Matematika, 2000, Jilid 16, bil. 2 hlm. 87–94

Pelaksanaan Skema Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai Bagi Unsur Terhingga Dalam Masalah Resapan Satu Matra

Jumat bin Sulaiman
Program Matematik dengan Ekonomi,
Sekolah Sains & Teknologi,
Universisti Malaysia Sabah,
Kota Kinabalu, Sabah.

Abdul Rahman bin Abdullah
Jabatan Komputeran Industri,
Fakulti Teknologi & Sains Maklumat,
Universiti Kebangsaan Malaysia,
UKM Bangi, Selangor.

Abstrak Tujuan kertas kerja ini untuk memperihalkan perumusan skema kaedah lelaran 2, 3 dan 4 Titik Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai (KTTT) dengan menggunakan penghampiran unsur terhingga bagi menyelesaikan persamaan resapan satu matra. Adalah ditunjukkan bahawa kaedah lelaran KTTT adalah lebih cepat jika dibandingkan kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) separuh sapuan atau sapuan penuh.

Katakunci Persamaan Resapan, Kaedah Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai, Kaedah Unsur Terhingga.

Abstract *The aim of this paper is to describe formulation of the 2, 3 and 4 Point Modified Explicit Group (MEG) iterative methods scheme with finite element approximation to solve the one dimensional diffusion equation. It had shown tha the MEG iterative methods is faster than the halfsweeps or fullsweeps Explicit Group (EG) iterative methods.*

Keywords *Diffusion equation, Modified Explicit Group Method, Finite Element Method.*

1 Pengenalan

Pertimbangkan persamaan resapan satu matra yang diselesaikan menerusi kaedah unsur terhingga. Persamaan ini sering dikaitkan dalam memperihalkan fenomena pemindahan haba yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1}$$

dengan tertakluk pada syarat awal

$$U(x,0) = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

dan syarat sempadan

$$\begin{aligned} U(0,t) &= g_2(t) \\ U(L,t) &= g_3(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

dengan α pekali resapan.

2 Rangkaian dan Penghampiran Unsur Terhingga

Sebelum menbincangkan lebih lanjut tentang perumusan persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah (1), kita perlu pecahkan selang $[0, L]$ kepada beberapa subselang untuk membentuk beberapa segmen unsur terhingga. Walau bagaimanapun kita hanya mengehadkan perbincangan pada saiz subselang yang sekata. Perhatikan domain yang dipecahkan kepada beberapa subselang yang ditunjukkan dalam Rajah 1.

Andaikan $U(x,t)$ dihampiri oleh fungsi bentuk yang ditakrifkan sebagai

$$U(x,t) = \phi + \sigma x \tag{2}$$

dengan ϕ dan σ parameter tak diketahui. Kita tumpukan pada unsur ke-i untuk menentukan parameter ϕ dan σ yang membentuk perwakilan baru bagi persamaan (2). Ini diberikan oleh

$$U(x,t) = N_i(x)U_i(t) + N_{i+4}(x)U_{i+4}(t) \tag{3}$$

Rajah 1: Rangkaian unsur terhingga bagi kes 8 subselang dengan

$$N_i(x) = \frac{(x_{i+4} - x)}{4h}, \quad N_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)}{4h}, \quad h = x_{i+1} - x_i$$

Dalam kertas kerja ini, kita mengehadkan penggunaan kaedah reja Galekin dan Crank–Nicolson (C–N) yang masing-masing untuk pendiskretan terhadap ruang dan masa dalam usaha mendapatkan persamaan penghampiran unsur terhingga. Sebelum mendapatkan perumusan persamaan penghampiran tersebut, pertimbangkan kaedah reja Galekin ke atas unsur ke-i yang dinyatakan (Lewis & Ward,[4]) sebagai

$$\int_{x_i}^{x_i+4} N_k(x)E(x,t)\,dx = 0, \quad k = i, i+4 \tag{4}$$

dengan $E(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ adalah fungsi reja.

