Matematika, 1993, Jilid 9, bil. 2, hlm. 55-71
© Jabatan Matematik, UTM.

KAEDAH SIMPLEKS-GELINTARAN UNTUK PENGATURCARAAN LINEAR 2-PARAS

ISMAIL BIN MOHD
MOHD.RIZAM ABU BAKAR, WAN JAMILAH WAN ABDULLAH

Jabatan Matematik
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Pertanian Malaysia
Serdang, Selangor

Abstrak. Masalah pengaturcaraan linear 2-paras merupakan suatu masalah yang melibatkan interaksi matlamat antara dua paras yang berlainan bagi mencapai kata sepakat dalam suatu perancangan. Apabila rantau tersaur bagi dua paras yang berlainan tadi ditemui, titik optimum yang boleh diperolehi dari kalangan titik- titik ekstremumnya dapat ditentukan dengan menggunakan kaedah gelintaran sama ada di sepanjang kekangan aktif atau garis fungsi matlamat.

1. PENDAHULUAN

Banyak masalah perancangan dalam satu struktur pentadbiran berhirarki, mempunyai matlamat yang tersendiri. Pengoptimuman sistem berhirarki yang menggunakan kaedah multiparas ialah suatu tatacara pengiriman maklumat dari atasan kepada subunit bawahan sambil memerhati reaksi subunit itu dan kemudian mengemaskini maklumat kerjasama antara atasan dan

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

bawahan tadi. Contoh-contoh maklumat yang dimaksudkan di atas adalah seperti penempatan pada sumber atau pembahagian sumber di kalangan subunit.

Masalah perancang multiparas boleh digunakan kepada berbagai sistem pembuat keputusan berhirarki tertentu. Masalah ini dicirikan oleh perancang-perancang berhirarki, setiap satunya secara bebas mengawal set pembolehubah keputusan yang tak bercantum antara satu sama lain. Keputusan akhir mereka dilaksanakan secara berjujukan dalam hirarki, daripada paras tertinggi ke paras terendah. Fungsi matlamat dan set keputusan tersaur bagi sebarang seorang perancang akan ditentukan, bahagian demi bahagian oleh keputusan-keputusan yang dibuat pada paras lain.

2. Masalah Dua-Paras

Suatu keistimewaan "pengaturcaraan multiparas" ialah bahawa seorang perancang pada paras satu hirarki mempunyai fungsi matlamatnya tersendiri dan ruang keputusannya ditentukan bahagian demi bahagian oleh paras-paras yang lain. Sebagai tambahannya, setiap perancang boleh mempengaruhi polisi pada paras lain dan ini akan memperbaiki matlamatnya sendiri.

Masalah-masalah yang hendak dipertimbangkan di sini mempunyai ciri-ciri sepunya yang berikut

(1) Sistem memiliki unit-unit pembuat keputusan yang berinteraksi dalam suatu struktur berhirarki.
(2) Setiap paras subordinat melaksanakan polisinya selepas dan dalam pengetahuan keputusan paras atasannya.
(3) Setiap unit memaksimumkan semua kemanfaatan secara bebas dari unit-unit lain, tetapi boleh dipengaruhi oleh tindakan dan tindakbalas unit-unit tersebut.
(4) Pengaruh luaran pada masalah pembuat keputusan boleh dilihat dalam kedua- dua fungsi matlamatnya dan set keputusan tersaurnya.

Selanjutnya belahkan vektor pembolehubah

$$x = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{N_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_{N_2}^{(2)}\right)$$

kepada dua perancang iaitu (i) paras satu (perancang atasan) mengawal vektor $x^{(1)}$ dan (ii) paras dua (perancang bawahan) mengawal vektor $x^{(2)}$ dengan

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{N_1}^{(1)}\right)$$

dan

$$x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_{N_2}^{(2)}\right).$$

Semasa pelaksanaan terakhir setiap polisinya, paras satu akan memperincikan $x^{(1)}$ dan kemudiannya barulah paras dua menyatakan $x^{(2)}$ dengan diketahui sepenuhnya oleh pihak paras pertama.

