Matematika, 1997, Jilid 13, hlm. 13–19

Fungsi α–Cembung Secara Logaritma

Maslina Darus
Jabatan Matematik, Fakulti Sains Matematik
Universiti Kebangsaan Malaysia
Bangi 43600 Selangor, Malaysia

Abstrak Untuk $\alpha \geq 0$,andaikan M^{α} sebagai kelas bagi fungsi ternormal cembung secara logaritma pada cakera unit D dan diberi oleh

$$\mathrm{Ny}\left[\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}\right] > 0,$$

dan $f(z)^{1-\alpha}f'(z)^{\alpha} \neq 0$ .Untuk $f \in M^{\alpha}$ dan diberi oleh

$$f(z) \;=\; z + \; a_2 z^2 \;+\; a_3\; z^3 \;+\; \ldots\;,$$

batasan atas terbaik diperolehi bagi fungsian Fekete-Szegö $|a_3 - \mu a_2^2|$ apabila μ nyata.

Katakunci Fungsi cembung, fungsi bak-bintang, fungsian Fekete-Szegö, herotan.

Abstract *For $\alpha \geq 0$, let M^{α} be the class of normalised analytic α-logarithmically convex functions defined in the open unit disc by*

$$Re\left[\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}\right] > 0,$$

and $f(z)^{1-\alpha}f'(z)^{\alpha} \neq 0$. For $f \in M^{\alpha}$ and given by

$$f(z) \;=\; z + \; a_2 z^2 \;+\; a_3\; z^3 \;+\; \ldots\;,$$

sharp upper bounds are obtained for the Fekete-Szegö functional $|a_3 - \mu a_2^2|$ when μ is real.

Keywords *Convex function, starlike function, Fekete-Szegö functional, distortion.*

1 Pengenalan

Andaikan f fungsi analisis ternormal

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

pada cakera unit D. Perhatian telah diberi dalam beberapa tahun ini kepada fungsi α-cembung. Generalisasi bagi fungsi cembung dan bak bintang telah mula diperkenalkan oleh Miller, Mocanu dan Reade [5] dan dinyatakan seperti berikut:

Takrif 1 *Andaikan $\alpha \in \mathbb{R}$. Fungsi f analisis pada D dan diberi oleh (1.1) disebut sebagai α-cembung jika, untuk $z \in D$ dan $f(z)f'(z) \neq 0$,*

$$Ny\left[\alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right] > 0,$$

Kelas fungsi ini dilambangkan sebagai M_α.

Terdapat keunikan fungsi α-cembung ini iaitu untuk $\alpha \in \mathbb{R}$, ianya membentuk suatu subset bagi fungsi bak-bintang. Kebanyakan masalah ekstrema asas yang penting telah diselesaikan untuk M_α seperti Kulshrestha [3] memperolehi penganggaran yang terbaik bagi pekali untuk fungsi dalam M_α dan Miller [4] memperolehi teorem herotan. Masalah Fekete-Szegö juga telah diselesaikan [7].

Sekarang diperkenalkan analog geometri bagi M_α seperti berikut:

Takrif 2 *Andaikan $\alpha \geq 0$. Fungsi f analisis pada D dan diberi oleh (1.1) disebut sebagai α-cembung secara logaritma jika, untuk $z \in D$ dan $f(z)^{1-\alpha} f'(z)^\alpha \neq 0$*

$$Ny\left[\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}\right] > 0. \tag{1.2}$$

Kelas fungsi ini dilambangkan sebagai M^α.

Dengan adanya kuasa pada sebelah kiri (1.2), hasil dalam M^α menjadi kelas fungsi yang agak rumit untuk diselesaikan jika dibandingkan dengan M_α. Disebabkan kelas M^α masih belum diterokai, adalah menjadi anggapan bahawa batasan yang terbaik dalam M^α agak sukar diperolehi.

