

KEBERKESANAN BEBERAPA KAEDAH BERLELAR TTKS SELARI

ZAITON MUDA
MOHAMAD OTHMAN, ROZITA JOHARI

Jabatan Sains Komputer
Universiti Pertanian Malaysia
43400 UPM Serdang
Selangor Darul Ehsan

Abstrak Dalam Makalah ini, dua algoritma selari bagi menyelesaikan masalah parabola dengan simetri silinder telah dibangun dan dilaksanakan dalam komputer selari MIMD (Multi-Instruction Multi-Data) Sequent S27. Kaedah Berlelar Tidak Tersirat Kumpulan Berselang-seli (TTKS) digunakan kerana kaedah ini mempunyai tugas-tugas yang berasingan dan merdeka yang sesuai dilaksanakan dalam komputer selari. Kaedah ini juga memberikan hasil yang jitu. Keputusan daripada kedua-dua algoritma yang dibina dibincangkan keberkesanannya.

1. PENGENALAN

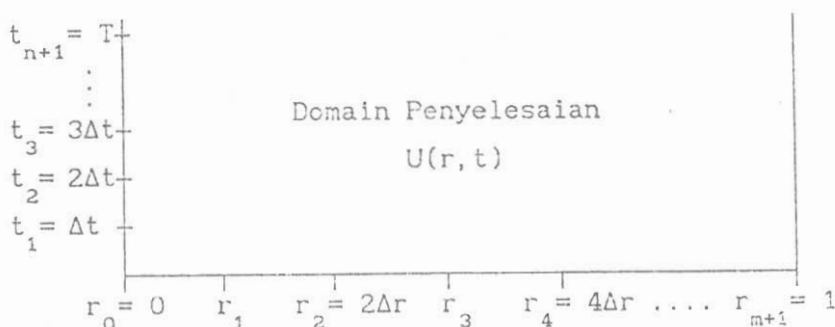
Konsep asas bagi kaedah berlelar TTKS adalah seperti berikut. Pertimbangkan persamaan dalam satu matra di bawah,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (1.1)$$

dengan syarat-syarat awal dan sempadan,

$$\left. \begin{aligned} U(r, 0) &= f(r), & 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\partial U}{\partial r}(0, t), & \quad U(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Supaya senang difahami, rangkaian ruang yang seragam digunakan dengan titik-titik jarak $r_i = i\Delta r, t_j = j\Delta t$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, m, m+1$ dan $j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$ yang $\Delta r = 1/(m+1)$, $\Delta t = 1/(n+1)$ dan $\lambda = \Delta t/(\Delta r)^2$. Domain penyelesaian adalah seperti Rajah 1.1 di bawah.



RAJAH 1.1

Daripada Saul'yev [6] penghampiran berpemberat bagi persamaan (1.1) diberikan seperti berikut,

$$[1 + 4\lambda\theta]u_{0,j+1} - 4\lambda\theta u_{1,j+1} = [1 - 4\lambda(1 - \theta)]u_{0,j} + 4\lambda(1 - \theta)u_{1,j} \quad (1.3)$$

pada paksi $r = 0$ dan

$$\begin{aligned} & -p_i\theta u_{i-1,j+1} + (1 + 2\lambda\theta)u_{i,j+1} - q_i\theta u_{i+1,j+1} \\ & = p_i(1 - \theta)u_{i-1,j} + [1 - 2\lambda(1 - \theta)]u_{i,j} \\ & \quad + q_i(1 - \theta)u_{i+1,j}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (1.4)$$

untuk titik-titik bukan pada paksi dengan $p_i = (1 - \frac{1}{2i})\lambda$ dan $q_i = (1 + \frac{1}{2i})\lambda$.

Persamaan (1.3) dan (1.4) adalah sepadan dengan kaedah-kaedah Tersirat Lengkap, Crank-Nicholson dan Tidak Tersirat jika $\theta = 1, 0.5$, dan 0 masing-masing dengan kejituan $O((\Delta r)^2 + \Delta t)$, $O((\Delta r)^2 + (\Delta t)^2)$ dan $O((\Delta r)^2 + \Delta t)$.