Takrifkan set tertutup dan terbatas $S \subset R^{N_1+N_2}$ sebagai

$$S = \left\{(x^{(1)}, x^{(2)}) | (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^{N_1+N_2}\right\}.$$

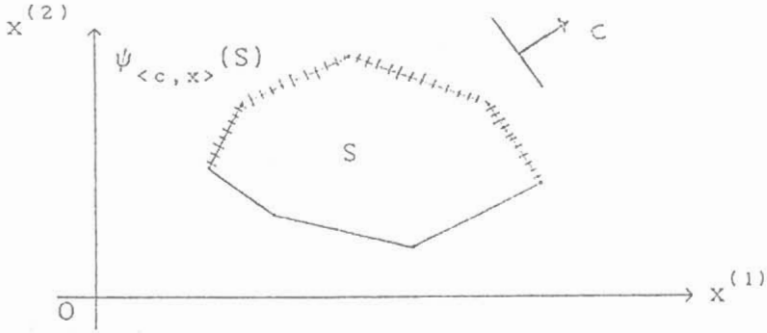
Untuk sebarang pilihan tetap $x^{(1)}$, paras dua akan memilih nilai $x^{(2)}$ untuk memaksimumkan fungsi matlamat paras dua, $f_2(x^{(1)}, x^{(2)})$. Oleh itu, bagi setiap nilai tersaur $x^{(1)}$, paras dua akan bertindakbalas dengan kesepadanan $x^{(2)}$ (anggaplah sebutan nilai ini wujud dan unik untuk setiap $x^{(1)}$). Ini membawa kepada terbentuknya hubungan fungsian antara keputusan paras satu $x^{(1)}$ dan tindakbalas paras dua $x^{(2)} = \psi(x^{(1)})$. Kita akan menganggap bahawa fungsi tindakbalas $\psi(.)$, secara lengkapnya diketahui oleh paras satu. Jadi, paras satu sesungguhnya dikekangkan untuk memilih satu titik dalam set yang dinyatakan oleh takrif yang berikut.

Takrif 2.1.

Set $\psi_{f_2}(S)$ yang diberikan oleh

$$\psi_{f_2}(S) \equiv \{(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}) \in S | f_2(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}) = \underset{x^{(2)}}{\text{maks}}\ f_2(x_*^{(1)}, x_*^{(2)})\}$$

adalah set tindakbalas rasional bagi f_2 terhadap S.



RAJAH 1. Contoh Set Tindakbalas Rasional Masalah Dua-Paras

Perhatikan bahawa pemaksimuman dalam Takrif 2.1 di atas hanya diambil meliputi $x^{(2)}$ bagi setiap $x_*^{(1)}$ yang ditetapkan. Dengan fungsi tindakbalas $\psi(.)$ DALAM genggaman, seseorang boleh juga mewakili set tindakbalas rasional sebagai

$$\psi_{f_2}(S) = \left\{(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}) \in S | f_2(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}) = \psi(x_*^{(1)}\right\}.$$

Contoh 2.1. Misalkan $x^{(1)}$ dan $x^{(2)}$ vektor komponen tunggal. Misalkan

$$S = \left\{x \in R^2 | A^{(1)}x^{(1)} + A^{(2)}x^{(2)} \leq b\right\}$$

adalah polihidron seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1. Misalkan $f_2(x) =< c, x >$. Maka, untuk sebarang pilihan tersaur tetap $x_*^{(1)}$, paras dua menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear yang memaksimumkan

$$< c, x >= c^{(1)}x_*^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)}$$

tertakluk kepada

$$A^{(2)}x^{(2)} \leq b - A^{(1)}x_*^{(1)}.$$

Penyelesaian $x_*^{(2)}$ bersama-sama dengan $x_*^{(1)}$, merupakan unsur set $\psi_{<c,x>}(S)$ yang dikenal dengan nama rantau berbentuk ril keretapi yang tertunjuk dalam Rajah 1.

