Matematika, 1997, Jilid 13, hlm. 1–11

Kaedah Min Geometri Runge Kutta Peringkat Kedua

Mohd Idris Jayes
Jabatan Statistik, Fakulti Sains Matematik
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi,Selangor, Malaysia

Abstrak Di dalam Mohd Idris[4] kaedah min geometri bagi menerbitkan semula kaedah penyelesaian berangka persamaan pembeza biasa diberikan. Di dalam kertas ini, kita lanjutkan pendekatan tersebut untuk menerbitkan kaedah min geometri Runge Kutta peringkat kedua. Keputusan berangka yang diperolehi menunjukkan bahawa untuk beberapa masalah tertentu, kaedah min geometri menghasilkan keputusan yang menggalakkan. Namun demikian, kaedah min geometri itu dilihat dari segi pengiraannya adalah lebih kompleks berbanding dengan kaedah Runge Kutta piawai.

Katakunci Kaedah min geometri, kaedah Runge kutta, persamaan pembeza biasa.

Abstract *In Mohd Idris [4], the geometric mean approach of deriving the numerical solution for the ordinary differential equations is shown. In this paper, we extend the approach to derive the Runge Kutta geometric mean method of order 2. Numerical results obtained form selected problems show that the Runge Kutta geometric mean method is very competitive. However, the Runge Kutta geometric mean is computationally expensive compared to the standard Runge Kutta method.*

Keywords *Geometric mean method, Runge Kutta method, ordinary differential equations.*

1 Pengenalan

Dalam Mohd Idris [4], kita takrifkan kaedah teritlak tak tersirat min geometri Runge Kutta (RK-GM) tahap s sebagai

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi(x_n, y_n; h) = \sum_{i,j=1}^{s} w_{i,j}\sqrt{k_i k_j}\\ k_1 = f(x_n, y_n)\\ .\\ .\\ .\\ k_r = f(x_n + c_r h, y_n + h\sum_{i=1}^{r-1} a_{r,i}k_i)\end{array}\right\} \qquad (1.1a)$$

dengan

$$c_r = \sum_{r=1}^{r-1} a_{r,i} \text{ untuk } r = 2, 3, \cdots, s. \qquad (1.1b)$$

Daripada (1.1), (1.1a) dan (1.1b) kita boleh terbitkan kaedah RK-GM pelbagai peringkat bergantung kepada kejituan kembangan siri Taylor yang digunakan untuk menurunkan pelbagai sebutan yang terlibat.

Kita dapati sebagaimana dalam kes kaedah Runge Kutta piawai, rumus peringkat pertama hanya melibatkan pengiraan satu fungsi saja. Maka kaedah RK-GM peringkat pertamanya adalah serupa dengan kaedah Euler, iaitu

$$\left.\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hk_1\\ k_1 = f(x_n, y_n).\end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

2 Kaedah RK-GM Peringkat Kedua

Kaedah Runge Kutta tahap dua berperingkat kedua diberikan oleh

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[w_1k_1 + w_2k_2] \qquad (2.1)$$

dengan

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(x_n, y_n)\\ k_2 = f(x_n + c_1h, y_n + a_{2,1}hk_1).\end{array}\right\} \qquad (2.1a)$$

Parameter-parameter tertentu untuk (2.1) dan (2.1a) adalah

$$c_1 = 1, a_{2,1} = 1, w_1 = w_2 = 1.$$

Kaedah RK-GM yang setara adalah dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + h[w_1k_1 + w_2k_2 + w_3\sqrt{k_1k_2}] \qquad (2.2)$$

dengan k_1 dan k_2 diberikan oleh (2.1a), Pekali $c_1, a_{2,1}$ dan $w_i, i = 1, 2, 3$ ditentukan sedemikian hingga (2.2) berkejituan yang paling tinggi seboleh mungkin.