Dalam bentuk matriks, Persamaan (1.3) dan (1.4) dapat ditulis sebagai

$$AU_{j+1} = \underline{f} \quad (1.5)$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ 0 & \dots & & & c_m & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix}$$

yang

$$a_0 = 1 + 4\lambda\theta, \quad b_0 = -4\lambda\theta$$

$$c_i = -p_i\theta, \quad a_i = a = (1 + 2\lambda\theta), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$b_i = -q_i\theta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1;$$

$$f_0 = [1 - 4\lambda(1 - \theta)u_{0,j} + 4\lambda(1 - \theta)u_{1,j}]$$

$$f_i = p_i(1 - \theta)u_{i-1,j} + [1 - 2\lambda(1 - \theta)]u_{i,j} + q_i(1 - \theta)u_{i+1,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$f_m = p_m(1 - \theta)u_{m-1,j} + [1 - 2\lambda(1 - \theta)]u_{m,j} + q_m[\theta u_{m+1,j+1} + (1 - \theta)u_{m+1,j}].$$

Matriks A kemudiannya dipecahkan kepada dua matriks,

$$A = G_1 + G_2 \quad (1.6)$$

yang $(G_1 + \hat{r}I)$ dan $(G_2 + \hat{r}I)$ adalah tidak singular untuk sebarang nilai $\hat{r} > 0$, ($\hat{r}$ adalah parameter pecutan). Jika m adalah genap akan diperolehi matriks G_1 dan G_2 seperti ditunjukkan di halaman sebelah.

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & \frac{1}{2}a & & & \\ & \frac{1}{2}a & b_2 & & \\ & c_3 & \frac{1}{2}a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2}a & b_{m-1} \\ & & & & c_m & \frac{1}{2}a \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \quad (1.7a)$$

dan

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 & & & & & \\ & \frac{1}{2}a & b_1 & & & \\ & c_2 & \frac{1}{2}a & & & \\ & & \frac{1}{2}a & b_3 & & \\ & & c_4 & \frac{1}{2}a & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2}a & b_{m-2} \\ & & & & & c_{m-1} & \frac{1}{2}a \\ & & & & & & \frac{1}{2}a \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \quad (1.7b)$$

Menggunakan (1.6), persamaan matriks (1.5) dapat ditulis semula dalam bentuk,

$$(G_1 + G_2)\underline{U} = \underline{f} \quad (1.8)$$

Mengikut Evans dan Sahimi (3), akan diperolehi skema penumpuan lelaran TTKS,

$$\underline{U}^{(k+1/2)} = (G_1 + \hat{r}I)^{-1}(\hat{r}I - G_2)\underline{U}^{(k)} + \underline{f} \quad (1.9a)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(k+1)} = (G_2 + \hat{r}I)^{-1}(G_2 - (1 - \omega)\hat{r})\underline{U}^{(k)} \\ + (2 - \omega)\hat{r}\underline{U}^{(k+1/2)} \end{aligned} \quad (1.9b)$$

untuk sebarang $0 \leq \omega \leq 2$ dan $\hat{r} > 0$. Jika $\omega = 0$ akan diperolehi skema Peaceman-Rachford dengan ralat pemangkasan

$$T_{PR} = O((\Delta r)^2 + (\Delta t)^2),$$

dan $\omega = 1$ akan memberikan skema Douglas-Rachford dengan ralat

$$T_{DR} = O((\Delta r)^2 + \Delta t).$$

Daripada (1.7a) dan (1.7b) dapat diperhatikan bahawa $(G_1 + \hat{r}I)$ dan $(G_2 + \hat{r}I)$ mudah untuk disongsangkan.

2. ASPEK PENGIRAAN BAGI SKEMA TTKS

Daripada Sahimi dan Muda (5), berikut adalah persamaan-persamaan pengiraan bagi masalah (1.1).

