Matematika, 1997, Jilid 13, hlm. 21–28

Teknik Tak Berkekangan Bagi Pengaturcaraan Kuadratik

Ismail Bin Mohd & Yosza Dasril
Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Sastera Ikhtisas
Universiti Putra Malaysia Trengganu
Mengabang Telipot, 21030 Kuala Trengganu, Malaysia

Abstrak Dalam makalah ini diperkenalkan suatu kaedah yang berpandukan pada sekumpulan kekangan tertentu yang dijelmakan tanpa melibatkan pekali Lagrange kepada set titik sehingga teknik pengoptimuman tak berkekangan boleh digunakan bagi penyelesaian masalah pengaturcaraan quadratik dalam kasus dua dimensi yang melibatkan rantau tersaur tertutup dan cembung sahaja.

Katakunci Pengaturcaraan Kuadratik, Pekali Lagrange, Pengoptimuman

Abstract *In this paper, we introduce a method based on several constraints which are transformed into a set of points without involving the Lagrange multipliers in such a way that the unconstrained optimization technique can be applied for solving the quadratic programming problem in the two dimensional case which involves the closed and convex feasible region only.*

Keywords *Quadratic Programming, Lagrange Multiplier, Optimization*

1 Pengenalan

Masalah pengaturcaraan kuadratik adalah suatu masalah yang melibatkan fungsi kuadratik sebagai fungsi objektifnya dan beberapa fungsi linear sebagai kekangannya dan sudah tentu pembolehubah yang diuruskan adalah tak negatif.

Dalam rujukan, akan dijumpai beberapa kaedah penyelesaian seperti kaedah Wolfe [5], dan lain-lain yang dikemukakan bagi menyelesaikan masalah pengaturcaraan kuadratik ini. Dalam [3], Theil dan Van de Panne telah menunjukkan suatu kaedah penyelesaian bagi masalah pengaturcaraan kuadratik dan didapati dalam kaedahnya, beliau telah tidak menggunakan sedikit pun maklumat tambahan seperti yang dilakukan oleh Wolfe [5] bagi menjayakan maksud mereka.

Dalam makalah ini, akan ditunjukkan suatu kaedah yang merupakan pengubahsuaian terhadap kaedah Theil dan Van de Panne [3] bagi tujuan yang sama, tetapi dalam pengubahsuaian tersebut akan didapati wujudnya peranan beberapa kekangan tertentu yang disebut pendominan dalam membantu tercapainya penyelesaian yang dikehendaki dengan penuh keyakinan.

Makalah ini akan disusun dengan rapi agar hasrat pengemukaan kaedah penyelesaian dapat dicapai dengan sepenuhnya. Dalam Bahagian 2, bentuk masalah pengaturcaraan kuadratik yang akan dipertimbangkan akan diberikan secara ringkas, kemudian diikuti dengan penerangan tentang konsep ketersauran dalam Bahagian 3.

Penyorotan terhadap kekangan pendominan yang memainkan peranan penting dalam pencarian penyelesaian masalah pengaturcaraan kuadratik, akan diberikan dalam Bahagian 4 dan algoritma mengenainya mengikut ide yang disampaikan oleh Theil dan Van de Panne [3], akan diberikan dalam Bahagian 5. Seperti yang dinyatakan di awal bahagian pengenalan ini, pengubahsuaian kaedah Theil dan Van de Panne [3] akan dimasyhurkan dalam Bahagian 6, yang akan diikuti pula dengan contoh penggunaan kaedah-kaedah yang telah disebut tadi dalam Bahagian 7. Akhir sekali, sebagai mengakhiri makalah ini, akan diberikan perbahasan dan kesimpulan serta perkembangan penyelidikan yang berkaitan dengan ini di dalam Bahagian 8.

2 Masalah Pengaturcaraan Kuadratik

Dalam makalah ini, akan dipertimbangkan masalah pengaturcaraan kuadratik yang bentuknya adalah seperti yang berikut. Minimumkan fungsi cembung secara tegas

$$f(x) = x^T Ax/2 + b^T x \tag{2.1}$$

tertakluk kepada kekangan

$$Bx \leq c \tag{2.2}$$

dan syarat ketaknegatifan

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{2.3}$$

dengan $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ialah matriks simetri, $b = (b_1, ..., b_n)^T$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ dan $c = (c_1, ..., c_m)^T$.

