	1.015108
Newton Iteration			
2	9.844812E-01	9.842448E-01	1.015108
Major Iteration is			
10	9.844812E-01	9.842448E-01	1.015108
Newton Iteration			
1	9.879526E-01	9.880409E-01	1.011694
Newton Iteration			
2	9.879526E-01	9.880409E-01	1.011689
Major Iteration is			
11	9.879526E-01	9.880409E-01	1.011689
Newton Iteration			
1	9.880858E-01	9.881139E-01	1.011591
Major Iteration is			
12	9.880858E-01	9.881139E-01	1.011591
Newton Iteration			
1	9.883124E-01	9.883246E-01	1.011384
Major Iteration is			
13	9.883124E-01	9.883246E-01	1.011384

Penyelesaian pun diperolehi

3. Meminimumkan $f(x) = .01(x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1^2)^2$

tertakluk kepada $x_1 + x_3^2 + 1 = 0$

Output dengan kaedah asal:

Dengan menggunakan kaedah asal, sebanyak 378 nilai cerun perlu dihitung. Ini bermakna 378 lelaran diperlukan untuk mencapai optimum berkekangan. Adakalanya, sebelum asas ditukar, tidak kurang dari 20 lelaran diwajibkan.

Output dengan kaedah asal

```
Newton Iteration
       1          -2.002072E-01      1.255476       -1.480315E-04

Newton Iteration
       2          -2.002072E-01      1.089823       -1.480315E-04

Newton Iteration
       3          -2.002072E-01      1.077233       -1.480315E-04

Newton Iteration
       4          -2.002072E-01      1.077159       -1.480315E-04

Major Iteration is
       1          -2.002072E-01      1.077159       -1.480315E-04

Newton Iteration
       1           1.344662        -6.996643E-01   -8.282784E-01

Newton Iteration
       2           1.344662         5.966924E-01   -8.282784E-01

Newton Iteration
       3           1.344662        -8.115211E-01   -8.282784E-01

Newton Iteration
       4           1.344662         4.1029289E-01  -8.282784E-01

Newton Iteration
       5           1.344662        -1.408917       -8.282784E-01

Newton Iteration
       6           1.344662        -2.344167E-01   -8.282784E-01

Newton Iteration
       7           1.344662         2.707886       -8.282784E-01

Newton Iteration
       8           1.344662         1.109380       -8.282784E-01

Newton Iteration
       9           1.344662        -4.226490E-02   -8.282784E-01

Newton Iteration
       10          1.344662         15.647880      -8.282784E-01

Newton Iteration
       11          1.344662         7.781621       -8.282784E-01

Newton Iteration
       12          1.344662         3.805706       -8.282784E-01

Newton Iteration
       13          1.344662         1.728838       -8.282784E-01
```

```
Newton Iteration
       14          1.344662          4.813585E-01  -8.282784E-01

Newton Iteration
       15          1.344662         -1.135113      -8.282784E-01

Newton Iteration
       16          1.344662          1.586488E-02  -8.282784E-01

Newton Iteration
       17           1.344662      -41.735190       -8.282784E-01

Newton Iteration
       18           1.344662      -20.851730       -8.282784E-01

Newton Iteration
       19           1.344662      -10.394100       -8.282784E-01

Newton Iteration
       20           1.344662       -5.133338       -8.282784E-01
```

Perhatikan bahawa bilangan lelaran Newton pada lelaran utama melebihi 20 lelaran.

Output berpemangkin

```
Newton Iteration
       1            6.551732     0.000000E+00        0.000000+00

Newton Iteration
       2            3.114497     0.000000E+00        0.000000+00

Newton Iteration
       3            1.480163     0.000000E+00        0.000000+00

Newton Iteration
       4         8.057121E-01     0.000000E+00       0.000000+00

Newton Iteration
       5         6.315221E-01     0.000000E+00       0.000000+00

Newton Iteration
       6         6.181144E-01     0.000000E+00       0.000000+00

Newton Iteration
       7         6.180340E-01     0.000000E+00       0.000000+00

Major Iteration is
       1         6.180340E-01     0.000000E+00       0.000000+00

Newton Iteration
       1            4.237833     0.000000E+00       0.000000+00
```

Newton Iteration

2	2.000833	0.000000E+00	0.000000+00

Newton Iteration

3	1.000333	0.000000E+00	0.000000+00

Newton Iteration

4	6.667408E-01	0.000000E+00	0.000000+00

Newton Iteration

5	6.190506E-01	0.000000E+00	0.000000+00

Newton Iteration

6	6.180344E-01	0.000000E+00	0.000000+00

Major Iteration is

2	6.180344E-01	0.000000E+00	0.000000+00

Penyelesaian pun diperolehi.