1. Pada paras {lelaran} $k + 1/2$.

$$u_0^{(k+1/2)} = (A_0 u_0^{(k)} + B_0 u_1^{(k)} + C_0 u_0^{(k)} + D_0)/\alpha_0$$

$$u_1^{(k+1/2)} = (A_1 u_0^{(k)} + B_1 u_1^{(k)} + C_1 u_1^{(k)} + D_1)/\alpha_0$$

$$u_i^{(k+1/2)} = (A_i u_{i-1}^{(k)} + B u_i^{(k)} + C_i u_{i+1}^{(k)} + D_i u_{i+2}^{(k)} + E_i)/\alpha_{i/2}$$

$$i = 2, 4, \dots, m-1$$

$$u_{i+1}^{(k+1/2)} = (\bar{A}_i u_{i-1}^{(k)} + \bar{B}_i u_i^{(k)} + B u_{i+1}^{(k)} + \bar{C}_i u_{i+2}^{(k)} + \bar{D}_i)/\alpha_{i/2}$$

$$i = 2, 4, \dots, m-1$$

(2.1)

yang

$$\begin{aligned} A_0 &= \bar{s}_0 s_0, & B_0 &= -b_0 s, & C_0 &= b_0 b_1, & D_0 &= \bar{s}_0 f_0 - b_0 f_1, \\ A_1 &= -c_1 s_0, & B_1 &= \bar{s}_0 s, & C_1 &= -\bar{s}_0 b_1, & D_1 &= -c_1 f_0 + \bar{s}_0 f_1, \\ A_i &= -c_i \bar{s}, & B &= s \bar{s}, & C_i &= -b_i s, & E_i &= \bar{s} f_i - b_i f_{i+1}, \end{aligned}$$

$$D_i = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = m-1 \\ b_i b_{i+1} & \text{selebihnya} \end{cases}$$

$$\bar{A}_i = c_i c_{i+1}, \quad \bar{B}_i = -s c_{i+1}, \quad \bar{D}_i = s f_{i+1} - c_{i+1} f_i,$$

$$\bar{C}_i = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = m-1 \\ -\bar{s} b_{i+1} & \text{selebihnya} \end{cases}$$

dengan

$$\begin{aligned} \bar{s}_0 &= \hat{r} + \frac{1}{2} a_0, & \bar{s} &= \hat{r} + \frac{1}{2} a, & s_0 &= \hat{r} - \frac{1}{2} a_0, & s &= \hat{r} - \frac{1}{2} a, \\ \alpha_0 &= \bar{s}_0 \bar{s} - b_0 c_1, & \alpha_i &= \bar{s}^2 - b_{2i} c_{2i+1}. \end{aligned}$$

2. Pada paras (lelaran) $(k+1)$.

$$\begin{aligned} u_0^{(k+1)} &= (q_0 u_0^{(k)} + d u_0^{(k+1/2)}) / \bar{s}_0 \\ u_i^{(k+1)} &= (P_i u_i^{(k)} + Q_i u_{i+1}^{(k)} + R u_i^{(k+1/2)} + S_i u_{i+1}^{(k+1/2)}) / \hat{\alpha}_{(i+1)/2} \\ &\quad i = 1, 3, \dots, m-2 \\ u_i^{(k+1)} &= (\bar{P}_i u_i^{(k)} + \bar{P}_i u_{i+1}^{(k)} + \bar{Q}_i u_i^{(k+1/2)} + R u_{i+1}^{(k+1/2)}) / \hat{\alpha}_{(i+1)/2} \\ &\quad i = 1, 3, \dots, m-2 \\ u_m^{(k+1)} &= (q u_m^{(k)} + d u_m^{(k+1/2)}) / \bar{s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

yang

$$\begin{aligned} p_i &= \bar{s} q - b_i c_{i+1}, & Q_i &= b_i (\bar{s} - q), & R &= \bar{s} d, & S_i &= -b_i d, \\ \bar{P}_i &= c_{i+1} (\bar{s} - q), & \text{dan } \bar{Q}_i &= -c_{i+1} d. \end{aligned}$$