Jika paras satu berhasrat memaksimumkan fungsi matlamat $f_1(x^{(1)}, x^{(2)})$ dengan hanya mengawal vektor $x^{(1)}$, maka mestilah diselesaikan masalah pengaturcaraan bermatematik:

$$\text{maksimumkan } f^1(x^{(1)}, x^{(2)})$$

tertakluk kepada

$$\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) \in \psi_{f_2}(S), \tag{2.1}$$

atau kesetaraannya

$$\text{maksimumkan } f_1(x^{(1)}, \psi(x^{(1)}))$$

tertakluk kepada

$$(x^{(1)}, \psi(x^{(1)})) \in S.$$

Masalah (2.1) disebut masalah pengaturcaraan 2-paras dan secara tak tersirat ditulis sebagai masalah

$$\underset{x^{(1)}}{\text{maks}}\ f_1(x^{(1)}, x^{(2)}) \tag{$p^{(1)}$}$$

dengan $x^{(2)}$ menyelesaikan masalah

$$\underset{x^{(2)}}{\text{maks}}\ f_2(x^{(1)}, x^{(2)})$$

tertakluk kepada

$$(x^{(1)}, x^{(2)}) \in S. \tag{$p^{(2)}$}$$

Untuk memudahkan tatatanda dan terminologi kita akan merujuk kepada $S^1 \equiv \psi_{f_2}(S)$ sebagai rantau tersaur paras-1, dan $S^2 = S$ sebagai rantau tersaur paras-2.

3. Masalah Kawalan

Dua masalah kawalan linear dua paras akan diberikan.

Masalah Kawalan Sumber Linear 2-paras.

Fungsi matlamatnya ialah

$$f_k(x) = c_1^{(k)} x^{(1)} + c_2^{(k)} x^{(2)} \qquad (k = 1, 2)$$

dan

$$S^2 = \{x | A^{(1)} x^{(1)} + A^{(2)} x^{(2)} \leq b; x^{(1)}, x^{(2)} \geq 0\}.$$

Paras satu mengawal $x^{(1)}$ dan paras dua mengekangkan

$$A^{(2)} x^{(2)} \leq b - A^{(1)} x^{(1)}.$$

Namun begitu, perhatikan bahawa nilai fungsi matlamat paras satu ditentukan oleh $x^{(2)}$ demikian juga $x^{(1)}$. Masalah ini boleh ditulis sebagai

$$\underset{x^{(1)}}{\text{maks}}\ c_1^{(1)} x^{(1)} + c_2^{(1)} x^{(2)} \qquad (p^{(1)})$$

dengan $x^{(2)}$ menyelesaikan

$$\underset{x^{(2)}}{\text{maks}}\ c_1^{(2)} x^{(1)} + c_2^{(2)} x^{(2)} \qquad (p^{(2)})$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} A^{(1)} x^{(1)} + A^{(2)} x^{(2)} &\leq b \\ x^{(1)} &\geq 0 \\ x^{(2)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Masalah Kawalan Harga Linear 2-paras.

Fungsi matlamatnya ialah

$$f_1(x) = c_1^{(1)} x^{(1)} + c_2^{(1)} x^{(2)} \tag{3.1}$$

$$f_2(x) = x^{(1)} x^{(2)} \tag{3.2}$$

dan $\quad S^2 = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}.$

Masalah ini boleh dituliskan sebagai

$$\underset{x^{(1)}}{\text{maks}}\ c_1^{(1)}x^{(1)} + c_2^{(1)}x^{(2)} \qquad (p^{(1)})$$

dengan $x^{(2)}$ menyelesaikan

$$\underset{x^{(2)}}{\text{maks}}\ x^{(1)}x^{(2)} \qquad (p^{(2)})$$

tertakluk kepada

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Mungkin sekali pandang masalah di atas bukan masalah linear, tetapi fungsi matlamat paras dua sebenarnya linear kerana $x(1)$ telah ditetapkan oleh perancang paras satu.

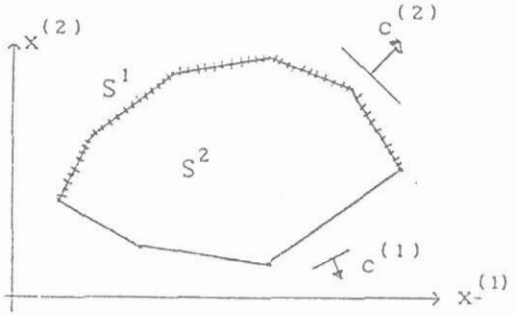
4. Pengaruh Optimum Berganda

Untuk masalah pengaturcaraan dua-paras sebarangan, kesiap-siagaan mesti diambil apabila penyelesaian kepada masalah $(p^{(2)})$ tidak unik untuk $x^{(1)}$ tertentu (iaitu $\psi(.)$ tidak wujud). Walaupun cirian ini tidak mempengaruhi nilai fungsi matlamat paras-dua $f_2(x)$, penyelesaian-penyelesaian ini boleh mengubah matlamat pada paras satu. Oleh sebab itu, pengawalan terhadap pemilihan di kalangan optimum berganda pada paras dua terhadap pemilihan hendaklah dideligasikan kepada paras satu atau pengadil luar.