Sementara itu, pendiskretan masa menggunakan kaedah beza terhingga yang diungkapkan sebagai

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(N_i(x)(U_{i,j+1} - U_{i,j}) + N_{i+4}(x)(U_{i+4,j+1} - U_{i+4,j})) \tag{5}$$

Dengan mengolahkan persamaan (4) dan (5), boleh diperolehi persamaan berikut

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t}\right) \int_{x_i}^{x_{i+4}} N_k(x)N_i(x)dx + \left(\frac{U_{i+4,j+1} - U_{i+4,j}}{\Delta t}\right) \int_{x_i}^{x_{i+4}} N_k(x)N_{i+4}(x)dx \\
- \quad \alpha \left(N_k(x_{i+4})\frac{\partial}{\partial t}(U(x_{i+4},t)) - N_k(x_i)\frac{\partial}{\partial t}(U(x_i,t))\right) \\
+ \quad 4\alpha h \left(\frac{\partial N_k}{\partial x}\right)(-U_i(t) + U_{i+4}(t)) = 0, \quad k = i, i+4
\end{aligned} \tag{6}$$

Langkah seterusnya penggunaan kaedah C–N ke atas persamaan (6) untuk mendapatkan sistem persamaan penghampiran unsur terhingga bagi unsur ke-i, iaitu:

$$4\alpha h U_{x\ i,j+1} + aU_{i,j+1} + bU_{i+4,j+1} = -4\alpha h U_{x\ i,j} + cU_{i,j} + dU_{i+4,j} \tag{7}$$
$$-4\alpha h U_{x\ i+4,j+1} + bU_{i,j+1} + aU_{i+4,j+1} = 4\alpha h U_{x\ i+1,j} + dU_{i,j} + cU_{i+4,j} \tag{8}$$

dengan

$$\begin{array}{ll}
\gamma = \frac{2h}{3\Delta t}, & a = 4\gamma h + \alpha, \quad b = 2\gamma h - \alpha \\
c = 4\gamma h - \alpha, & d = 2\gamma h + \alpha
\end{array}$$

Pertimbangan ke atas sistem persamaan di atas bagi semua unsur terhingga dalam domain penyelesaian pada paras masa $t = t_{j+1}$ akan menjana suatu sistem persamaan linear tiga pepenjuru seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 4\alpha h & b & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & b & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & b & 2a & b & & & & \\ \vdots & \ddots & b & 2a & b & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & b & 2a & b & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & b & 2a & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & b & -4\alpha h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x\ 0,j+1} \\ U_{4,j+1} \\ U_{8,j+1} \\ U_{12,j+1} \\ \vdots \\ U_{4(n-1),j+1} \\ U_{4n,j+1} \\ U_{x\ 4(n+1),j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 - aU_{0,j+1} \\ f_4 - bU_{0,j+1} \\ f_8 \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{4(n-1)} \\ f_{4n} - bU_{4(n+1),j+1} \\ f_{4(n+1)} - aU_{4(n+1),j+1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

dengan

$$\begin{aligned} f_0 &= -4\alpha h U_{x\ 0,j} + cU_{0,j} + dU_{4,j} \\ f_{4i} &= dU_{4(i-1),j} + 2cU_{4i,j} + dU_{4(i+1),j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ f_{4(n+1)} &= 4\alpha h U_{x\ 4(n+1),j} + dU_{4n,j} + cU_{4(n+1),j} \end{aligned}$$

3 Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai

Dalam usaha menerapkan kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai (KTTT) yang juga disebut kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat separa sapuan (khususnya juga disebut satu perempat sapuan) ke atas sistem persamaan (9), kita ungkapkan semula sistem persamaan tersebut dalam bentuk berikut:

$$4\alpha h U_{x\ 0,j+1} + aU_{0,j+1} + U_{4,j+1} = f_0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & 2a & b & 0 & & & \vdots \\ 0 & b & 2a & b & \ddots & & \\ 0 & 0 & b & 2a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & b & 2a & b \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{4,j+1} \\ U_{8,j+1} \\ U_{12,j+1} \\ U_{16,j+1} \\ \vdots \\ U_{4(n-1),j+1} \\ U_{4n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 - bU_{0,j+1} \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{16} \\ \vdots \\ f_{4(n-1)} \\ f_{4n} - bU_{4(n+1),j+1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$-4\alpha h U_{x\ 4(n+1),j+1} + bU_{4n,j+1} + aU_{4(n+1),j+1} = f_{4(n+1)} \tag{12}$$

Dalam aspek perumusan skema beberapa variasi titik bagi kaedah lelaran KTTT, kita hanya mempertimbangkan titik-titik jenis $\bullet$ pada Rajah 1 sehingga penumpuan lelaran ke atas persamaan (11) dicapai. Pelaksanaan lelaran di atas serupa konsepnya dengan pembangunan kaedah lelaran blok yang dibincangkan oleh Abdul Rahman [1], Jumat & Abdul Rahman [2] dan Jumat, Mohamed & Abdul Rahman [3]. Kemudian kaedah terus digunakan untuk memperolehi penyelesaian hampiran bagi baki titik -titik lain dan juga persamaan (10) serta (12).