Walaupun bentuk kekangan (2.2) adalah khusus, tetapi ini sudah memadai bagi mewakili bentuk yang lain menerusi beberapa manipulasi dan penjelmaan. Di samping itu, kita juga akan memberikan beberapa contoh pengiraan yang melibatkan pembolehubah dalam dua dimensi sahaja sebagai memudahkan perbincangan.

3 Ketersauran

Walaupun ketersauran telah menjadi perkara lumrah bagi ahli pengoptimuman, kita masih perlu memberikannya di sini dengan maksud untuk penggunaan yang berterusan dalam makalah ini.

Dengan memisalkan $B = (B_1, ..., B_m)^T$ dan setiap $B_j (j = 1, ..., m)$ pula mengambil bentuk

$$B_j = (b_{j1}, ..., b_{jn})^T \quad (j = 1, ..., m), \tag{3.1}$$

kita dapat menulis setiap anggota bagi (2.2) sebagai

$$B_j^T x \leq c_j \quad (j = 1, ..., m), \tag{3.2}$$

dengan sifat bahawa kekangan ke-j aktif jika $B_j^T x = c_j$, tak aktif jika $B_j^T x < c_j$ dan dilanggar oleh x jika $B_j^T x > c_j$.

Jelas seperti yang dipersetujui bahawa, apabila sifat aktif atau tak aktif dipenuhi oleh sesuatu penyelesaian, maka penyelesaian itu disebut tersaur dan begitu pula sebaliknya dipanggil tak tersaur.

4 Pengaruh Kekangan

Dalam bahagian ini, akan dihuraikan tentang kesan kewujudan sesuatu kekangan terhadap sesuatu penyelesaian masalah pengaturcaraan kuadratik. Menerusi peranan yang dimainkan oleh suatu kekangan, akan dapat ditentukan kekangan yang berpengaruh atau disebut pendominan seperti yang dapat disaksikan nanti.

Untuk mencapai tujuan ini, diperkenalkan suatu set F yang ditakrifkan oleh

$$F = \{x | x \in R^n,\, Bx \leq c, x \geq 0\} \tag{4.1}$$

adalah merupakan set penyelesaian masalah pengaturcaraan kuadratik (2.1)-(2.3).

Sekarang, misalkan pula $x^{(0)}$ yang ditakrifkan oleh

$$x^{(0)} = -A^{-1}b \tag{4.2}$$

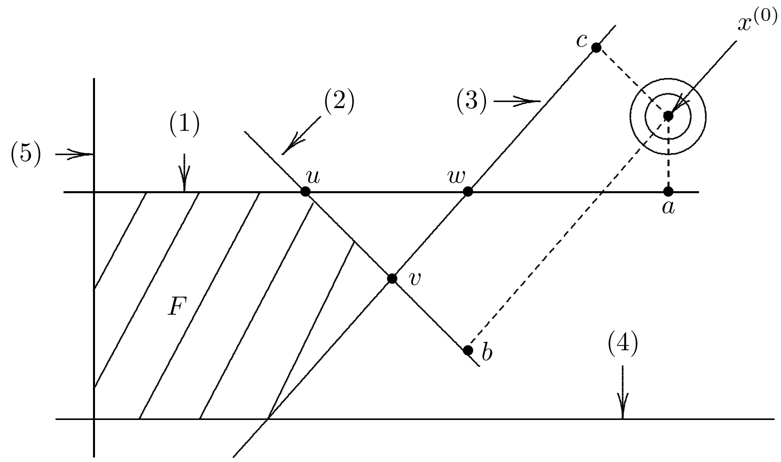
sebagai peminimum tak berkekangan bagi $f(x)$. Jika $x^{(0)}$ tersaur, yakni memenuhi semua kekangan atau $x^{(0)} \in F$, maka $x^{(0)}$ menjadi penyelesaian optimum bagi masalah (2.1)-(2.3). Jika $x^{(0)} \notin F$, maka sudah tentu penyelesaian masalah (2.1)-(2.3) yang dilambangi dengan x^* akan terletak pada sempadan rantau tersaur ([1], [2], [3]). Jadi, timbul pertanyaan bahawa bagaimanakah menentukan x^* tersebut apabila $x^{(0)} \notin F$? Bagi penentuan x^* sedemikian, kita akan ilustrasikan menerusi contoh yang digambarkan seperti dalam Rajah 1.