5. Ketidakcembungan

Sifat-sifat geometri masalah pengaturcaraan bermatematik dua-paras adalah lebih kompleks daripada masalah pengaturcaraan bermatematik yang telah dikenal umum. Sebagai contoh, pertimbangkan kes mudah tetapi tidak remeh iaitu masalah pengawalan sumber linear dua-paras.

Walaupun keseluruhan rantau tersaur S^2 adalah polihidron cembung [2] dan semua matlamat adalah linear, masalah sebenarnya adalah masalah pengaturcaraan tidak cembung kerana set tindakbalas rasional S^1 adalah tidak cembung.



RAJAH 2. Rantau Tersaur

Pertimbangkan contoh masalah kawalan sumber linear dua-paras seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.

Dalam contoh yang mudah ini, $x^{(1)}$ dan $x^{(2)}$ adalah vektor satu komponen (vektor tunggal). Untuk sebarang pemilihan $x^{(1)}$, paras dua akan memilih nilai $x^{(2)}$ yang memaksimumkan $< x^{(2)}, x >$. Keputusan adalah dalam set tindakbalas rasional $x_{(1)}$, yang berbentuk rel keretapi seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2. Nyatalah, pemilihan $x^{(1)}$ untuk paras satu adalah yang menghasilkan nilai maksimum $< c^{(1)}, x >$ terhadap rantau rel kereta api. Ini memerlukan pemaksimuman fungsi matlamat linear terhadap set tidak cembung.

6. PENTAFSIRAN GEOMETRI

Dalam bahagian ini akan diterangkan pentafsiran geometri Masalah Kawalan Sumber Linear Dua-Paras.

Walaupun set tindakbalas rasional untuk paras dua dalam masalah kawalan sumber linear boleh tidak cembung, set itu masih mempunyai beberapa sifat penting yang wujud pada set cembung.

Teorem dan korolari yang berikut menolong kita mencirikan set S^1 dan penyelesaian optimum bagi $p^{(1)}$ dalam masalah kawalan sumber linear dua-paras.

Teorem 6.1 [3]
Misalkan

$$S^2 = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

terbatas, $S^1 = \psi_{c^2x}(S^2)$, $y_1, ..., y_r$ *adalah sebarang* r *titik dalam* S^2 *dan* $\lambda_1, ..., \lambda_r > 0$ *adalah skalar dengan* $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t = 1$ *supaya* $\sum_{t=1}^{r} \lambda_t y_t \in S^1$. *Maka* $y_i \in S^1$ *untuk semua* $i = 1, ..., r$.□

Set S^1 mempunyai sifat seperti cembung yang lemah terhadap set S^2. Titik dalam S^2 yang menyumbang secara tegas dalam gabungan cembung untuk membentuk satu titik dalam S^1 mestilah juga merupakan unsur dalam S^1. Oleh kerana ini benar bagi sebarang titik dalam S^2, maka benar pula untuk semua titik ekstremum [2] dalam S^2. Keputusannya diberi dalam korolari yang berikut.

Korolari 6.2 [3]*Jika* x *titik ekstremum dalam* S^1 *maka* x *titik ekstremum dalam* S^2. □

Dengan menggunakan keputusan-keputusan di atas, seseorang boleh menyimpulkan bahawa S^1 adalah bahagian khusus yang sangat istimewa dari sempadan S^2.

Korolari 6.3 [3]*Penyelesaian optimum kepada masalah kawalan sumber linear dua-paras (jika wujud) terjadi pada titik ekstremum bagi set kekangan semua pembolehubah* S^2.□

Ini adalah keputusan yang penting kerana ia menjustifikasikan prosedur carian titik ekstremum sebagai asas bagi algoritma untuk menyelesaikan masalah kawalan sumber linear dua-paras.