Dengan menggunakan kembangan siri Taylor untuk k_2 di sekitar (x_n, y_n) kita dapati

$$\begin{aligned} k_2 &= f + c_1 h f_x + a_{2,1} h f f_y + \frac{1}{2} h^2 [c_1^2 f_{xx} + 2c_1 a_{2,1} f f_{xy} + (a_{2,1} f)^2 f_{yy}] + \cdots \\ &= f \left\{ 1 + h \left[c_1 \frac{f_x}{f} + a_{2,1} f_y + \frac{1}{2} h \left(c_1^2 \frac{f_{xx}}{f} + 2c_1 a_{2,1} f_{xy} + a_{2,1}^2 f f_{yy} \right) \right] \right\} + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan tata tanda berikut digunakan untuk memudahkan penulisan,

$f = f(x, y), f_x = f_x(x, y), f_y = f_y(x, y), f_{xx} = f_{xx}(x, y), f_{xy} = f_{xy}(x, y)$ untuk semua (x, y)

dalam domain kamiran.

Sekarang

$$k_1 k_2 = f^2 \left\{ 1 + h \left[c_1 \frac{f_x}{f} + a_{2,1} f_y + \frac{1}{2} h \left(c_1^2 \frac{f_{xx}}{f} + 2c_1 a_{2,1} f_{xy} + a_{2,1}^2 f f_{yy} \right) \right] \right\} + \cdots \tag{2.4}$$

Katakan

$$g_1 = h \left[c_1 \frac{f_x}{f} + a_{2,1} f_y + \frac{1}{2} h \left(c_1^2 \frac{f_{xx}}{f} + 2c_1 a_{2,1} f_{xy} + a_{2,1}^2 f f_{yy} \right) \right]. \tag{2.5}$$

kita dapati

$$\sqrt{k_1 k_2} \approx f \sqrt{1 + g_1} \tag{2.6}$$

dengan syarat yang $k_1 k_2 > 0$.

Maka setelah dimudahkan dan disusun semula, kita tuliskan

$$g_1 = \frac{k_1 k_2}{f^2} - 1. \tag{2.7}$$

Sekarang daripada (2.6), kita dapati melalui kembangan Binomial

$$\sqrt{k_1 k_2} \approx f \left[1 + \frac{1}{2} g_1 \right] \tag{2.8}$$

dan gunakan (2.5), kita dapati

$$\sqrt{k_1 k_2} \approx f \left\{ 1 + h \left[c_1 \frac{f_x}{f} + a_{2,1} f_y + \frac{1}{2} h \left(c_1^2 \frac{f_{xx}}{f} + 2c_1 a_{2,1} f_{xy} + a_{2,1}^2 f f_{yy} \right) \right] \right\} + \cdots \tag{2.9}$$

Maka dengan penggantian (2.1a), (2.3) dan (2.9) ke dalam (2.2) dan setelah membuat pemudahan dan penyusunan semula, kita dapati

$$\begin{aligned} y_{n+1} \approx & y_n + (w_1 + w_2 + w_3) h f \\ & + (w_2 + \frac{1}{2} w_3) h^2 f \left\{ c_1 \frac{f_x}{f} + a_{2,1} f_y + \frac{1}{2} h \left[c_1^2 \frac{f_{xx}}{f} + 2c_1 a_{2,1} f_{xy} + a_{2,1}^2 f f_{yy} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Kembangan siri Taylor y_{n+1} untuk peringkat kedua di sekitar x_n diberikan sebagai

$$y_{n+1} \approx y_n + hy_n^{(1)} + \frac{h^2}{2} y_n^{(2)} + O(h^3). \tag{2.11}$$

Oleh kerana $y^{(1)} = f(x, y)$, maka

$$y_{n+1} \approx y_n + hf + \frac{h^2}{2}\left[f_x + ff_y\right] + \frac{h^2}{6}\left[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2\right]. \tag{2.12}$$

Sekarang (2.10) dan (2.12) adalah sama, jika syarat berikut dipenuhi

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \\ [w_2 + \tfrac{1}{2}w_3]c_1 &= \tfrac{1}{2} \\ [w_2 + \tfrac{1}{2}w_3]a_{2,1} &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Andaikan $w_1, w_2, w_3 \neq 0$, maka kita hasilkan

$$c_1 = a_{2,1} = \frac{1}{\beta}, \tag{2.14}$$

untuk sebarang β.

Dengan menggantikan $c_1 = 1/\beta$ ke dalam persamaan kedua (2.13) dan setelah menyusun semula kita perolehi

$$2w_2 + w_3 = \beta. \tag{2.15}$$

Kemudian selesaikan persamaan serentak yang terbentuk daripada persamaan yang pertama dalam (2.13) dan (2.15), kita dapati

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 1 - \alpha \\ w_2 &= \beta - \alpha \\ w_3 &= 2\alpha - \beta \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

untuk sebarang pemalar α dan β.