Di sini ditekankan kepada masalah pekali dan memperolehi beberapa batasan terbaik bagi $|a_2|$, $|a_3|$ dan fungsian Fekete-Szegö. Keputusan yang diperolehi dapat diperluaskan ke kelas fungsi $M^\alpha(\beta)$ dan dinyatakan dalam penulisan ini.

Keputusan berikut diperlukan untuk pembuktian lanjutan dalam penulisan ini:

Lambangkan dengan P kelas fungsi-fungsi $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ yang analisis pada D dan memenuhi

$$\text{Ny } p(z) > 0$$

untuk $z \in D$ [2].

Lema 1 *([1],[6]) Andaikan $p \in P$. Maka*

$$|p_n| \leq 2, \qquad (n \geq 1),$$

dan

$$\left|p_2 - \frac{1}{2}p_1^2\right| \leq 2 - \frac{1}{2}|p_1|^2.$$

2 Keputusan

Teorem Fekete-Szegö dimulakan untuk μ kompleks .

Teorem 1 *Andaikan $f \in M^\alpha$ dan diberi oleh (1.1). Maka untuk μ kompleks ,*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{1}{1+2\alpha} maks \left[1, \frac{|3(1+3\alpha) - 4\mu(1+2\alpha)|}{(1+\alpha)^2}\right].$$

Bagi setiap μ terdapat fungsi dalam M^α, agar sedemikian kesamaan dipenuhi.

Bukti

Dari (1.2) boleh ditulis

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^\alpha \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha} = p(z), \tag{2.1}$$

untuk $z \in D$, $p \in P$ dengan $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$ dan f diberi oleh (1.1).

Samakan pekali dalam (2.1) menghasilkan

$$p_1 = (1+\alpha)a_2,$$

dan

$$2p_2 = 4(1+2\alpha)a_3 - (2 + 7\alpha - \alpha^2)a_2^2,$$

maka

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{p_2}{2(1+2\alpha)} - \frac{(\alpha^2 - 7\alpha - 2)p_1^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} - \frac{\mu p_1^2}{(1+\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{2(1+2\alpha)}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right) + \frac{(3 + 9\alpha - 4\mu(1+2\alpha))p_1^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Oleh yang demikian (2.2) dan Lema 1, memberi

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{1}{2(1+2\alpha)}\left|p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right| + \frac{|3 + 9\alpha - 4\mu(1+2\alpha)||p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} \\ &\leq \frac{1}{2(1+2\alpha)}\left(2 - \frac{|p_1^2|}{2}\right) + \frac{|3 + 9\alpha - 4\mu(1+2\alpha)||p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} \\ &= \frac{1}{(1+2\alpha)} + \frac{|p_1|^2\{|3 + 9\alpha - 4\mu(1+2\alpha)| - (1+\alpha)^2\}}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}, \end{aligned}$$

dengan $|p_1| \leq 2$,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\alpha}, & \text{jika} \quad \kappa(\alpha) \leq (1+\alpha)^2, \\ \dfrac{1}{1+2\alpha} \dfrac{|3(1+3\alpha) - 4\mu(1+2\alpha)|}{(1+\alpha)^2}, & \text{jika} \quad \kappa(\alpha) \geq (1+\alpha)^2, \end{cases}$$

dan $\kappa(\alpha) = |3(1+3\alpha) - 4\mu(1+2\alpha)|$.

Kesamaan diperolehi untuk fungsi dalam M^α diberi oleh

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^\alpha \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha} = \frac{1+z^2}{1-z^2} \tag{2.3}$$

dan

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^\alpha \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha} = \frac{1+z}{1-z} \tag{2.4}$$

masing-masing. $\square$

Perhatian

Dari (2.1) didapati bahawa $|a_2| \leq \dfrac{2}{1+\alpha}$ dan Teorem 1 memberi

$$|a_3| \leq \frac{1}{1+2\alpha}, \quad \text{jika } \alpha^2 - 7\alpha - 2 \geq 0,$$

dan

$$|a_3| \leq \frac{3(1+3\alpha)}{(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}, \quad \text{jika } \alpha^2 - 7\alpha - 2 \leq 0.$$

Ketaksamaan $|a_2|$ adalah yang terbaik apabila f diberi oleh (2.4) dan ketaksamaan $|a_3|$ adalah yang terbaik apabila f diberi oleh (2.3) dan (2.4) masing-masing.