4. Meminimumkan $f(x) = (2x_1 - 0.5x_1^2) + (3x_2 - 0.5x_2^2)$

tertakluk kepada $x_1^2 + x_1^2 + x_1 + x_1 - 1 = 0$

$-2 \leq x_j \leq 2 \quad , \; j = 1,2,3$

Output dengan kaedah asal

Newton Iteration

1	1.460567	2.134690	4.911455E-01

Newton Iteration

2	1.460567	2.134690	-2.259354

Newton Iteration

3	1.460567	2.134690	-5.851483E-01

Newton Iteration

4	1.460567	2.134690	1.809942

Newton Iteration

5	1.460567	2.134690	2.252345E-01

Newton Iteration

6	1.460567	2.134690	-5.349617

Newton Iteration
7 1.460567 2.134690 -2.444832

Newton Iteration
8 1.460567 2.134690 -7.191981E-01

Newton Iteration
9 1.460567 2.134690 1.351034

Newton Iteration
10 1.460567 2.134690 -2.351072E-01

Newton Iteration
11 1.460567 2.134690 5.115309

Newton Iteration
12 1.460567 2.134690 2.317144

Newton Iteration
13 1.460567 2.134690 6.276240E-01

Newton Iteration
14 1.460567 2.134690 -1.646412

Newton Iteration
15 1.460567 2.134690 -7.595481E-02

Newton Iteration
16 1.460567 2.134690 4.916.159600

Newton Iteration
17 1.460567 2.134690 8.003665

Newton Iteration
18 1.460567 2.134690 3.848117

Newton Iteration
19 1.460567 2.134690 1.604348

Newton Iteration
20 1.460567 2.134690 3.533073E-02

Newton Iteration
21 1.460567 2.134690 34.804260

[Perhatikan bahawa bilangan lelaran Newton melebihi 20 lelaran sebelum tiba pada lelaran utama pertama].memberangsangkan]

```
                         Output berpemangkin

Newton Iteration

        1           -1.000000     0.000000

Major Iteration Is

        1           -1.00000      0.000000

Penyelesaian pun diperolehi
```

RUJUKAN

[1] J. Abadie and Carpentier, *Generalization de la methode du gradient reduit de Wolfe au cas de contraintes nonlineares*, Proc. IFORS Conference (1962).

[2] E.M.L. Beale, "*A derivation of conjugate gradients" in numerical methods for nonlinear optimization*, (F.A. Lootsma, ed.) Acad. Press, London (1972), 39–43.

[3] A.G. Buckley, *A combined conjugate gradient quasi-Newton minimization algorithm*, Math. Prog **15** (1978), 200–210.

[4] L.C.M. Dizon, *Conjugate gradient algorithms: Quadratic termination without linear searches*, The Hatfield Polytechnic, Numerical Optimization Centre **T.r. 38** (1972).

[5] R. Fletcher and C.M. Reeves, *Function minimization by conjugate gradients*, The Computer Jounal **7** (1964), 149–153.

[6] M.R. Hestenes and E. Steifel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, Journal of Research of the Nat. Bureau of Standards **49** (1952), 409–436.

[7] A.J. Ithnin and Rio Hirowati, *A study of conjugate gradient methods*, Jurnal Sains Malaysiana **11** (1989), 71–77.

[8] A.J. Ithnin and Rio Hirowati, *Improved conjugate gradient algorithms*, Res. Rep. Universiti Malaya **14** (1989).

[9] A.J. Ithnin and Rio Hirowati, *Computer implementations of the conjugate gradient algorithms*, Jurnal Komputer Malysia (in press) (1989).

[10] De Le, *A fast and robust unconstrained optimization method requiring minimum storage*, Math. Prog **32** (1985), 41–68.

[11] L. Nazareth, *A conjugate direction algorithm without line searches*, working paper, Applied Maths. Division, Argonne Nat. Labs **I11** (1976).

[12] A. Perry, *A modified conjugate gradient algorithm*, Operation Resarch **26** (1978), 1073–1078.

[13] E. Polak and G. Ribiere, *Note surla convergence de methodes conjugees*, Revue Francaise Inform. Rech. Operation **16-R1**, 35–43.

[14] M.J.D. Powell, *Restart procedures for conjugate gradient method*, Math. Prog **12** (1977), 241–254.

[15] D.F. Shanno, *Conjugate gradient methods with inexact searches*, Math of Operations Research, Rep.no 3910780.

[16] P. Wolfe, *The simplex method for quadratic programming*, Econometrica **27** (1959), 382–398.