7. Algoritma untuk Pengaturcaraan Linear Dua-Paras.

Bahagian ini akan membentangkan kaedah untuk menyelesaikan masalah pengaturcaraan linear dua-paras. Kebanyakan perkembangan beralgoritma hingga kini telah dibuat untuk masalah kawalan sumber linear dua-paras yang boleh ditulis sebagai

$$\underset{x^{(1)}}{\text{maks}}\ c_1^{(1)}x^{(1)} + c_2^{(1)}x^{(2)} \qquad (p^{(1)})$$

dengan $x^{(2)}$ menyelesaikan

$$\underset{x^{(2)}}{\text{maks}}\ c_1^{(2)}x^{(1)} + c_2^{(2)}x^{(2)} \qquad (p^{(2)})$$

tertakluk kepada

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)}x^{(1)} + A^{(2)}x^{(2)} &= b \\ x^{(1)} &\geq 0 \\ x^{(2)} &\geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Perhatikan bahawa jika kekangan $Ax = b$ asalnya muncul daripada ketaksamaan, tanpa hilang itlaknya kita boleh mengumpukkan semua pembolehubah lalai kepada kawalan paras dua. Selanjutnya, oleh kerana $x^{(1)}$ tetap apabila $p^{(2)}$ diselesaikan oleh paras dua, kita menganggap $c_1^{(2)} = 0$.

Algoritma [2]. Andaikan $S^2 = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$ terbatas dan tidak menyusut dan $p^{(2)}$ memiliki penyelesaian unik untuk setiap $x^{(1)}$ yang tersaur. Misalkan a_j lajur ke-j matriks A dan $B \subseteq A$ sebagai asas.

c_B^l vektor pekali c^l yang terlibat dalam asas B. $x_{N_1}^{(1)}, x_{N_2}^{(1)}, ..., x_{N_k}^{(1)}$ merupakan pembolehubah paras-1 bukan asas yang bukan sifar.

Misalkan $r_j = c_B^1 B^{-1} a_{N_j} - c_{N_j}^1$ $(j = 1, ..., k)$ kos pengurangan pembolehubah bukan asas $x_{N_j}^1$ terhadap c^1. Misalkan

$$y_j = B^{-1}a_j \ (j = 1, ..., n)$$

dan

$$\overline{b} = B^{-1}b - \sum_{j=1}^{k} B^{-1}a_{N_j}x_{N_j}^{(1)}$$

Langkah 1: Cari penyelesaian optimum ($\widehat{x} = (\widehat{x}^{(1)}, \widehat{x}^{(2)})$) untuk $c^{(1)}x$ terhadap keseluruhan rantau tersaur S^2.

Langkah 2: Tentukan sama ada $\widehat{x}$ juga unsur S^1 atau tidak. Jika ya, algoritma tamat dengan penyelesaian optimum sejagat. Jika tidak cari $\overline{x} \in S^1$ dengan koordinat $x^{(1)}$ sama dengan $\widehat{x}^{(1)}$. Terus ke langkah 3 dengan asas $\overline{B}$ semasa dan hilangkan kekangan $x^{(1)} = \widehat{x}^{(1)}$.

Langkah 3: Jika semua pembolehubah bukan asas menjadi sifar, ke Langkah 6.

Langkah 4: Jika $\overline{b}_i > 0$ untuk semua i, ke langkah 5. Jika tidak pilih sebarang $\overline{b}_s = 0$ dan y_{s,N_j} dengan $1 \leq j \leq k$ dan $y_{s,N_j} \neq 0$. Jadikan x_{N_j} asas dengan pivot menyusut kemudian ke langkah 3.

Langkah 5: Pilih sebarang pembolehubah bukan asas yang positif secara tegas, $x^{(1)}_{N_j}$. Jika $r_j \leq 0$ maka tingkatkan nilai $x^{(1)}_{N_j}$ supaya menjadi asas. Jika $r_j > 0$ maka kita kurangkan nilai $x^{(1)}_{N_j}$ sehingga sifar atau pembolehubah baru menjadi asas. Terus ke langkah 3.