Sekarang kita tumpukan kepada kes μ nyata dan tunjukkan yang berikut:

Teorem 2 *Andaikan $f \in M^\alpha$ dan diberi oleh (1.1). Maka untuk μ nyata,*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \dfrac{3(1+3\alpha) - 4\mu(1+2\alpha)}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, & \textit{jika} \quad \mu \leq \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)}, \\ \dfrac{1}{1+2\alpha}, & \textit{jika} \quad \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)} \leq \mu \leq \dfrac{4+11\alpha+\alpha^2}{4(1+2\alpha)}, \\ \dfrac{4\mu(1+2\alpha) - 3(1+3\alpha)}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, & \textit{jika} \quad \mu \geq \dfrac{4+11\alpha+\alpha^2}{4(1+2\alpha)}. \end{cases}$$

Untuk setiap μ terdapat fungsi dalam M^α agar sedemikian kesamaan dipenuhi.

Bukti

Kita perhatikan dua kes:

Kes (i): $\mu \leq \dfrac{3(1+3\alpha)}{4(1+2\alpha)}$.

Dalam kes ini, (2.2) dan Lema 1 memberi

$$
\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{1}{2(1+2\alpha)}\left|p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right| + \frac{(3+9\alpha-4\mu(1+2\alpha))|p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}, \\
&\leq \frac{1}{1+2\alpha} + \frac{(2+7\alpha-\alpha^2-4\mu(1+2\alpha))|p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)},
\end{aligned}
$$

dan dengan $|p_1| \leq 2$ kita memperolehi

$$
|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \dfrac{3(1+3\alpha)-4\mu(1+2\alpha)}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, & \text{jika} \quad \mu \leq \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)}, \\ \dfrac{1}{1+2\alpha}, & \text{jika} \quad \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)} \leq \mu \leq \dfrac{3(1+3\alpha)}{4(1+2\alpha)}. \end{cases}
$$

Kesamaan diperolehi dengan memilih $p_1 = p_2 = 2$ dan $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ masing-masing dalam (2.2).

Kes (ii):$\mu \geq \dfrac{3(1+3\alpha)}{4(1+2\alpha)}$.

Menurut (2.2) dan Lema 1,

$$
\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{1}{2(1+2\alpha)}\left|p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right| + \frac{(4\mu(1+2\alpha)-(3+9\alpha))|p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}, \\
&\leq \frac{1}{1+2\alpha} + \frac{(4\mu(1+2\alpha)-(4+11\alpha+\alpha^2))|p_1|^2}{4(1+\alpha)^2(1+2\alpha)},
\end{aligned}
$$

dan seperti juga kes (i),

$$
|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\alpha}, & \text{jika} \quad \dfrac{3(1+3\alpha)}{4(1+2\alpha)} \leq \mu \leq \dfrac{4+11\alpha+\alpha^2}{4(1+2\alpha)}, \\ \dfrac{4\mu(1+2\alpha)-3(1+3\alpha)}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, & \text{jika} \quad \mu \geq \dfrac{4+11\alpha+\alpha^2}{4(1+2\alpha)}. \end{cases}
$$

Ianya adalah yang terbaik dengan memilih $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ dan $p_1 = 2i$, $p_2 = -2$ masing-masing dalam (2.2).

Maka Teorem 2 terbukti. $\square$

Sekarang diperluaskan kelas M^α seperti berikut:

Takrif 3 *Andaikan $\alpha > 0$ dan $0 \leq \beta < 1$. Maka f analisis pada D dan diberi oleh (1.1) disebut sebagai fungsi cembung secara logaritma peringkat β, jika untuk $z \in D$ dan $f(z)^{1-\alpha} f'(z)^{\alpha} \neq 0$,*

$$Ny\left[\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}\right] > \beta. \tag{2.5}$$

Kelas fungsi ini dilambangkan sebagai $M^{\alpha}(\beta)$.