dengan

$$q_0 = \frac{1}{2}a_0 - (1 - \omega)\hat{r}, \quad q = \frac{1}{2}a - (1 - \omega)\hat{r}, \quad d = (2 - \omega)\hat{r},$$

$$\text{dan } \hat{\alpha}_i = \bar{s}^2 - b_{2i-1}c_{2i}.$$

Dalam kaedah TTKS ini, paras $(k + 1/2)$ dan $(k + 1)$ akan diselesaikan secara berselang-seli pada semua titik dalam selang $(0, 1)$ sehingga memenuhi kriterium penumpuan yang dikehendakki.

3. EKSPLOITASI SELARI

Dua strategi telah dikaji dan dilaksanakan dalam sebuah komputer selari MIMD (Multi-Instruction Multi-Data) Sequent S27 berkongsi ingatan dengan dua pemproses. Tumpuan utama kedua-dua strategi ini ialah bagaimana masalah itu akan diselesaikan dengan memecahkan kepada tugas-tugas yang lebih kecil dan tidak bersandaran supaya dapat diselesaikan secara selari.

Dalam strategi pertama, penyelesaian dilakukan paras demi paras dimana paras pertama, paras $(k + 1/2)$, akan diselesaikan terlebih dahulu sebelum paras kedua, paras $(k + 1)$, dimulakan. Dalam paras pertama, dua titik jaring yang pertama akan diselesaikan terlebih dahulu secara berjujukan. Kemudian setiap pasangan titik jaring yang seterusnya akan diselesaikan secara selari dimana setiap satunya dihantar kepada pemproses yang berlainan. Dalam para kedua pula, titik jaring yang pertama akan diselesaikan terlebih dahulu diikuti dengan pasangan titik jaring yang seterusnya yang akan diselesaikan secara selari seperti paras pertama. Strategi pertama memerlukan dua lelaran selari bagi menyelesaikan pasangan-pasangan titik jaring dalam kedua-dua paras. Setelah kedua-dua paras diselesaikan satu ujian penumpuan akan dilakukan. Lelaran seterusnya akan dilakukan sehingga kriterium penumpuan dipenuhi. Jujukan perlaksanaan titik-titik jaring dalam strategi ini dapat digambarkan seperti Rajah 3.1.

$$u_0^{k+\frac{1}{2}}, u_1^{k+\frac{1}{2}}, \dots, u_m^{k+\frac{1}{2}} \quad u_0^{k+1}, u_1^{k+1}, \dots, u_m^{k+1}$$

RAJAH 3.1

Strategi kedua pula berasaskan kepada penyelesaian kedua-dua paras serentak. Titik jaring pertama dalam kedua-dua paras akan dikira terlebih dahulu secara berjujukan. Titik-titik jaring seterusnya dalam kedua-dua paras akan dibahagikan kepada blok-blok yang merdeka. Setiap blok terdiri daripada 4 titik jaring iaitu dua daripada paras pertama dan dua daripada paras kedua. Kedua-dua titik jaring paras kedua adalah bersandaran dengan kedua-dua titik jaring paras pertama. Setiap blok diumpukkan kepada satu pemproses, maka pada satu masa dua blok diselesaikan secara selari. Setelah kesemua blok diselesaikan, titik jaring terakhir dalam kedua-dua paras akan diselesaikan. Satu ujian penumpuan akan dijalankan dan lelaran seterusnya akan dilakukan sehingga kriterium penumpuan dipenuhi. Jujukan pelaksanaan titik-titik jaring dalam strategi ini dapat digambarkan seperti Rajah 3.2.

$$u_0^{k+\frac{1}{2}}, u_0^{k+1}, u_1^{k+\frac{1}{2}}, u_2^{k+\frac{1}{2}}, u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, \\ u_{m-2}^{k+\frac{1}{2}}, u_{m-1}^{k+\frac{1}{2}}, u_{m-2}^{k+1}, u_{m-1}^{k+1}, u_m^{k+\frac{1}{2}}, u_m^{k+1}$$

RAJAH 3.2

4. ALGORITMA-ALGORITMA SELARI

Berikut adalah algoritma bagi setiap strategi di atas dengan Algoritma-1 untuk strategi pertama dan Algoritma-2 untuk strategi kedua.