Dalam Rajah 1, terdapat lima kekangan (1) hingga (5), F ialah rantau tersaur, cembung dan tertutup, $x^{(0)}$ pula ialah peminimum tak berkekangan bagi $f(x)$ dan fungsi kuadratik yang dipilih ialah yang mempunyai kontor berbentuk bulatan sepusat seperti yang ditunjukkan mengelilingi titik $x^{(0)}$. Titik $x^{(0)}$ tidak menjadi peminimum berkekangan kerana $x^{(0)}$ melanggar kekangan (1), (2) dan (3).

Dengan memisalkan $V[x]$ sebagai set indeks kekangan yang dilanggar oleh x, maka diperoleh $V[x^{(0)}] = \{1, 2, 3\}$ yang kita sebut "kumpulan kekangan dominan". Dengan perkataan lain, jika $V[x^{(0)}] = \emptyset$, maka $x^{(0)}$ menjadi penyelesaian optimum masalah (2.1)-(2.3).

Oleh kerana kekangan-kekangan (1), (2) dan (3) sahaja yang mengganggu titik $x^{(0)}$ menjadi peminimum berkekangan masalah (2.1)-(2.3), maka selanjutnya, kita hanya perlu mempertimbangkan peminimuman berkekangan yang berkaitan dengan kekangan (1), (2) dan (3) sahaja ([1]).

Oleh kerana $V[x^{(0)}] = \{1, 2, 3\} \neq \emptyset$, maka tindakan selanjutnya ialah melakukan peminimuman berkekangan terhadap kekangan dalam set S_1 untuk $S_1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ seperti yang berikut.



Rajah 1:

Untuk $S_1 = \{1\}$, peminimuman $f(x)$ tertakluk kepada kekangan (1) akan menghasilkan peminimum $x[S_1] = a$ seperti ditunjukkan dalam Rajah 1. Akan tetapi, $V[a] = \{2, 3\}$ yang membawa erti a melanggar kekangan (2) dan (3).

Untuk $S_1 = \{2\}$, peminimuman $f(x)$ tertakluk kepada kekangan (2), akan menghasilkan peminimum $x[S_1] = b$ seperti ditunjukkan dalam Rajah 1. Akan tetapi, $V[b] = \{3\}$ yang membawa erti b melanggar kekangan (3).

Untuk $S_1 = \{3\}$, peminimuman $f(x)$ tertakluk kepada kekangan (3), akan menghasilkan peminimum $x[S_1] = c$ seperti ditunjukkan dalam Rajah 1. Akan tetapi, $V[c] = \{1, 2\}$ yang membawa erti c melanggar kekangan (1) dan (2).

Jadi, didapati bahawa $V[x[S_1]] \neq \emptyset$ untuk $S_1 = \{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Oleh kerana $V[x[S_1]] \neq \emptyset$, maka perlu dilakukan pengoptimuman terhadap $f(x)$ tertakluk kepada $S_2 \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ seperti yang disarankan dalam [3].

Apabila $S_2 = \{1, 2\}$ diperoleh $x[S_2] = u$ dengan $V[u] = \emptyset$.

Apabila $S_2 = \{1, 3\}$ diperoleh $x[S_2] = w$ dengan $V[w] \neq \emptyset$.

Apabila $S_2 = \{2, 3\}$ diperoleh $x[S_2] = v$ dengan $V[v] = \emptyset$.

Oleh kerana $V[u] = \emptyset$ dan $V[v] = \emptyset$, maka penyelesaian optimum adalah sama ada di u atau di v. Jadi, perlu disemak di u dan di v seperti yang berikut.

Ujian untuk u :

Untuk kes ini $S_2 = \{1, 2\}$. Dengan menyingkirkan kekangan (1) diperoleh $S_3 = \{2\}$. Maka $x[S_3] = b$, tetapi titik b memenuhi kekangan (1). Jadi u tidak boleh menjadi penyelesaian optimum.