Maka, kaedah RK-GM teritlak tahap dua peringkat kedua untuk sebarang parameter α dan β dapat dituliskan dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)k_1 + (\beta - \alpha)k_2 + (2\alpha - \beta)\sqrt{k_1 k_2}\right] \tag{2.17}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \rho h, y_n + \rho h k_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

dan $\rho = 1/\beta$.

Oleh sebab α dan β adalah pemalar-pemalar sebarangan, maka rumus yang boleh diterbitkan daripada (2.17) adalah tak terhingga banyaknya. Namum demikian pemilihan β

Jadual 2.1 Beberapa Rumus RK-GM Tahap Dua Peringkat Kedua

<table>
<tr><td rowspan="3">$\beta = 1$

Rumus (2.23)</td><td>$\alpha = 0$</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + h\left[\left(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}\right)^2+\sqrt{k_1k_2}\right]$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+h, y_n+hk_1)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$
Rumus (2.26)</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + h\sqrt{k_1k_2}$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+h, y_n+hk_1)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = \frac{1}{2}$
Rumus (2.25)</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + \frac{h}{2} + [k_1+k_2]$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+h, y_n+hk_1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\beta = 2$

Rumus (2.19)

$\overline{h} = \frac{h}{2}$</td><td>$\alpha = 0$</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + h\left[\left(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}\right)^2+k_2\right]$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+\overline{h}, y_n+\overline{h}k_1)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = \frac{1}{2}$</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + \overline{h}\left[\left(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}\right)^2+2k_2\right]$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+\overline{h}, y_n+\overline{h}k_1)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$
Rumus (2.22)</td><td>$y_{n+1}{=}y_n + hk_2$
$k_1{=}f(x_n, y_n)$
$k_2{=}f(x_n+\overline{h}, y_n+\overline{h}k_1)$</td></tr>
</table>

yang sesuai saja yang akan dipertimbangkan. Ciri yang penting yang harus diperhatikan ialah rumus yang diterbitkan itu seboleh mungkin melibatkan proses penghitungan yang kecil dan mudah, iaitu kerja dan ralat pangkasan setempat yang terlibat amat minimum. Berasaskan itu, satu pilihan β yang mungkin adalah $\beta = 2$. Maka rumus kaedah RK - GM yang terhasil adalah

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)k_1 + (2-\alpha)k_2 + (2\alpha-1)\sqrt{k_1k_2}\right] \tag{2.19}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Sekarang (2.19) boleh dituliskan dalam bentuk yang lebih padat lagi sebagai

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2})^2 + k_2\right] \tag{2.21}$$

dengan syarat $k_1 > 0$ dan $k_2 > 0$.

Maka, jika $\alpha = 1$, kita perolehi rumus

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 \tag{2.22}$$

dengan k_2 seperti diberikan dalam (2.20) di atas.

Satu pilihan lain untuk nilai β yang boleh dipertimbangkan adalah $\beta = 1$. Maka daripada (2.17) dan (2.18), kita perolehi satu lagi bentuk rumus kaedah RK-GM yang diberikan oleh

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)(k_1+k_2) + (2\alpha-1)\sqrt{k_1k_2}\right] \tag{2.23}$$

dengan

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1). \end{array}\right\} \tag{2.24}$$

Kita perhatikan bahawa kaedah RK klasik peringkat dua dapat diturunkan daripada rumus (2.23) dengan menetapkan $\alpha = 1/2$. Iaitu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[k_1 + k_2\right]. \tag{2.25}$$

Jika kita tentukan $\alpha = 1$, kita akan perolehi kaedah RK-GM asli peringkat dua seperti berikut.

$$y_{n+1} = y_n + h\sqrt{k_1k_2} \tag{2.26}$$

dengan k_1 dan k_2 seperti ditakrifkan dalam (2.24) di atas.

Dalam Jadual 2.1 kita senaraikan sebahagian rumus yang mungkin diterbitkan daripada (2.17) dan (2.18) untuk beberapa nilai α dan β.