Algoritma-1.

Algoritma-1 mula

Langkah 1: untuk $h = 1$ hingga n laksanakan

$$(1.1) \quad T = h(\Delta t)$$

$$(1.2) \quad l = 0$$

(1.3) selagi (belum menunpu) dan $(1 < MAX)$ laksanakan

$$(1.3.1) \quad l = l + 1$$

$$(1.3.2) \quad u_0^{k+1/2} = \dots$$

$$(1.3.3) \quad u_1^{k+1/2} = \dots$$

- (1.3.4) untuk $i = 2$ hingga $m - 1$ tambah 2
 bina Proses-1 selari
 tamat(untuk)
- (1.3.5) $u_0^{k+1} = \dots$
- (1.3.6) untuk $i = 1$ hingga $m - 2$ tambah 2
 bina Proses-2 selari
 tamat(untuk)
- (1.3.7) $U_m^{k+1} = \dots$
- (1.3.8) uji penumpuan $|u_i^{k+1} - u_i^k| < \epsilon$ untuk semua i
- (1.3.9) umpuk $u_i^k \leftarrow u_i^{k+1}$ nilai baru
 tamat(selagi)
 tamat(untuk)

Langkah 2: Proses-1 mula

- $u_1^{k+1/2} = \dots$
 $u_{i+1}^{k+1/2} = \dots$
 tamat(proses-1)

Langkah-3: Proses-2 mula

- $u_i^{k+1} = \dots$
 $u_{i+1}^{k+1} = \dots$
 tamat(Proses-2)

tamat(Algoritma-1)

Algoritma-2.

Algoritma-2 mula

Langkah 1: untuk $h = 1$ hingga n laksanakan

- (1.1) $T = h(\Delta t)$
- (1.2) $l = 0$
- (1.3) selagi (belum menunpu) dan $(1 < MAX)$ laksanakan
- (1.3.1) $l = l + 1$
- (1.3.2) $u_0^{k+1/2} = \dots$
- (1.3.3) $u_0^{k+1} = \dots$
- (1.3.4) untuk $i = 2$ hingga $m - 1$ tambah 2
 bina Proses-1 selari
 tamat(untuk)

$$(1.3.5) \quad u_m^{k+1/2} = \dots$$

$$(1.3.6) \quad u_m^{k+1} = \dots$$

$$(1.3.7) \quad \text{uji penumpuan } |u_i^{k+1} - u_i^k| < \epsilon \text{ untuk semua } i$$

$$(1.3.8) \quad \text{umpuk } u_i^k \leftarrow u_i^{k+1} \text{ nilai baru}$$

tamat(selagi)

tamat(untuk)

Langkah 2: Proses-1 mula

$$u_i^{k+1/2} = \dots$$

$$u_{i+1}^{k+1/2} = \dots$$

$$u_i^{k+1} = \dots$$

$$u_{i+1}^{k+1} = \dots$$

tamat(proses-1)

tamat(Algoritma-2)

5. KEPUTUSAN UJIKAJI DAN KESIMPULAN

Dalam ujikaji ini digunakan masalah silinder (Mitchell & Pearce [1]),

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (5.1)$$

dengan syarat-syarat awal dan sempadan,

$$\left. \begin{aligned} U(r, 0) &= J_0(\beta r), & 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\partial U}{\partial r}(0, 1) &= 0, & U(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

yang $J_0(\beta r)$ adalah fungsi Bessel bentuk pertama berperingkat 0, manakala β adalah punca pertama bagi $J_0(\beta) = 0$. Penyelesaian tepatnya ialah

$$U(r, 0) = J_0(\beta r)e^{-\beta t}. \quad (5.3)$$

Kriterium penumpuan yang digunakan ialah

$$|u^{k+1} - u^k| \leq 10^{-4},$$

manakala nilai parameter pecutan $\hat{r}$ dipilih untuk menghasilkan penumpuan yang paling tepat.