Ujian untuk v :

Untuk kes ini, $S_2 = \{2,3\}$. Dengan menyingkirkan kekangan (2) diperoleh $S_3 = \{3\}$. Maka $x[S_3] = c$ yang jelas melanggar kekangan (2). Misalkan $S_3 = \{2\}$ setelah menyingkir kekangan (3). Maka $x[S_3] = b$ yang juga melanggar kekangan (3). Jadi v memenuhi semua ujian untuk pengoptimuman. Oleh itu $x^* = v$.

5 Algoritma TV

Algoritma TV yang dikemukakan dalam [3] berdasarkan contoh pengiraan dalam Bahagian 4 adalah meliputi beberapa langkah seperti yang berikut.

Langkah 1 :

Kira $x^{(0)} = -A^{-1}b$ dan $B_j^T x^{(0)}$ untuk semua $j = 1, ..., m$. Dapatkan

$$V[x^{(0)}] = \{j | j \in \{1, ..., m\} \ni B_j^T x^{(0)} > c_j\}.$$

Jika $V[x^{(0)}] = \emptyset$, maka $x^* = x^{(0)}$ dan berhenti.

Langkah 2 :

Misalkan C_k sebagai pungutan subset $S_k \subseteq \{1, ..., m\}$ yang menyebabkan $V[x[S_k]] \neq \emptyset$. Pertimbangkan semua set berbentuk $S_{k+1} = S_k \cup \{k\}$ dengan $k \in V[x[S_k]]$, kirakan $x[S_{k+1}]$ dan dapatkan $V[x[S_{k+1}]]$.

Langkah 3 :

Jika $V[x[S_{k+1}]] = \emptyset$, maka singkirkan setiap kekangan satu per satu yang indeksnya berada dalam S_{k+1} daripada peminimuman selanjutnya, kemudian minimumkan $f(x)$ tertakluk kepada kekangan baki yang indeksnya berada dalam Sk+1 sebagai kekangan kesamaan menggunakan kaedah Lagrange. Jika penyelesaian bagai masalah-masalah ini melanggar kekangan yang disingkir daripada S_{k+1}, maka lakukan $S^* = S_{k+1}$, $x^* = x[S_{k+1}]$ dan berhenti, selainnya dapatkan C_{k+1} sebagai pungutan semua subset yang menyebabkan $V[x[S_{k+1}]] \neq \emptyset$ kemudian mulai pada langkah 2.

6 Algoritma MY

Algoritma TV boleh diubahsuai supaya dapat digunakan dengan lebih mudah dan dapat memberikan hasil yang sama dalam masa yang singkat berbanding dengan algoritma TV. Kita namakan algoritma pengubahsuaian ini sebagai Algoritma MY dan penerangan penggunaannya serta langkah-langkah penyelesaiannya adalah seperti yang berikut.

Kita huraikan kaedah pengubahsuaian ini menerusi pengiraan atau penentuan peminimumam berkekangan masalah pengaturcaraan yang bentuk kekangannya seperti yang diberikan dalam Rajah 1. Jelas daripada Rajah 1, didapati bahawa peminimum tak berkekangan $x^{(0)}$ mencabul kekangan bernombor (1), (2) dan (3). Menerusi pengiraan berdasarkan kaedah yang ditunjukkan dalam [2] menggunakan kaedah penjelajahan di sepanjang kesamaan kekangan, peminimum tak berkekangan fungsi objektif terhadap kesamaan kekangan (1), (2) dan (3), adalah dinyatakan oleh titik-titik a, b dan c secara tertib seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1 dan jelas titik-titik tersebut adalah tak tersaur. Akan tetapi sudah diketahui [1] bahawa peminimum berkekangan bagi masalah yang dihadapi adalah terletak pada sempadan rantau tersaur yang dinyatakan oleh kesamaan kekangan (1), (2) atau (3). Menerusi pengiraan seperti yang diberikan dalam [1], pengganti tersaur bagi titik-titik a, b dan c sebagai peminimum tak berkekangan fungsi objektif tertakluk kepada kesamaan kekangan-kekangan tersebut ialah u, v dan v secara tertib.