Dalam bahagian yang berikutnya kita bincangkan analisis ralat kaedah RK-GM peringkat kedua dan seterusnya dalam bahagian ujian berangka kita tinjau penggunaan beberapa rumus yang diterbitkan dalam penyelesaian masalah pilihan.

3 Analisis Ralat Kaedah Peringkat Kedua

Imbas kembali kaedah RK-GM peringkat kedua yang diterbitkan dalam bahagian kedua sebelum ini. Perhatikan ralat pangkasan setempat kaedah tersebut yang diberikan oleh perbezaan di antara (2.12) dan (2.10). Dengan itu, kita dapati bahawa ralat pangkasan setempat, T_{n+1} bagi kaedah RK-GM diberikan oleh

$$\begin{aligned} T_{n+1} = (2w_2 + w_3)\frac{h^3}{12}\big\{&(3c_1^2 - 2)f_{xx} + 2(3c_1a_{2,1} - 2)ff_{xy} \\ &+ (3a_{2,1}^2 - 2)f^2f_{yy} - 2(f_x + ff_y)f_y\big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Perhatikan bahawa diberikan suatu masalah tertentu, maka ralat pangkasan setempatnya adalah tertakluk kepada kaedah yang digunakan. Dengan perkataan lain, untuk suatu fungsi dan terbitannya yang tertentu, maka T_{n+1} adalah bergantung sepenuhnya kepada parameter kaedah yang digunakan, iaitu w_i , untuk $i = 1, 2,$ dan 3 , c_1 dan $a_{2,1}$.

Sekarang dengan menggunakan (2.14) dan (2.15), kita dapat permudahkan (3.1) untuk memberikan

$$T_{n+1}^{(\beta)} = \frac{h^3}{12}\left\{(3\beta^{-1} - 2)G - 2Ff_y\right\}, \tag{3.2}$$

dengan

$$\left.\begin{array}{l} F = f_x + f f_y \\ G = f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Seterusnya kita akan bincangkan ralat pangkasan setempat bagi kedua-dua kumpulan kaedah RK-GM yang diterbitkan dalam bahagian kedua sebelum ini. Pertamanya, kita akan perhatikan ralat pangkasan setempat bagi kaedah (2.19) yang boleh diturunkan daripada (3.2) dengan penggantian $\beta = 2$. Ini menghasilkan

$$T_{n+1}^{(2)} = -\frac{h^3}{24}\left\{G + 4F f_y\right\} \tag{3.4}$$

Seterusnya, jika gantikan $\beta = 1$ dalam (3.2), kita akan hasilkan ralat pangkasan setempat untuk (2.23) yang diberikan oleh

$$T_{n+1}^{(1)} = \frac{h^3}{12}\left\{G - 2F f_y\right\} \tag{3.5}$$

Kita perhatikan bahawa perbezaan di antara dua ralat pangkasan setempat itu adalah

$$\tau = T_{n+1}^{(1)} - T_{n+1}^{(2)},$$

atau

$$\tau = \frac{h^3}{8} G, \tag{3.6}$$

dengan G seperti yang diberikan dalam (3.3) di atas.

Sekarang τ adalah positif selagi $G = f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}$ itu bernilai positif. Maka $T_{n+1}^{(1)}$ adalah sentiasa lebih besar daripada $T_{n+1}^{(2)}$ untuk nilai G yang positif. Dengan perkataan lain, rumus (2.19) adalah lebih jitu daripada rumus (2.23) apabila digunakan untuk fungsi f sedemikian hingga G adalah sentiasa positif dalam selang kamiran.

Daripada (3.2), kita dapat aruhkan bahawa fungsi ralat prinsipal untuk kaedah RK-GM teritlak peringkat kedua sebagai

$$\psi(x, y) = \frac{1}{12}\left\{(3\beta^{-1} - 2)G - 2F f_y\right\}. \tag{3.7}$$