Langkah 6: Bermula dengan asas $\overline{B}$ semasa, masukkan calon x (yang menyebabkan nilai $< c^{(1)}, x >$ bertambah) ke dalam basis. Calon yang dipilih ini hendaklah yang menyebabkan penyelesaian asas yang diperoleh $\widetilde{x}$ termasuk dalam S^1, selesaikan masalah:

maksimumkan

$$< c^{(2)}, x >$$

tertakluk kepada

$$A^{(2)}x^{(2)} = (b - A^{(1)}\widetilde{x}^{(1)})$$
$$x^{(1)} = \widetilde{x}^{(1)}.x^{(2)} \geq 0$$

Jika $x^* = \widetilde{x}$ maka calon tersebut dijadikan asas. Ulang proses Langkah 6 untuk semua calon yang memenuhi syarat Langkah 6.

8. Penentuan Calon

Didapati wujud kelemahan dalam algoritma yang disarankan dalam Bahagian 7 terutama Langkah 6.

Pemilihan calon x tidak mudah seperti yang disangkakan dan boleh jadi sublelaran langkah 6 mencapai bilangan yang tak terhingga. Jika x sebagai calon yang dipilih itu merupakan titik ekstremum maka bilangan lelaran pelaksanaan langkah 6 adalah terhingga.

Penentuan calon x yang merupakan titik ekstremum tadi dapat dilakukan jika kita bergerak di sepanjang kekangan aktif dan inilah bentuk pengubahsuaian yang disarankan dalam bahagian ini. Penjelasan mendalam tentang kaedah ini boleh dilihat dalam [1].

Calon-calon yang diperoleh dalam Bahagian 7 merupakan titik-titik ekstremum yang seterusnya boleh jadi merupakan pengoptimum tempatan atau sejagat. Untuk mengelak daripada memperoleh titik-titik ekstremum tempatan beberapa pembetul perlu dikemukakan seperti yang diberikan dalam bahagian ini.

Misalkan kita berada pada titik kedudukan $y^{(1)}$ yang terletak pada kekangan kesamaan k_1. Bermula dari titik $y^{(1)}$ kita bergerak ke titik tersaur $y^{(2)} \in k_i \cap k_j$ $(i \neq j)$ di sepanjang garis k_1. Jika kekangan kesamaan k_j ini termasuk dalam rantau rel kereta api maka kita teruskan mencari titik $y^{(3)}$ dengan cara yang serupa di sepanjang garis k_j. Jika k_j tidak termasuk dalam rantau kereta api maka bermula dari titik $y^{(2)}$ cari titik tersaur $y^{(3)}$ di sepanjang garis k_i dengan keadaan $y^{(3)} \in k_i \cap k_m$. Dengan cara sedemikian kita boleh mengumpulkan titik-titik ekstremum untuk digunakan sebagai calon dalam Langkah 6 algoritma yang diberikan dalam Bahagian 7.

9. Pengubahsuaian

Penyelesaian optimum yang diperoleh dalam Bahagian 7 adakalanya merupakan pengoptimuman tempatan. Untuk senantiasa memperolehi penyelesaian optimum sejagat beberapa pembetul

perlu dikemukakan seperti yang diberikan dalam bahagian ini.

Misalnya kita berada pada kedudukan $y^{(k)} = K_u \cap K_v$. Andaikan $y^{(k+1)} \notin S^1$ maka kita tambah kekangan baru $c^{(1)}x \leq c^{(1)}y^{(k)}$. Andaikan k_w ialah $c^{(1)}x = c^{(1)}y^{(k)}$. Bermula dari titik $y^{(k)}$ kita bergerak ke titik $y^{(k+2)} \in k_w \cap k_p$. Jika $y^{(k+2)} \notin S^1$ maka $y^{(k)}$ ialah penyelesaian optimum sejagat dan proses tamat. Jika $y^{(k+2)} \in S^1$ ($y^{(k+2)}$ penyelesaian optimum setempat) maka kita teruskan mencari titik $y^{(k+3)}$ dengan cara yang serupa dalam Bahagian 8 di sepanjang garis k_p. Teruskan proses seperti biasa.

10. Pengiraan Berangka

Dalam bahagian ini kita akan tunjukkan sebahagian pengiraan yang terlibat dalam kaedah pengubahsuaian seperti yang disarankan dalam Bahagian 7.