Mengikut teori dan penerangan seperti yang dikemukakan dalam [1] dan tanpa perlu mempertimbangkan kes $S_2 = \{1, 2\}$ dan kes $S_2 = \{2, 3\}$ seperti yang diperlihatkan oleh algoritma TV, jelas v ialah penyelesaian optimum masalah yang diberikan.

Dengan penjelasan seperti yang digambarkan dalam pengiraan penyelesaian optimum di atas, dapatlah diturunkan suatu algoritma yang dinamakan Algoritma MY seperti yang berikut.

Algoritma MY :

Langkah 1 :

Kira $x^{(0)} = -A^{-1}b$ dan $B_j^T x^{(0)}$ untuk semua $j = 1, ..., m$. Dapatkan

$$V[x^{(0)}] = \{j | j \in \{1, ..., m\} \ni B_j^T x^{(0)} > c_j\}.$$

Jika $V[x^{(0)}] = \emptyset$, maka $x^* = x^{(0)}$ dan berhenti.

Langkah 2 :

Dengan menggunakan kaedah penjelajahan di sepanjang kesamaan kekangan, minimumkan $f(x)$ tertakluk kepada setiap kesamaan kekangan yang indeksnya dalam $V[x^{(0)}]$ dan lambangilah peminimum berkekangan ini sebagai x_j^* dengan $j \in V[x^{(0)}]$. Kemudian semak ketersauran setiap peminimum berkekangan tadi. Jika ada satu $k \in V[x^{(0)}]$ sehingga x_k^* tersaur , maka x_k^* ialah penyelesaian optimum masalah yang diberi dan berhenti. (Penerangan tentang kewujudan lebih dari satu k diberikan dalam [1] dan [2]).

Langkah 3 :

Susur kesamaan kekangan yang indeksnya dalam $V[x^{(0)}]$ untuk memperoleh suatu peminimum berkekangan tersaur sebagai pengganti kepada peminimum berkekangan tak tersaur yang diperoleh dalam langkah 2. Dengan kaedah yang dijelaskan di atas, maka akan diperoleh suatu siri peminimum tersaur yang satu daripadanya menjadi penyelesaian optimum masalah yang diberikan.

7 Keputusan Berangka

Dalam bahagian ini, disenaraikan beberapa contoh pengiraan bagi menunjukkan keberkesanan algoritma MY berbanding dengan algoritma TV seperti yang dibincangkan sebelum ini. Dalam setiap contoh yang berikut, $x^{(0)}$ adalah pengoptimum tak berkekangan bagi fungsi $f(x)$, sementara x^* pula secara umumnya ialah pengoptimum berkekangan bagi fungsi $f(x)$ terhadap kesamaan kekangan yang berkaitan. Jika $x^{(0)}$ tersaur, maka diambil $x^* = x^{(0)}$ tanpa melalui pengiraan yang lazim bagi mendapatkan x^*. f^* pula ialah nilai optimum bagi setiap masalah yang diberikan.

Contoh 1[4]

Maksimumkan $-x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 + x_2$, tertakluk kepada

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jelas didapati $x^{(0)} = (5, 1.5)$ terletak diluar rantau tersaur. Dengan demikian pemaksimum tersaur yang diperlukan ialah $x^* = (4/11, 3/11)$ dengan nilai maksimum $f^* = 5/11$.

Contoh 2[4]
Maksimumkan $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 5x_2$, tertakluk kepada

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 20, \\ 3x_1 - 5x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Didapati $x^{(0)} = x^* = (4.5, 3.6)$ dan $f^* = 13.25$.

Contoh 3[4]
Maksimumkan $-x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2 + 2x_1 + 5x_2$, tertakluk kepada

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 7, \\ 3x_1 + x_2 &= 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $x^{(0)} = (9, 5.333...)$ yang tak tersaur sehingga penyelesaian kepada masalah ialah $x^* = (71/74, 83/74)$ yang terletak pada kekangan kedua dengan $f^* = 897/148 = 6.196$.