Dengan mengikuti jejak hujah Lotkin [3], kita boleh tentukan batas untuk $\psi(x, y)$, dengan andaian bahawa batas untuk f dan terbitan separanya untuk $x \in [a, b], y \in (-\infty, \infty)$ memenuhi syarat yang berikut:

$$|f(x, y)| < Q, \ \left|\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{P^{i+j}}{Q^{j-1}}, i + j \leq p, \tag{3.8}$$

dengan P dan Q adalah pemalar positif dan p adalah peringkat kaedah. Dalam kes kita, p = 2. Maka dengan menggunakan (3.8), kita dapati

$$\left.\begin{array}{l} |f_y| < P \\ |F| = |f_x + f f_y| < 2PQ \\ |G| = |f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}| < 4P^2 Q. \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

Dengan tukargantian (3.9) di dalam (3.7), kita perolehi

$$|\psi(x,y)| < \frac{1}{3}\left\{\left|3\beta^{-1}-2\right|+1\right\}P^2Q, \tag{3.10}$$

dan batas untuk ralat pangkasan setempat prinsipal diberikan oleh

$$|\psi(x,y)h^3| < \frac{1}{3}\left\{1+\left|3\beta^{-1}-2\right|+1\right\}h^3P^2Q, \tag{3.11}$$

Namun demikian, Henrici[1] telah membuktikan bahawa batas untuk ralat pangkasan prinsipal itu juga adalah batas untuk ralat pangkasan setempat keseluruhan, T_{n+1}, walaupun andaian terhadap batas untuk f dan terbitan separanya adalah berbeza daripada yang dimaksudkan dalam (3.8). ini adalah disebabkan yang kaedah Runge kutta itu adalah kaedah tak tersirat satu langkah seperti yang dijelaskan oleh Lambert[2]. Maka kita boleh tuliskan sebagai pilihan (3.11)

$$|T_{n+1}| < \frac{1}{3}\left\{1+\left|3\beta^{-1}-2\right|+1\right\}h^3P^2Q. \tag{3.11}$$

Maka dengan itu, batas untuk kaedah RK-GM apabila $\beta = 1$ dan $\beta = 2$, masing-masing diberikan sebagai

$$|T^{(1)}_{n+1}| < \frac{2}{3}h^3P^2Q \tag{3.12}$$

dan

$$|T^{(2)}_{n+1}| < \frac{1}{2}h^3P^2Q. \tag{3.13}$$

Kita boleh juga tentukan batas untuk ralat pangkasan setempat itu dengan menggunakan pendekatan yang diperkenalkan oleh Bieberbach di mana dalam persekitaran

$$|x-x_0| < A, |y-y_0| < B \tag{3.14}$$

bahawa

$$\begin{aligned} &|f(x,y)| < Q, \left|\frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{N}{Q^{j-1}}, i+j \le 4 \\ &|x-x_0|N < 1 \text{ dan } AQ < B. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Maka menurut pendekatan Bieberbach ini, kita dapati batas untuk ralat pangkasan setempat untuk (2.17) adalah

$$|T_{n+1}| < \frac{h^3}{3}NQ(1+N). \tag{3.16}$$

Namun demikian, pendekatan Lotkin menghasilkan batas yang lebih runcing berbanding dengan pendekatan Bieberbach (Lambert[2]).

Jadual 4.1 Keputusan Berangka Daripada Rumus RK-GM Pilihan

x_n	Penyelesaian Tepat	Penyelesaian Berangka	Ralat
.10	.1095163E+01	.1094998E+01(A) .1086286E+01(B) .1086071E+01(C)	.1648442E−03 .8876563E−02 .9091785E−02
.20	.1180955E+01	.1180955E+01(A) .1164361E+01(B) .1163951E+01(C)	.3140015E−03 .1690841E−01 .1731837E−01
.30	.1259182E+01	.1258733E+01(A) .1235006E+01(B) .1234420E+01(C)	.4489645E−03 .2417592E−01 .2476210E−01
.40	.1329680E−01	.1329109E+01(A) .1298928E+01(B) .1298183E+01(C)	.5710842E−03 .3075184E−01 .3149745E−01
.50	.1393469E+01	.1392788E+01(A) .1356767E+01(B) .1355877E+01(B)	.6815826E−03 .3670198E−01 .3759186E−01
.60	.1451188E+01	.1450407E+01(A) .1409102E+01(B) .1408082E+01(C)	.7815656E−03 .4208589E−01 .4310631E−01
.70	.1503415E+01	.1502543E+01(A) .1456457E+01(B) .1455319E+01(C)	.8720341E−03 .4695745E−01 .4809598E−01
.80	.1550671E+01	.1549717E+01(A) .1499306E+01(B) .1498060E+01(C)	.9538933E−03 .5136542E−01 .5261083E−01
.90	.1593430E+01	.1592402E+01(A) .1538076E+01(B) .1536734E+01(C)	.1027963E−02 .5535392E−01 .5669603E−01
1.00	.1632121E+01	.1631026E+01(A) .1573158E+01(B) .1571728E+01(C)	.1094983E−02 .5896286E−01 .6039248E−01