Kedua-dua strategi di atas telah dilaksanakan secara selari dalam sistem Sequent S27 menggunakan bahasa C dan sistem pengoperasian DYNIC. Kami telah menggunakan fungsi `Getusclk ( )` dalam unit mikrosaat bagi mendapatkan masa perlaksanaan aturcara. Penyelesaian masalah (5.2)–(5.3) menggunakan kaedah berlelar TTKS telah dibuktikan kejituan dan kestabilannya dalam Sahimi dan Muda 5. Keputusan yang sama juga diperolehi dalam kedua-dua strategi diatas.

Rajah 5.1 menunjukkan masa larian bagi kedua-dua strategi yang telah dibincangkan dan juga perlaksanaan secara jujukan. Rajah tersebut adalah berdasarkan kepada input $\hat{r} = 0.9$, $\Delta t = 0.01$, $\Delta r = 0.1$ dan $\omega = 1$ (skema Douglas-Rachford). Rajah 5.2 pula menunjukkan derasan (*speedup*) bagi kedua-dua strategi tersebut. Ukuran bagi derasan ini adalah mengikut Akl [2],

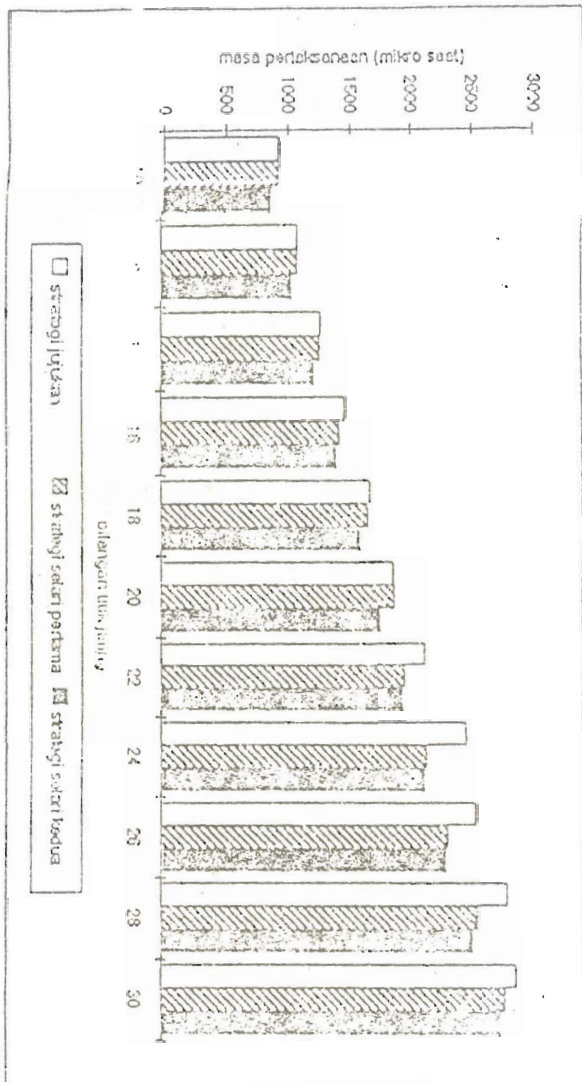
Derasan

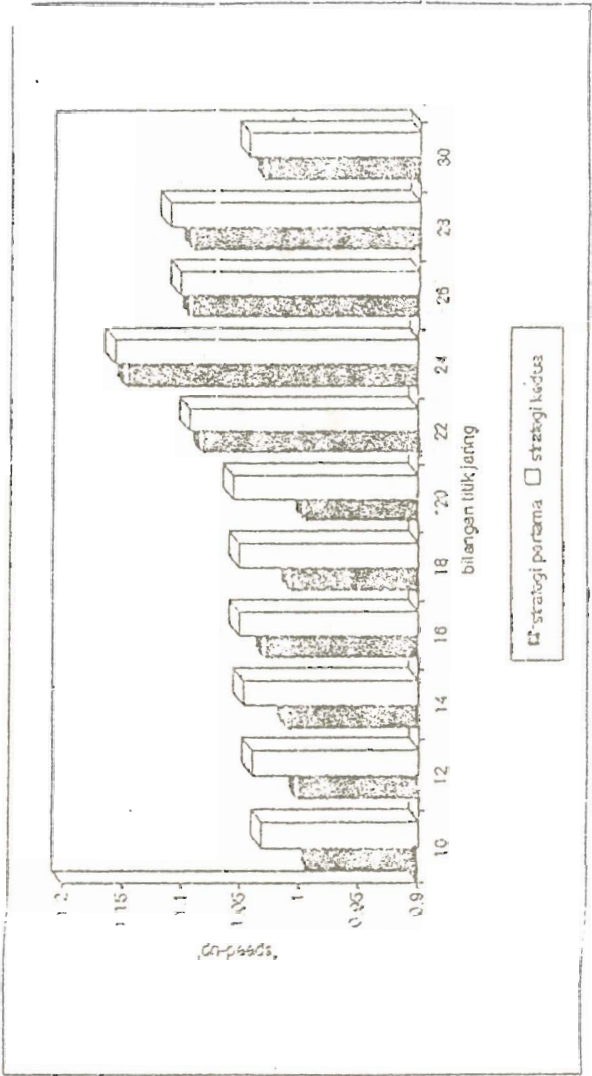
$$= \frac{\text{Kes masa larian terburuk bagi algoritma jujukan tercepat}}{\text{Kes masa larian terburuk bagi algoritma selari}}$$

dimana semakin tinggi nilai derasan semakin berkesan sesuatu algoritma itu.

Daripada kedua-dua rajah tersebut didapati strategi kedua adalah lebih baik. Ini mungkin disebabkan strategi kedua memerlukan hanya satu lelaran selari sahaja untuk menyelesaikan kedua-dua paras sedangkan strategi kedua memerlukan dua lelaran selari. Pada kebiasaannya setiap lelaran selari akan mewujudkan *overhead* yang