Contoh 4[4]
Minimumkan $x_1^2 - 2x_1 - x_2$, tertakluk kepada

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\leq 12, \\ x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Hasil pengiraan memberikan nilai $x^{(0)}$ yang tidak unik dalam bentuk $(1, x_2)$ untuk apa sahaja nilai x_2 kerana ungkapan $f(x)$ mengandungi matriks yang semitentu positif. Walaubagaimana sekalipun, peminimum masalah terletak pada kekangan pertama yang diberikan oleh $x^* = (9/10, 111/50)$ dengan $f^* = -2.31$.

Contoh 5[4]
Maksimumkan $-3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 3x_2$, tertakluk kepada

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Penyelesaiannya ialah $x^{(0)} = x^* = (0.7, 1.1)$, dan $f^* = 2.35$.$\square$

Algoritma TV menggunakan kaedah penyelesaian serentak atau kaedah pekali Lagrange bagi mencari titik-titik yang berpotensi menjadi penyelesaian optimum, sementara dalam Algoritma MY tidak menggunakan kedua-dua kaedah tersebut secara langsung melainkan menjelajah disepanjang kesamaan kekangan bagi mencari yang berpotensi tersebut dan jelas ini dapat dilaksanakan tanpa ada gangguan sedikitpun. Bagi Contoh 4, kaedah Wolfe [5] tidak dapat digunakan kerana matriks yang membentuk fungsi f adalah semitentu positif jadi tidak sesuai dengan kaedah Wolfe [5].

8 Kesimpulan

Kita akan mengemukakan beberapa perbezaan yang amat ketara antara algoritma TV dengan algoritma MY.

Algoritma TV menggunakan pekali Lagrange ([3]) bagi menentukan peminimum berkekangan bagi setiap kekangan yang terkumpul dalam $V[x^{(0)}]$, sementara dalam algoritma MY pula penentuan peminimum berkekangan tersebut dilakukan dengan sederhana sekali iaitu menerusi kaedah jelajah seperti yang diberikan dalam [2].

Algoritma TV menentukan persilangan antara setiap kekangan dalam $V[x^{(0)}]$ bagi penentuan titik-titik yang mesti diuji adakah memenuhi kriteria sebagai penyelesaian optimum ? Sedangkan dalam algoritma MY, jika semua peminimum berkekangan dalam $V[x^{(0)}]$ adalah tak tersaur, maka yang tak tersaur ini akan digantikan dengan peminimum berkekangan tersaur pada setiap kekangan dalam $V[x^{(0)}]$ yang akan digunakan sebagai pembanding untuk penentuan yang optimum nanti.

Dengan perbincangan dan perbahasan di atas, dapatlah dikatakan bahawa Algoritma MY yang digunakan bagi mencari penyelesaian optimum pengaturcaraan kuadratik dalam bentuk asal (yakni tanpa maklumat tambahan seperti pembolehubah lalai, lebihan, buatan dan lain-lain), dapat memberikan suatu harapan yang baik bagi menjadikannya sebagai satu kaedah alternatif untuk masalah pengaturcaraan kuadratik tersebut.

Dalam masa yang terdekat, kita akan mengemukakan kaedah alternatif ini dalam bentuk yang lebih am bagi menyelesaikan masalah pengaturcaraan kuadratik yang melibatkan $n \geq 3$ pembeolehubah.

9 Penghargaan

Terima kasih diucapkan kepada Universiti Putra Malaysia dan Kerajaan Malaysia diatas biaya yang diberikan menerusi projek IRPA bagi penyelidikan ini.

Rujukan

[1] B. M. Ismail & Yosza, *Existence, Uniqueness and Convergence of the Violated Constraints Technique for Quadratic Programming Problem,* International Science Conference, Universiti Putra Malaysia and Science International (Lahore), Universiti Putra Malaysia, Serdang, Selangor, 7-9 May 1998.

[2] B. M. Ismail & Yosza, *Constraint Exploration Method for Quadratic Programming Problem,* diserahkan kepada Editor Journal of Applied Mathematics and Computation untuk penerbitan.

[3] H. Theil & C. Van de Panne, *Quadratic Programming as an Extension of Conventional Quadratic Maximization,* Journal of the Institute of Management Science, **7** (1961), pp. 1-20.

[4] G. R. Walsh, *Methods of Optimization,* John Wiley & Sons, London, 1975.

[5] P. Wolfe, *The Simplex Method for Quadratic Programming,* Econometrica, **27** (1959), pp. 382-398.