Matematika, 2000, Jilid 16, bil. 2, hlm. 95–100

Pengitlakan Satu Kaitan Koszul Mendatar (TS^2, π, S^2) Kepada (E, q, B)

Tahir Ahmad
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia
Mel-e: ta@mathsun.utm.my
Tahir_22@hotmail.com

Abstrak

Dalam makalah ini dipaparkan beberapa keputusan bagi kaitan untuk berkas vektor (E, q, B) yang umum. Keputusan ini terhasil pada mulanya dari pengitlakan terhadap satu kaitan Koszul untuk (TS^2, π, S^2). Pengitlakan seterusnya melibatkan hasil pengangkutan secara setempat iaitu di antara dua carta serta sejagat iaitu isomorfisma di antara dua berkas vektor dengan dasar manifold yang sama.

Katakunci

Berkas Vektor, Kaitan, Kelengkungan, Pengangkutan, Manifold.

Abstract *In this paper several results for connection on general vector bundle (E, q, B) are revealed. In the beginning these results are deduced from a Koszul connection for (TS^2, π, S^2). Further deduction produces some results in transportation locally; between two charts, and globally; isomorphism between two vector bundles with the same base manifold.*

Keywords

Vector Bundle, Connection, Curvature, Transportation, Manifold.

1 Pengenalan

Suatu vektor tangen X bagi titik m pada suatu manifold M ialah suatu pemetaan yang memetakan fungsi f kepada $\frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0}$ dengan $c(t)$ ialah suatu lengkung pada M serta $\frac{d}{dt}c(t)|_{t=0} = X$. Secara formal, pernyataan ini ditulis sebagai $X(f) = \frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0}$ ([5]). Seterusnya, suatu medan vektor pada M pula ialah pemetaan X yang memetakan setiap $m \in M$ suatu vektor tangen pada m, $M \to R$ dengan kata lain $m \mapsto X(m)(f)$ adalah selanjar apabila f selanjar. Satu kaitan pula ialah pemetaan hasildarab Cartesian medan vektor kepada dirinya sendiri serta memenuhi sifat yang diberikan dalam Takrif 1.1 di bawah.

Takrif 1.1 *Katalah (E, π, M) adalah berkas vektor. Suatu kaitan (connection) pada (E, π, M) ialah pemetaan kovarian $\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$, iaitu $(x, \mu) \mapsto \nabla_x(\mu)$ dan memenuhi syarat-syarat di bawah ([1]):*

(i) $\nabla_x(\mu)$ ialah bilinear pada x dan μ

(ii) $\nabla_{fx}(\mu) = f\nabla_x(\mu)$ dengan $f \in C(M)$

(iii) $\nabla_x(f\mu) = f\nabla_x(\mu) + L_x(f)\mu$

dengan $C(M) = \{f | f : M \to R\}$ dan $L_x(f)$ ialah operator terbitan Lie.

Takrif 1.2 *Katalah ∇ ialah suatu kaitan bagi berkas vektor (E, q, B). Suatu kelengkungan R_∇ ialah pemetaan $R_\nabla : X(B) \times X(B) \times \Gamma E \to \Gamma E$ diberi sebagai*

$$R_\nabla(x, y)(\mu) = \nabla_{[x,y]}(\mu) - [\nabla_x, \nabla_y](\mu) = \nabla_{[x,y]}(\mu) - \nabla_x(\nabla_y(\mu)) + \nabla_y(\nabla_x(\mu)) \quad ([1]).$$

Kaitan yang mendatar pula diberi seperti berikut.

Takrif 1.3 *Katalah ∇ ialah suatu kaitan bagi berkas vektor (E, q, B). Maka ∇ dikatakan mendatar jika $R_\nabla = 0$ ([1]).*

2 Kaitan untuk (TS^2, π, S^2)

Dalam seksyen ini, kaitan yang telah dibina menghasilkan 6 keputusan yang telah dibuktikan bagi (TS^2, π, S^2) ([3]). Empat darinya diimbas semula dan diperturunkan secara ringkas.