Contoh 8.1.

$$\underset{x_1}{\text{Maks}}\ x_2$$

dengan x_2 menyelesaikan

$$\underset{x_2}{\text{Maks}}\ -x_2$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\leq -10 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 38 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Keputusan selepas Langkah 1 dan Langkah 2 algoritma dalam Bahagian 6 dilaksanakan adalah (10,2). Untuk melakukan langkah 6 kita perlu kepada calon yang menyebabkan nilai $< c^{(1)}, x >$

bertambah. Contoh-contoh calon adalah seperti titik-titik (12,3) (0,5), (16,11) dan (8,1).

Mengikut kaedah pengubahsuaian dalam Bahagian 8, titik (12,3) dapat ditentukan dengan menggunakan hujah yang tepat seperti berikut. Bermula pada titik (10,2) bergerak di sepanjang kekangan aktif kedua dan berhenti apabila bersilang dengan kekangan aktif ketiga pada titik (12,3). Kiraannya adalah yang seperti berikut.

$$(10,2) + \alpha(2,1) \in 2x_1 - x_2 = 21$$

sehingga

$$2(10 + 2\alpha) - (2 + \alpha) = 21$$

memberikan $\alpha = 1$. Jadi diperoleh titik (12,3).□

Dalam penentuan titik-titik calon tadi, hendaklah diambil kira tentang ketersauran titik-titik ekstremum yakni mestilah berada dalam rantau kereta api.

Contoh 8.2.

$$\underset{x_1}{\text{Maks}} \; -x_1 - 2x_2$$

dengan x_2 menyelesaikan

$$\underset{x_2}{\text{Maks}} \; x_2$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -4x_1 + 10x_2 &\leq 15 \\ 4x_1 + 10x_2 &\geq 15 \\ 10x_1 + 4x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Selepas langkah pertama dan kedua, diperoleh penyelesaian sejagat $(x_1^*, x_2^*) = (2.5, 2.5)$.□

Contoh 8.3.

$$\underset{x_1}{\text{Maks}} \; -x_1 - 5x_2$$

dengan x_2 menyelesaikan

$$\underset{x_2}{\text{Maks}} \; x_2$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -8 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 48 \\ 2x_1 - 5x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Penyelesaian sejagat $(x_1^*, x_2^*) = (12, 3)$.□

Contoh 8.4.

$$\underset{x_1}{\text{Maks}} \; x_1 + 10x_2$$

dengan x_2 menyelesaikan

$$\underset{x_2}{\text{Maks}} \; -x_2$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} -25x_1 + 20x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 10x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Penyelesaian sejagat $(x_1^*, x_2^*) = (8, 1)$.□

Contoh 8.5.

$$\underset{x_1}{\text{Maks}} \; -2x_1 + 11x_2$$

dengan x_2 menyelesaikan

$$\underset{x_2}{\text{Maks}} \; -x_1 - 3x_2$$

tertakluk kepada

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 24 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 96 \\ x_1 + 7x_2 &\leq 126 \\ -4x_1 + 5x_2 &\leq 65 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Menerusi algoritma dalam Bahagian 7 diperoleh penyelesaian setempat (0,2). Akan tetapi menerusi algoritma pengubahsuaian seperti yang dinyatakan dalam Bahagian 9 diperoleh penyelesaian sejagat (17.45,10.91).□

11. Kesimpulan

Berdasarkan perbincangan dalam Contoh 8.1 dan keputusan yang dihasilkan oleh kedua-dua algoritma di atas dalam Contoh 8.5, maka kita boleh menyimpulkan bahawa terdapat kelemahan dalam algoritma yang disarankan dalam Bahagian 7 jika dibandingkan dengan pengubahsuaian yang diberikan dalam Bahagian 8 dan Bahagian 9.

Rujukan

[1] A. Jaafar & I. B. Mohd, *Penentuan Titik Optimum Masalah Pengaturcaraan Linear Dua Matra*, Laporan Teknik, Jabatan Matematik, Universiti Pertanian Malaysia, (1993.).

[2] H. I. B. Mohd, *Teori dan Penggunaan Pengaturcaraan Linear*, Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur, 1991..

[3] W. F. Bialas & M. H. Karwan, *Two-Level Linear Programming*, Management Science **30** (1984)), 1004 – 1020..