3.1 Perumusan 2 Titik-KTTT

Dengan memanipulasikan matriks pekali bagi sistem persamaan (11) untuk membentuk beberapa sistem persamaan baru yang bergantung blok titik yang dikehendaki. Misalnya perumusan kaedah lelaran 2 Titik-KTTT membabitkan sistem persamaan linear (2x2) yang secara umumnya dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+4,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

dengan

$$\begin{aligned} S_1 &= f_i - bU_{i-4,j+1} \\ S_2 &= b_{i+4} - bU_{i+8,j+1} \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (13), boleh ditunjukkan skema lelaran 2 Titik-KTTT dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+4,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4a^2 - b^2} \begin{bmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3.2 Perumusan 3 Titik-KTTT

Pertimbangkan pula lebih daripada 2 titik, iaitu 3 titik berturutan ke atas sistem persamaan (11), boleh dituliskan sistem persamaan linear (3×3)

$$\begin{bmatrix} 2a & b & 0 \\ b & 2a & b \\ 0 & b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+4,j+1} \\ U_{i+8,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

dengan

$$\begin{aligned} S_1 &= f_i - bU_{i-4,j+1} \\ S_2 &= f_{i+4} \\ S_3 &= f_{i+8} - bU_{i+12,j+1} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teknik pengurangan kekompleksan pengiraan yang telah dibincangkan oleh Jumat, Mohamed dan Abdul Rahman [3] ke atas sistem persamaan (15), skema lelaran 3 Titik-KTTT boleh dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+4,j+1} \\ U_{i+8,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{v_0} \begin{bmatrix} bP_a + b_0 S_1 \\ a_0 P_a \\ bP_a + b_0 S_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dengan

$$\begin{aligned} SS &= 2a^2 - b^2 \\ v &= 4aSS, \quad a_0 = -2a, \quad b_0 = 2SS \\ P_a &= b(S_1 + S_3) + a_0 S_2 \end{aligned}$$

3.3 Perumusan 4 Titik-KTTT

Melalui langkah yang serupa dan penerapan teknik pengurangan kekompleksan bagi pembangunan skema lelaran 2 dan 3 Titik-KTTT yang telah dibincangkan, maka boleh ditunjukkan juga skema lelaran 4 Titik-KTTT sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+4,j+1} \\ U_{i+8,j+1} \\ U_{i+12,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\upsilon_0} \begin{bmatrix} S_a S_1 - bP_a \\ S_b S_1 + a_4 P_a \\ S_b S_4 + P_a P_b \\ S_a S_4 - bP_b \end{bmatrix} \tag{17}$$

dengan

$$\begin{aligned} &S_1 = f_i - bU_{i-4,j+1}, \quad S_2 = f_{i+4}, \quad S_3 = f_{i+8}, \quad S_4 = f_{i+12} - bU_{i+16,j+1}, \\ &a_1 = a^2, \quad a_2 = b^2, \quad a_3 = 2ab, \quad a_4 = 2a, \\ &SS = 2a_1 - a_2, \quad St = 4a_1 - a_2, \quad S_a = 4aSS, \quad S_b = -bSt, \\ &\upsilon_0 = 8a_1 SS - a_2 St, \quad P_a = StS_2 - a_3 S_3 + a_3 S_3, \quad P_a = a_2 S_1 - a_3 S_2 + StS_3. \end{aligned}$$

4 Pelaksanaan Ujikaji Berangka

Pertimbangkan pelaksanaan beberapa skema kaedah lelaran titik ke atas kaedah unsur terhingga bagi persamaan resapan satu matra

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0.1 \tag{18}$$

dengan tertakluk pada syarat awal

$$U(x,0) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \quad 0 \leq x \leq 2$$

dan syarat sempadan

$$\begin{aligned} &U(0,t) = 0, \\ &U(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.1 \end{aligned}$$

Penyelesaian hampiran yang diperolehi pula dibandingkan penyelesaian tepat bagi masalah (18) yang diberikan sebagai

$$U(x,t) = e^{(\frac{\pi^2}{4}t)} \sin(\frac{\pi}{2}x), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0.1 \tag{19}$$

Semua keputusan berangka yang diperolehi dinyatakan dalam Jadual 1, 2 dan 3. Dalam pelaksanaan ujikaji berangka, ujian penumpuan menggunakan nilai toleransi ralat $\epsilon = 10^{-10}$.

Perhatikan dalam Jadual 1, 2 dan 3, kaedah lelaran Gauss-Siedel (GS) dan KTT sapuan penuh digunakan sebagai kaedah lelaran piawai untuk digunakan sebagai perbandingan.