Lema 2.1 *Katalah $T_p(R^3)$ adalah ruang vektor bagi titik $p \in R^3$ manakala $T_p(S^2)$ adalah ruang vektor bagi titik $p \in S^2$. Sekiranya $v \in T_p(R^3)$, maka $\alpha(v) = v - (v \cdot r)r \in T_p(S^2)$.*

Korolari 2.1 *Sekiranya $y \in T_p(S^2)$, maka $\alpha(y) = y$ (lihat Raj. 1).*

Teorem 2.1 $(\nabla_x(y))(r) = \alpha(L_x(y)(r))$ *ialah suatu kaitan untuk (TS^2, π, S^2) dengan π ialah unjuran yang biasa serta $\alpha : T_p(R^3) \to T_p(S^2)$ dengan $\alpha(v) = v - (v \cdot r)r$.*

Oleh kerana $\nabla_x : T_p(R^3) \to T_p(S^2)$ memenuhi takrifan kaitan Koszul ([4]), maka kita perolehi korolari berikut.

Korolari 2.2 $(\nabla_x(y))(r)$ *juga merupakan suatu kaitan Koszul untuk (TS^2, π, S^2) .*

Hasil dari Teorem 2.1 dan Korolari 2.2 sekarang boleh diitlakkan untuk sebarang berkas vektor (E, q, B) pula.

Rajah 1: Berkas Vektor Unit Sfera; (TS^2, π, S^2)

3 Kaitan untuk (E, q, B)

Kaitan yang ingin dibina selanjutnya bagi (E, q, B) bergantung kepada carta ([2]) yang ditakrifkan untuk berkas vektornya.

Teorem 3.1 *Katalah (E, q, B) ialah sebarang berkas vektor. Biarkan $\psi : U \times V \to E_U$ sebarang fungsi/carta dengan $U \in B$, maka $\nabla_x(\mu) = \psi\left(L_x(\psi^{-1}(\mu))\right)$ ialah suatu kaitan Koszul.*

Bukti Katalah (E, π, B) ialah sebarang berkas vektor dan $\psi : U \times V \to E_U$ sebarang fungsi/carta dengan $U \subset B$, maka

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \nabla_{x_1+x_2}(\mu) & = & \psi\left(L_{x_1+x_2}(\psi^{-1}(\mu))\right) \\
 & & = & \psi\left\{L_{x_1}(\psi^{-1}(\mu)) + L_{x_2}(\psi^{-1}(\mu))\right\} \qquad \text{disebabkan } L_x \text{ linear} \\
 & & = & \psi\left\{L_{x_1}(\psi^{-1}(\mu))\right\} + \psi\left\{L_{x_2}(\psi^{-1}(\mu))\right\} \qquad \text{disebabkan } \psi \text{ linear} \\
 & & = & \nabla_{x_1}(\mu) + \nabla_{x_2}(\mu).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(ii) & \nabla_x(\mu_1+\mu_2) & = & \psi\left(L_x(\psi^{-1}(\mu_1+\mu_2))\right) \\
 & & = & \psi\left(L_x\left\{\psi^{-1}(\mu_1) + \psi^{-1}(\mu_2)\right\}\right) \qquad \text{disebabkan } \psi^{-1} \text{ linear} \\
 & & = & \psi\left\{L_x(\psi^{-1}(\mu_1)) + L_x\left(\psi^{-1}(\mu_2)\right)\right\} \qquad \text{disebabkan } L_x \text{ linear} \\
 & & = & \psi\left(L_x(\psi^{-1}(\mu_1))\right) + \psi\left(L_x\left(\psi^{-1}(\mu_2)\right)\right) \qquad \text{disebabkan } \psi \text{ linear} \\
 & & = & \nabla_x(\mu_1) + \nabla_x(\mu_2).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(iii) & \nabla_{fx}(\mu) & = & \psi\left(L_{fx}(\psi^{-1}(\mu))\right) \\
 & & = & \psi\left(fL_x(\psi^{-1}(\mu))\right) \\
 & & = & f\psi\left(L_x(\psi^{-1}(\mu))\right).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(iv) & \nabla_x(f\mu) & = & \psi\left(L_x(\psi^{-1}(f\mu))\right) \\
 & & = & \psi\left(L_x(f\psi^{-1}(\mu)))\right) \\
 & & = & \psi\left\{L_x(f)(\psi^{-1}(\mu)) + fL_x(\psi^{-1})(\mu)\right\} \\
 & & = & \psi L_x(f)(\psi^{-1}(\mu)) + \psi f L_x(\psi^{-1})(\mu) \\
 & & = & \psi f L_x(\psi^{-1}(\mu)) + \psi L_x(f)(\psi^{-1})(\mu) \\
 & & = & f\psi L_x(\psi^{-1}(\mu)) + L_x(f)\psi(\psi^{-1})(\mu) \\
 & & = & f\psi L_x(\psi^{-1}(\mu)) + L_x(f)(\mu) \\
 & & = & f\nabla'_x(\mu) + L_x f(\mu).
\end{array}
$$