Jadual 4.2 Keputusan Berangka Daripada Rumus RK-GM Tahap Dua Peringkat Kedua

Parameter Rumus (2.17)		Keputusan Pada Titik Akhir, $x_n = 1.00$	
α	β	Keputusan Berangka di x_n	Ralat di x_n, $e_n = \lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0	1	.1573158E+01	.5896286E−01
0	2	.1572094E+01	.6002608E−01
1/2	1	.1572443E+01	.5967767E−01
1/2	2	.1571911E+01	.6020928E−01
1	1	.1571728E+01	.6039248E−01
1	2	.1571728E+01	.6039248E−01
−1	1	.1574587E+01	.5753324E−01
−1	3/4	.1576344E+01	.5577667E−01
−1	1/2	.1580607E+01	.5151320E−01
−1	1/4	.1598490E+01	.3363025E−01
−1	3/20	.1631026E+01	.1094983E−01
−1	1/8	.1649765E+01	.1764405E−01

4 Ujian Berangka

Dalam ujian berangka seterusnya, kita telah gunakan tiga rumus yang berikut

(A) $(\alpha = -1, \beta = \frac{3}{20})$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{20}\{40k_1 + 23k_2 - 43\sqrt{k_1 k_2}\}$

(B) $(\alpha = 0, \beta = 1$: Kaedah Runge Kutta$)$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\{k_1 + k_2\}$

(C) $\alpha = 1, \beta = 1$: Kaedah Asli GM$)$ $y_{n+1} = y_n + h\sqrt{k_1 k_2}$

untuk penyelesaian masalah nilai awal persamaan pembeza biasa peringkat pertama yang berikut :

Persamaan : $y^{(1)}(x) = e^{-x}$.
Syarat Awal : $x_0 = 0, y_0 = 1$.
Penyelesaian Tepat : $y(x) = -e^{-x} + 2$

Dalam Jadual 4.1 kita bandingkan hasil yang diperolehi daripada penggunaan ketiga-tiga rumus yang disenaraikan di atas, iaitu kaedah RK-GM tahap dua peringkat kedua (A), kaedah Runge Kutta tahap dua peringkat kedua (B) dan kaedah RK-GM asli tahap dua peringkat kedua (C). Sementara dalam Jadual 4.2 kita senaraikan ralat di akhir pengiraan dalam penyelesaian masalah di atas untuk beberapa rumus pilihan yang diterbitkan daripada (2.17).

5 Kesimpulan

Hasil ujian berangka yang diperolehi menunjukkan bahawa kaedah RK-GM melibatkan ralat yang kecil, walaupun jika kaedah itu dilihat dari segi sudut kerumitan pengiraan, mungkin akibat penglibatan fungsi punca. Seperkara lagi yang perlu diambil perhatian ialah tentang tanda fungsi itu sendiri kerana penglibatan pencarian punca gandadua, maka fungsi itu hendaklah sentiasa positif. Namun pencarian punca ganda dua bukanlah suatu masalah dengan kemajuan teknologi komputer kini. Justru itu, kaedah RK-GM amat berguna sebagai kaedah pengiraan berangka sekiranya kejituan baik ingin dicapai hanya dengan penggunaan kaedah peringkat rendah.

Rujukan

[1] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[2] J.D. Lambert, *Numerical Merical Methods for Ordinary Differential Systems*, John Wiley & Sons, London, 1991.

[3] M. Lotkin, *On the Accuracy of RK Methods*, MTAC, 1951, 128–132.

[4] Mohd Idris Jayes, *Penyelesaian Berangka Persamaan Pembeza Biasa Dengan Kaedah Min Geometri Satu Langkah*, Matematika, **Jilid 12, Bil.1**(1996), 21–28.