5 Kesimpulan

Hasil pemerhatian ujikaji berangka yang ditunjukkan pada Jadual 1, 2 dan 3, didapati bahawa penerapan kaedah lelaran separa sapuan ke atas kaedah GS dan KTT adalah jauh

Jadual 1: Perbandingan bilangan lelaran

Kaedah Lelaran	Bilangan Selang								
	Sapuan Penuh			Separuh Sapuan			Separa Sapuan		
	256	512	1024	256	512	1024	256	512	1024
GS	177	639	2352	52	177	639	18	52	177
2-KTT	94	334	1225	30	94	334	11	30	94
3-KTT	67	230	837	23	67	230	10	23	67
4-KTT	54	178	640	20	54	178	9	20	54

Jadual 2: Perbandingan masa lelaran dalam saat

Kaedah Lelaran	Bilangan Selang								
	Sapuan Penuh			Separuh Sapuan			Separa Sapuan		
	256	512	1024	256	512	1024	256	512	1024
GS	41.20	314.12	2337.68	6.69	45.37	343.39	1.65	8.46	56.24
2-KTT	29.82	218.28	1637.71	5.00	32.35	234.31	1.38	6.20	38.61
3-KTT	20.82	146.71	1087.47	3.89	22.80	157.57	1.27	4.89	27.29
4-KTT	19.83	131.55	962.41	3.89	21.36	139.62	1.37	4.83	25.32

Jadual 3: Perbandingan ralat maksimum

Kaedah Lelaran	Bilangan Selang								
	Sapuan Penuh			Separuh Sapuan			Separa Sapuan		
	256	512	1024	256	512	1024	256	512	1024
GS	4.10E-6	1.62E-6	2.28E-6	1.54E-5	4.10E-6	1.62E-6	6.10E-5	1.54E-5	4.10E-6
2-KTT	4.02E-6	1.35E-6	1.32E-6	1.54E-5	4.02E-6	1.35E-6	6.10E-5	1.54E-5	4.02E-6
3-KTT	3.99E-6	1.26E-6	9.88E-7	1.54E-5	3.99E-6	1.26E-6	6.10E-5	1.54E-5	3.99E-6
4-KTT	3.98E-6	1.21E-6	8.32E-7	1.54E-5	3.98E-6	1.21E-6	6.10E-5	1.54E-5	3.98E-6

lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan berbanding dengan pelaksanaan kaedah lelaran separuh sapuan atau sapuan penuh ke atas kaedah GS dan KTT. Keputusan ini banyak dipengaruhi oleh pengurangan bilangan operasi aritmetik pada kaedah GS dan KTT separa sapuan. Ini adalah disebabkan kaedah tersebut hanya mempertimbangkan satu perempat titik-titik (khususnya jenis titik $\bullet$) pada domain penyelesaian. Hasilnya pada bilangan selang 1024, didapati pengurangan bilangan dan masa lelaran bagi kaedah lelaran GS separa sapuan sebanyak 92.47% dan 97.59% berbanding dengan kaedah lelaran GS sapuan penuh. Sementara itu, kaedah lelaran GS separuh sapuan pula hanya berkurangan sebanyak 72.83% dan 85.31% jika dibandingkan kaedah lelaran GS sapuan penuh pada selang tersebut.

Walau bagaimanapun dalam kes separa sapuan, kaedah lelaran 4 Titik-KTTT pula adalah lebih baik daripada kaedah lelaran GS dan KTTT yang lain. Misalnya pada bilangan selang 1024, pengurangan sebanyak 42.55% dan 34.42% masing-masing pada bilangan dan masa lelaran jika dibandingkan dengan kaedah lelaran 2 Titik-KTTT. Keputusan ini juga bersesuaian dengan keputusan kajian yang dilakukan oleh Jumat, Mohamed & Abdul Rahman [3].

Rujukan

[1] Abdul Rahman Abdullah. *The Four Point Decoupled Group (EDG) method: A Fas Poisson Solver.* Int. J. Computer Mth. **38**(1991), 61-70.

[2] Jumat Bin Sulaiman & Abdul Rahman Bin Abdullah. *Kaedah lelaran kumpulan tak tersirat dengan penghampiran beza terhingga peringkat tinggi bagi persamaan Poisson.* Matematika, Jilid 14: (1998), 27-37.

[3] Jumat Sulaiman, Mohamed Othman & Abdul Rahman Abdullah. *Skema kaedah lelaran kumpulan tak tersirat terubahsuai bagi persamaan resapan satu matra.* Borneo Science, Jilid 4:(1998),57-66.

[4] Lewis, P.E. & Ward, J.P. *The Finite Element Method : Principles and Applications.* Addison-Wesley Publishing Company, 1991.