$\square$

Rajah 2: Pengangkutan di antara Dua Carta

Persoalannya sekarang, sekiranya kita mempunyai carta-carta $\psi_1 : U_1 \times V \to E_{U_1}$ dan $\psi_2 : U_2 \times V \to E_{U_2}$ (lihat Rajah 2) bagi satu berkas vektor, situasi apakah yang perlu supaya $\nabla^1 = \nabla^2$? Menggunakan teorem 3.1, $\nabla^1_x(\mu) = \psi_1\left(L_x(\psi_1^{-1}(\mu))\right)$ dan $\nabla^2_x(\mu) = \psi_2\left(L_x(\psi_2^{-1}(\mu))\right)$ merupakan kaitan Koszul bagi U_1 dan U_2 dengan:

$$L_x\left(\psi_1^{-1}(\mu)\right) : U_1 \to U_1 \times V$$

dan

$$L_x\left(\psi_2^{-1}(\mu)\right) : U_2 \to U_2 \times V.$$

Oleh itu persoalan tadi boleh dijawab dengan menentukan samada $\psi_1\left(L_x(\psi_1^{-1}(\mu))\right) = \psi_2\left(L_x(\psi_2^{-1}(\mu))\right)$. Hubungan ini hanya akan berlaku sekiranya $\psi_2 \circ \psi_1\left(L_x(\psi_1^{-1}(\mu))\right) = \left(L_x(\psi_2^{-1}(\mu))\right)$. Penyiasatan awal ke arah pembinaan hubungan yang diinginkan membuahkan dua teorem yang dialih gambarkan dari pengangkutan di antara dua carta kepada isomorfisma di antara dua berkas vektor dengan dasar manifold yang sama (Rajah 3). Hasil dari alihan ini dipersembahkan melalui teorem-teorem berikut.

Rajah 3: Berkas Vektor Dengan Dasar Manifold Yang Sama

Teorem 3.2 *Katalah* (E_1, q_1, M) *dan* (E_2, q_2, M) *adalah berkas vektor dengan isomorfisma* $\gamma : E_1 \to E_2$. *Sekiranya* ∇^2 *adalah kaitan bagi* E_2, *maka* $\nabla^1_x = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ *merupakan kaitan bagi* E_1.

Bukti Katalah ∇^2 adalah kaitan bagi E_2. Oleh demikian $\nabla^1_x = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ merupakan kaitan bagi E_1 kerana:

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \nabla^1_{x_1+x_2}(\mu) & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_{x_1+x_2}(\gamma(\mu))\right) \\
& & = & \gamma^{-1}\left\{\nabla^2_{x_1}(\gamma(\mu)) + \nabla^2_{x_2}(\gamma(\mu))\right\} \quad \text{disebabkan } \nabla^2 \text{ linear} \\
& & = & \gamma^{-1}\left\{\nabla^2_{x_1}(\gamma(\mu))\right\} + \gamma^{-1}\left\{\nabla^2_{x_2}(\gamma(\mu))\right\} \quad \text{disebabkan } \gamma^{-1} \text{ linear} \\
& & = & \nabla^2_{x_1}(\mu) + \nabla^2_{x_2}(\mu).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(ii) & \nabla^1_x(\mu_1+\mu_2) & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma(\mu_1+\mu_2))\right) \\
& & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x\{\gamma(\mu_1)+\gamma(\mu_2)\}\right) \quad \text{disebabkan } \gamma \text{ linear} \\
& & = & \gamma^{-1}\left\{\nabla^2_x(\gamma(\mu_1)) + \nabla^2_x(\gamma(\mu_2))\right\} \quad \text{disebabkan } \nabla^2_x \text{ linear} \\
& & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma(\mu_1))\right) + \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma(\mu_2))\right) \quad \text{disebabkan } \gamma^{-1} \text{ linear} \\
& & = & \nabla^2_x(\mu_1) + \nabla^2_x(\mu_2). \\
(iii) & \nabla^1_{fx}(\mu) & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_{fx}(\gamma(\mu)\right) \\
& & = & \gamma^{-1}\left(f\nabla^2_x(\gamma(\mu)\right) \\
& & = & f\gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma(\mu))\right) \\
& & = & f\nabla^1_x(\mu).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(iv) & \nabla^1_x(f\mu) & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma(f\mu)\right) \\
& & = & \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(f\gamma(\mu))\right) \\
& & = & \gamma^{-1}\left\{f\nabla^2_x(\gamma(\mu)) + L_x(f)(\gamma(\mu))\right\} \\
& & = & \gamma^{-1}\left\{f\nabla^2_x(\gamma(\mu))\right\} + \gamma^{-1}\left\{L_x(f)(\gamma(\mu))\right\} \\
& & = & f\gamma^{-1}\left\{\nabla^2_x(\gamma(\mu)\right\} + \left\{L_x(f)\gamma^{-1}(\gamma(\mu))\right\} \\
& & = & f\gamma^{-1}\left\{\nabla^2_x(\gamma(\mu)\right\} + \left\{L_x(f)(\mu)\right\} \\
& & = & f\nabla^1_x(\mu) + L_x f(\mu).
\end{array}
$$