akan melambatkan perlaksanaannya. Beban kerja bagi setiap lelaran selari dalam strategi pertama juga sedikit berbanding dengan strategi kedua, maka keberkesanan perlaksanaan kerja oleh setiap pemproses tidak efektif. Keputusan yang didapati adalah berasaskan kepada komputer Sequent S27 yang hanya mempunyai dua pemproses sahaja. Keputusan yang lebih baik dijangkakan jika bilangan pemproses adalah lebih banyak.

Rajah 5.1: Masa pelaksanaan bagi penyelesaian secara jujukan dan kedua-dua strategi selari.





Rajah 5.2: Derasan bagi kedua-dua strategi selari

RUJUKAN

- [1] A. R. Mitchell & R. P. Pearce, *Explicit Difference Method for Solving the Cylindrical Heat Conduction Equations*, *Math. Comp.* 17,, 1963.
- [2] S. G. Akl, *The Design and Analysis of Parallel Algorithms*, Prentice Hall Inc. New Jersey, 1989.
- [3] D. J. Evans & M. S. Sahimi, *The Alternating Group Explicit Iterative Methods (AGE) to solve Parabolic and Hyperbolic Partial Differential Equations* *Ann. Rev. Num. Fluid Mech. & Heat Trans. Hemisphere Pub. Corp.*, 1987.
- [4] D. J. Evans & C. Sutti, *Parallel Computing, Methods, Algorithms and Applications*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [5] M. S. Sahimi & Z. Muda,, *An Iterative Explicit Method For Parabolic Problems with Special Geometries*, *Tech. Report PPK/Mac 88/LT 7, UKM*, (1988).
- [6] Saul'yev, *Integration of Equations of parabolic Type by the Methods of Nets*, (1964), Oxford Pergamon Press.