Teorem 3 *Andaikan $f \in M^{\alpha}(\beta)$. Maka untuk μ kompleks ,*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{1-\beta}{1+2\alpha} maks \left[1, \frac{|(3+9\alpha)(1-\beta)+\beta(1+\alpha)^2 - 4\mu(1-\beta)(1+2\alpha)|}{(1+\alpha)^2}\right].$$

Untuk setiap μ terdapat fungsi dalam $M^{\alpha}(\beta)$ agar sedemikian kesamaan dipenuhi.

Oleh kerana teknik yang digunakan adalah serupa dalam pembuktian Teorem 2, pembuktian lanjutan diserahkan kepada pembaca. Kesamaannya dipertahankan apabila f diberi oleh

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha} = \frac{1+z^2(1-2\beta)}{1-z^2}$$

dan

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha} = \frac{1+z(1-2\beta)}{1-z}$$

masing-masing.

Teorem yang berkaitan untuk μ nyata adalah seperti berikut:

Teorem 4 *Andaikan $f \in M^{\alpha}(\beta)$. Maka untuk nyata μ dan $\Delta(\mu) = |a_3 - \mu a_2^2|$,*

$$\Delta(\mu) \leq \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)\{3(1+3\alpha)(1-\beta)+\beta(1+\alpha)^2\} - 4\mu(1-\beta)^2(1+2\alpha)}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, \\ \qquad jika \quad \mu \leq \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)}, \\ \dfrac{1-\beta}{1+2\alpha}, \\ \qquad jika \quad \dfrac{2+7\alpha-\alpha^2}{4(1+2\alpha)} \leq \mu \leq \dfrac{3(1+3\alpha)(1-\beta)+(1+\beta)(1+\alpha)^2}{4(1+2\alpha)(1-\beta)}, \\ \dfrac{4\mu(1-\beta)^2(1+2\alpha) - (1-\beta)\{3(1+3\alpha)(1-\beta)+\beta(1+\alpha)^2\}}{(1+2\alpha)(1+\alpha)^2}, \\ \qquad jika \quad \mu \geq \dfrac{3(1+3\alpha)(1-\beta)+(1+\beta)(1+\alpha)^2}{4(1+2\alpha)(1-\beta)}. \end{cases}$$

Untuk setiap μ terdapat fungsi dalam $M^{\alpha}(\beta)$ agar sedemikian kesamaan dipenuhi.

Sekali lagi pembuktian ditinggalkan dan perhatikan kesamaan terjalin apabila f diberi oleh

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}=\frac{1+z(1-2\beta)}{1-z}$$

dan

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}=\frac{1+z^2(1-2\beta)}{1-z^2}$$

juga

$$\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\alpha}=\frac{1+iz(1-2\beta)}{1-iz}$$

masing-masing.

Rujukan

[1] C.Caratheódory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten vn Potenzreihen die gegebene Werte nicht annehmen*, Math. Ann. **64**(1907), 95–115.

[2] A.W.Goodman, *Univalent Functions*, **1**(1983), Mariner Publishing Company, Inc. Tampa, Florida.

[3] P.K.Kulshrestha, *Coefficient Problem for Alpha-convex Univalent Functions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **54**(1974), 205–211.

[4] S.S.Miller, *Distortion Properties of Alpha-starlike Functions*, Proc. Amer. Math. Soc, **38**(1973), 311–313.

[5] S.S. Miller, P.T. Mocanu & M.O.Reade, *All α-convex Functions are Starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Et Appl. Tome, **xvii(9)**(1972), 1395–1397, Bucarest.

[6] Z.Nehari, *Conformal Mapping*, Mc-Graw Hill, New York, 1952.

[7] J.Szynal, *Some Remarks on Coefficients Inequality for α-convex Functions*, Bull De L'Academie Polonaise des Sciences, **xx(11)**(1972), 917–919.