□

Teorem 3.3 *Katalah (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$. Sekiranya ∇^2 adalah kaitan bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ merupakan kaitan bagi E_1, maka $R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x,y)(\mu)$.*

Bukti Andaikan (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$ manakala ∇^2 adalah kaitan bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ bagi E_1 pula. Kita akan membuktikan $R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x,y)(\mu)$ dengan cara menunjukkan ungkapan di sebelah kiri adalah sama dengan ungkapan di sebelah kanan.

Sebelah kiri: $R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \nabla'_{[x,y]}(\mu) - [\nabla'_x\left(\nabla'_y(\mu)\right) + [\nabla'_y\left(\nabla'_y x\mu\right)\right).$

Sebelah kanan:

$$
\begin{aligned}
\gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x,y)(\mu) &= \gamma^{-1}\left(\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))\right) \\
&= \gamma^{-1} \circ \nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \gamma^{-1} \circ \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \gamma^{-1} \circ \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&\qquad \text{disebabkan } \gamma \circ \nabla^1(\mu) = \nabla^2(\gamma \circ \mu) \text{ dari andaian} \\
&= \nabla^1_{[x,y]}(\mu) - \gamma^{-1} \circ \nabla^2_x\left(\gamma \circ \nabla^1_y(\mu)\right) + \gamma^{-1} \circ \nabla^2_y\left(\gamma \circ \nabla^1_x(\mu)\right) \\
&= \nabla'_{[x,y]}(\mu) - \nabla'_x\left(\nabla'_y(\mu)\right) + \nabla'_y\left(\nabla'_x(\mu)\right) \text{ dengan hujah yang sama.}
\end{aligned}
$$

□

Korolari 3.1 *Katalah (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$. Sekiranya ∇^2 adalah kaitan mendatar bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ merupakan kaitan bagi E_1 serta $R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\mu)$, maka ∇^1 merupakan kaitan mendatar.*

Bukti Andaikan (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$ manakala ∇^2 adalah kaitan mendatar bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}\left(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)\right)$ bagi E_1 dengan $R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\mu)$. Oleh demikian,

$$\begin{aligned} R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\mu) &= \gamma^{-1}(0) \qquad \text{disebabkan } \nabla^2 \text{ adalah kaitan mendatar} \\ &= \gamma^{-1}(0 - 0) \\ &= \gamma^{-1}(0) - \gamma^{-1}(0) \qquad \text{disebabkan } \gamma^{-1} \text{ adalah linear} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Justeru, ∇^1 merupakan kaitan mendatar. □

4 Rumusan

Dalam makalah ini dipaparkan beberapa keputusan bagi kaitan untuk berkas vektor (E, q, B) yang terhasil dari pengitlakan terhadap satu kaitan Koszul untuk (TS^2, π, S^2). Kaitan yang terbina bergantung kepada carta yang ditakrifkan untuk berkas vektornya. Seterusnya gambaran pengangkutan setempat di antara dua carta kemudiannya dialihkan secara sejagat kepada isomorfisma di antara dua berkas vektor dengan dasar manifold yang sama pula.

Rujukan

[1] R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations Of Mechanics*, 2nd. Ed, Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, (updated 1985 printing).

[2] T. Ahmad, *Permukaan Riemann: S^2* , Matematika, Jil. 9, Bil. 1, (1993), 9-17.

[3] T. Ahmad, *Satu Kaitan Koszul Mendatar Untuk Berkas Tangen Unit Sfera (TS^2, π, S^2)*, Matematika, Jil. 16, Bil. 1, (2000), 41-46.

[4] G. Lugo,*Notes On Differential Geometry in Physics*, Department of Mathematical Sciences, Univ. of North Carolina, (March 1998), 1-56.

[5] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, London, (1966).